数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 13-22

ある種の準 Banach 関数空間に於ける マルチンゲール変換の不等式

富山大学大学院理工学研究部（理学）
菊池 万里

Masato Kikuchi
Graduate School of Science and Engineering
University of Toyama

1 導入

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ を非原子確率空間とする．Σ の部分 σ–代数の族 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ は，（集合族の包含の意味で）広義単調増加であるとき，Ω の**フィルトレーション**と呼ばれる．Ω のフィルトレーションの全体を $\mathbb{F}$ で表し，各 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ に対して，$\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0$ と置く．

$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ とする．Ω 上の（離散時径数）確率過程 $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ は，各 f_n が $\mathcal{F}_n$–可測であるとき，$\mathcal{F}$ に**適合**するといわれる．$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ に適合する確率過程 $f = (f_n)$ は，各 f_n が積分可能であり，すべての $n \in \mathbb{Z}_+$ とすべての $A \in \mathcal{F}_n$ に対して等式 $\mathbb{E}[(f_{n+1} - f_n)\mathbb{1}_A] = 0$ を満たすとき，**$\mathcal{F}$–マルチンゲール**と呼ばれる．条件付期待値を用いて表現すれば，$f = (f_n)$ が $\mathcal{F}$–マルチンゲールであるとは，

$$\mathbb{E}[f_{n+1}|\mathcal{F}_n] = f_n \quad \text{a.s. (almost surely)}$$

となることである．例えば，x を確率変数とし，確率過程 $f = (f_n)$ を $f_n = \mathbb{E}[x|\mathcal{F}_n]$ のように定義すれば，$f = (f_n)$ はマルチンゲールであり，（確率変数の族として）一様可積分である．逆に，任意の一様可積分なマルチンゲールは，ある確率変数 x を用いて $f_n = \mathbb{E}[x|\mathcal{F}_n]$ a.s. と表される．$\mathcal{F}$–マルチンゲールの全体を $\mathfrak{M}(\mathcal{F})$ で表し，一様可積分な $\mathcal{F}$–マルチンゲールの全体を $\mathfrak{M}_u(\mathcal{F})$ で表す．更に，$\mathfrak{M} = \bigcup_{\mathcal{F}\in\mathbb{F}} \mathfrak{M}(\mathcal{F})$，$\mathfrak{M}_u = \bigcup_{\mathcal{F}\in\mathbb{F}} \mathfrak{M}_u(\mathcal{F})$ と置き，$\mathfrak{M}$，$\mathfrak{M}_u$ に属す確率過程をそれぞれ単に，マルチンゲール，一様可積分なマルチンゲールと呼ぶ．

Doob の収束定理としてよく知られているように，L_1 に於いてノルム有界な $\mathcal{F}$–マルチンゲールは概収束する．特に，一様可積分なマルチンゲールは概収束する．概収束するマルチンゲール $f = (f_n)$ に対して，その概収束極限を f_∞ で表すこととする．

マルチンゲール $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ に対し，**2 次変分** Sf は

$$Sf = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - f_{n-1})^2 + f_0^2 \right\}^{1/2}$$

のように定義される．

マルチンゲール $f=(f_n)$ の概収束極限 f_∞ と 2 次変分 Sf の間に，次の不等式 (Burkholder の不等式) が成り立つことがよく知られている:

$$C_p^{-1}\|f_\infty\|_{L_p} \le \|Sf\|_{L_p} \le C_p\|f_\infty\|_{L_p} \qquad (1<p<\infty). \tag{1.1}$$

ここに C_p は p のみに依存する正定数である．この不等式は，本稿で考察するマルチンゲール変換に関する不等式と密接な関連を持つ．

$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)\in\mathbb{F}$ とする．確率過程 $v=(v_n)$ は，各 v_n が $\mathcal{F}_{n-1}$–可測であるとき，**$\mathcal{F}$–可予測**であるといわれる．定義から明らかなように，$\mathcal{F}$–可予測な確率過程は $\mathcal{F}$ に適合する．$\mathcal{F}$–可予測，かつ $\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|v_n|\le 1$ a.s. であるような確率過程 $v=(v_n)$ の全体を $\mathfrak{p}(\mathcal{F})$ で表す．$v=(v_n)\in\mathfrak{p}(\mathcal{F})$ と $f=(f_n)\in\mathfrak{M}(\mathcal{F})$ に対して，f の v による**マルチンゲール変換** $v{*}f=((v{*}f)_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を

$$(v{*}f)_0=v_0f_0; \qquad (v{*}f)_n=\sum_{k=1}^{n}v_n(f_n-f_{n-1})+v_0f_0 \quad (n=1,2,\ldots),$$

のように定義する．このとき，$v{*}f\in\mathfrak{M}(\mathcal{F})$ であり，$v{*}f$ は概収束する ([3])．マルチンゲール変換は Burkholder [3] によって導入された概念であり，連続時径数のマルチンゲール理論に於ける確率積分に相当する．

$v=(v_n)\in\mathfrak{p}(\mathcal{F})$ とするとき，マルチンゲール変換の定義から $S(v{*}f)\le Sf$ a.s. であるので，不等式 $\|S(v{*}f)\|_{L_p}\le\|Sf\|_{L_p}$ が成り立つ．このことと (1.1) から，$1<p<\infty$ である限り，

$$\|(v{*}f)_\infty\|_{L_p}\le C_p^2\|f_\infty\|_{L_p}$$

となる．同様の不等式は，適当な条件の下に，より一般的な Banach 空間に於いても成立する．X を (下記の定義 2.1 の意味で) Banach 関数空間であるとする．文献 [7] に，任意の $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)\in\mathbb{F}$, $f=(f_n)\in\mathfrak{M}_u(\mathcal{F})$, $v=(v_n)\in\mathfrak{p}(\mathcal{F})$ に対して，不等式

$$\|(v{*}f)_\infty\|_X\le C\|f_\infty\|_X \tag{1.2}$$

が成り立つ為の必要十分条件が与えられている．

他方，文献 [6] に於いて Banach 関数空間 X の “弱空間” w-X が導入され，文献 [9] に於いて Doob 型の不等式

$$\left\|\sup\nolimits_n|f_n|\right\|_{\text{w-}X}\le C\|f_\infty\|_{\text{w-}X}$$

が成り立つ為の必要十分条件が与えられている．

以上のことから，(1.2) に於いて X を w-X に置き換えた不等式

$$\|(v{*}f)_\infty\|_{\text{w-}X}\le C\|f_\infty\|_{\text{w-}X} \tag{1.3}$$

が成り立つ為の必要十分条件はどのように表現されるかを問うことは自然である．本稿では，任意の $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)\in\mathbb{F}$, $f=(f_n)\in\mathfrak{M}_u(\mathcal{F})$, $v=(v_n)\in\mathfrak{p}(\mathcal{F})$ に対して (1.3) が成り立つ為の必要十分条件を紹介し，(1.2) が成り立つ為の必要十分条件と対比させながら解説する．

2 準備と記号

不等式 (1.2), (1.3) が成り立つ為の必要十分条件を述べる為には，前節で述べた記号に加え，多くの概念や記号が必要になる．文章が冗長になることを厭わず，しかし最小限に留まるように，必要な概念や記号を本節に纏めておく．

本稿では，$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ 上の関数空間を考察の対象とするが，加えて Lebesgue 測度を確率測度とする確率空間 $I := (0,1]$ 上の関数空間に言及することがある．

以下，Ω 上，及び，I 上の殆ど至るところ有限であるような確率変数の全体を，それぞれ $L_0(\Omega)$, $L_0(I)$ で表す．場合により，$L_0(\Omega)$, $L_0(I)$ を単に L_0 で表すこともある．L_p についても同様とする．

定義 2.1. Ω 上，或は I 上の確率変数が作る Banach 空間 X は，次の 3 条件を満たすとき，**Banach 関数空間**と呼ばれる:

(B1) $L_\infty \hookrightarrow X \hookrightarrow L_1$;
(B2) $y \in L_0$, $x \in X$, $|y| \le |x|$ a.s. であれば，$y \in X$ かつ $\|y\|_X \le \|x\|_X$;
(B3) $x_n \in X$, $0 \le x_n \le x_{n+1}$ a.s., $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_n \to x$ a.s. $(n \to \infty)$, $\sup_n \|x_n\|_X < \infty$ であれば，$x \in X$ かつ $\|x\|_X = \sup_n \|x_n\|_X$.

本稿を通して，$x \in L_0 \setminus X$ のとき $\|x\|_X = \infty$ と約束する．

上記の定義は，文献 [2] のそれとは異なるように見えるが，確率空間（より一般的には有限測度空間）上での Banach 関数空間を考える限り，上記の定義と文献 [2] のそれとは等価である．

Lebesgue 空間，Orlicz 空間，Lorentz 空間，適当な可積分性を有する荷重を持つ荷重 Lebesgue 空間，更に変動指数を持つ Lebesgue 空間などは，みな Banach 関数空間である．

定義 2.2. X を Ω 上の Banach 関数空間とする．各 $y \in L_0(\Omega)$ に対して，

$$\|y\|_{X'} = \sup\left\{\mathbb{E}\left[|xy|\right] : x \in X,\ \|x\|_X \le 1\right\}$$

と置き，$\|y\|_{X'}$ が有限であるような $y \in L_0(\Omega)$ の全体を X' と記す．これを X の**提携空間**と呼ぶ．I 上の Banach 関数空間の提携空間も同様に定義される．

Banach 関数空間 X の提携空間 X' は，再び Banach 関数空間になる．例えば，$\tilde{p}$ を p の共役指数とするとき，$L_p(\Omega)$ の提携空間は $L_{\tilde{p}}(\Omega)$ と一致し，Young 関数 Φ の共役 Young 関数を $\tilde{\Phi}$ とするとき，$L_\Phi(\Omega)$ の提携空間は $L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ と一致する．

定義 2.3. X を Banach 関数空間とする．x, $y \in L_0$ が同じ分布を持ち，$x \in X$ であれば，$y \in X$ かつ $\|x\|_X = \|y\|_X$ となるとき，X は**再配列不変**であるといわれる．

Lebesgue 空間，Orlicz 空間，Lorentz 空間は再配列不変であるが，w を荷重とする荷重 Lebesgue 空間 $L_{p,w}$ が（同値的にノルムを付け替えることによって）再配列不変になる為の必要十分条件は，$0 < \operatorname{ess\,inf} w$, $\operatorname{ess\,sup} w < \infty$ となることであり ([4, Theorem 3])，変動指数の Lebesgue 空間 $L_{p(\cdot)}$ が再配列不変になる為の必要十分条件は $p(\cdot)$ が殆ど至るところ定数になることである ([1, Theorem 1]).

Banach 関数空間の再配列不変性を考察するとき，$x \in L_0(\Omega)$ の非増加再配列の概念は欠かせない．$x \in L_0(\Omega)$ の**非増加再配列**は，

$$x^*(s) = \inf\{\lambda > 0\colon \mathbb{P}(|x| > \lambda) \le s\}, \qquad s \in I = (0,1]$$

のように定義される I 上の関数であり，$|x|$ と同じ分布を持つ唯一の I 上の右連続非増加関数である．I そのものも確率空間であるから，同様の方法で $\phi \in L_0(I)$ の非増加再配列を定義することができる．

X が再配列不変な Banach 関数空間であるとき，次の 2 条件を満たす I 上の再配列不変な Banach 関数空間 $\hat{X}$ が存在する:

(R1) $x \in X$ であるとき，そのときに限り $x^* \in \hat{X}$;
(R2) すべての $x \in X$ に対して $\|x\|_X = \|x^*\|_{\hat{X}}$.

定義 2.4. X を Ω 上の再配列不変 Banach 関数空間とする．上記の (R1), (R2) を満たす I 上の再配列不変 Banach 関数空間 $\hat{X}$ を X の **Luxemburg 表現**と呼ぶ.

例えば，$L_p(\Omega)$ の Luxemburg 表現は $L_p(I)$ であり，$L_\Phi(\Omega)$ の Luxemburg 表現は $L_\Phi(I)$ である.

定義 2.5. X を Ω 上の Banach 関数空間とする．各 $x \in L_0(\Omega)$ に対して，

$$\|x\|_{\text{w-}X} = \sup_{\lambda > 0} \lambda \left\| \mathbb{1}_{\{\omega\in\Omega\colon |x(\omega)|>\lambda\}} \right\|_X$$

と置き，$\|x\|_{\text{w-}X}$ が有限であるような $x \in L_0(\Omega)$ の全体を w-X と記す．ここに，そして今後，$\mathbb{1}_A$ は集合 A の指示関数を表す.

例えば，$1 \le p < \infty$ のとき，w-L_p は Lorentz 空間 $L_{p,\infty}$ と一致する．w-X 上の汎関数 $\|\cdot\|_{\text{w-}X}$ は，三角不等式を満たさないのでノルムにはならないが，代わりに不等式

$$\|x+y\|_{\text{w-}X} \le 2(\|x\|_{\text{w-}X} + \|y\|_{\text{w-}X})$$

を満たす．すなわち，$\|\cdot\|_{\text{w-}X}$ は準ノルムであり，この準ノルムに関して w-X は完備になることが容易に確かめられる．換言すれば，w-X は準 Banach 空間である.

定義 2.6. X を Ω 上の Banach 関数空間とする．各 $t \in [0,1]$ に対し，

$$\underline{\varphi}_X(t) = \inf\{\|\mathbb{1}_A\|_X : A \in \Sigma,\ \mathbb{P}(A) = t\},$$
$$\overline{\varphi}_X(t) = \sup\{\|\mathbb{1}_A\|_X : A \in \Sigma,\ \mathbb{P}(A) = t\}$$

と置き，$\underline{\varphi}_X\colon [0,1] \to [0,\infty)$, $\overline{\varphi}_X\colon [0,1] \to [0,\infty)$ をそれぞれ X の**下基本関数**，**上基本関数**と呼ぶ.

X が再配列不変であるとする．$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = t$ のとき，$\mathbb{1}_A$ と $\mathbb{1}_B$ は同じ分布を持つので，$\|\mathbb{1}_A\|_X = \|\mathbb{1}_B\|_X$．従って

$$\underline{\varphi}_X(t) = \overline{\varphi}_X(t), \qquad t \in [0,1]$$

となる．このとき，$\overline{\varphi}_X$ を φ_X と書いて，X の**基本関数**と呼ぶ (*cf.* [2, p. 65]).

定義から容易に分かるように，$\overline{\varphi}_{L_p}(t) = t^{1/p}$ $(1 \le p < \infty)$; $\overline{\varphi}_{L_\infty}(t) = \mathbb{1}_{(0,1]}(t)$ となる．特に，$p = \infty$ の場合も含めて，$\overline{\varphi}_{L_p}$ は $[0,1]$ 上の凹関数である．これに対し，X が一般の Banach 関数空間の場合，$\overline{\varphi}_X$ は**準凹関数**である ([6, Lemma 1])．すなわち，$\overline{\varphi}_X$ は次の条件を満たす:

- $t = 0$ のとき，そのときに限り $\overline{\varphi}_X(t) = 0$.
- $\overline{\varphi}_X(t)$ は $[0,1]$ 上で非減少.
- $\overline{\varphi}_X(t)/t$ は $(0,1]$ 上で非増加.

各 $x \in L_0(\Omega)$ に対して，

$$\|x\|_{M(\overline{\varphi}_X)} = \sup_{0<t\le 1} \frac{\overline{\varphi}_X(t)}{t} \int_0^t x^*(s)\,ds,$$
$$\|x\|_{M^*(\overline{\varphi}_X)} = \sup_{0<s\le 1} \left[\overline{\varphi}_X(s) x^*(s)\right]$$

と置き，それぞれ $\|x\|_{M(\overline{\varphi}_X)}$，$\|x\|_{M^*(\overline{\varphi}_X)}$ が有限であるような $x \in L_0(\Omega)$ の全体を $M(\overline{\varphi}_X)$，$M^*(\overline{\varphi}_X)$ と記す．このとき，$M(\overline{\varphi}_X)$ は再配列不変な Banach 関数空間になり，その基本関数は $\overline{\varphi}_X$ と一致する ([2, p. 69])．他方，一般に $M^*(\overline{\varphi}_X)$ は Banach 空間にはならないが，準 Banach 空間になる．実際，$M^*(\overline{\varphi}_X)$ は $M(\overline{\varphi}_X)$ の弱空間 w-$M(\overline{\varphi}_X)$ と一致する ($M^*(\overline{\varphi}_X)$ と w-$M(\overline{\varphi}_X)$ の準ノルムが一致する)．

更に上記の定義に於いて，$x \in L_0(\Omega)$ を $\phi \in L_0(I)$ に置き換えることにより，I 上の再配列不変な Banach 関数空間 $\hat{M}(\overline{\varphi}_X)$，及び，準 Banach 空間 $\hat{M}^*(\overline{\varphi}_X)$ を定義することができる．$M(\overline{\varphi}_X)$，$\hat{M}(\overline{\varphi}_X)$，$M^*(\overline{\varphi}_X)$，$\hat{M}^*(\overline{\varphi}_X)$ は，いずれも **Marcinkiewicz 空間**と呼ばれる[*1]．定義から明らかなように，$\hat{M}(\overline{\varphi}_X)$ は $M(\overline{\varphi}_X)$ の Luxemburg 表現である．更に，X，$\hat{X}$ をそれぞれ $M^*(\overline{\varphi}_X)$，$\hat{M}^*(\overline{\varphi}_X)$ に置き換えて (R1)，(R2) が成立することから，「$\hat{M}^*(\overline{\varphi}_X)$ は $M^*(\overline{\varphi}_X)$ の Luxemburg 表現」と考えることができる．

マルチンゲール変換に関する不等式 (1.2) が成り立つ Banach 関数空間 X の特徴付けは，X の Boyd 指標 α_X, β_X を用いて表現される．更に，不等式 (1.3) が成り立つ Banach 関数空間の特徴付けも，X の別の指標 p_X，q_X を用いて表現される．次に述べるように，それらの指標は共通の方法によって定義される．

Banach 関数空間 X に対して，関数 $m_X\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ を

$$m_X(s) = \sup_{0<t<(1/s)\wedge 1} \frac{\overline{\varphi}_X(st)}{\overline{\varphi}_X(t)}, \qquad s \in (0,\infty)$$

で定義し，X の指標 p_X，q_X を

$$p_X = \sup_{0<s<1} \frac{\log m_X(s)}{\log s}, \qquad q_X = \inf_{1<s<\infty} \frac{\log m_X(s)}{\log s}$$

で定義する．このとき，m_X は**劣乗法的**になる．すなわち，すべての s, $t \in (0,\infty)$ に対して，不等式 $m_X(st) \le m_X(s) m_X(t)$ が成り立つ．このことと，$m_X(s) \le \max\{s,1\}$ であることから，

$$p_X = \lim_{s\to 0+} \frac{\log m_X(s)}{\log s}, \qquad q_X = \lim_{s\to\infty} \frac{\log m_X(s)}{\log s}$$

*1 文献 [2] では Lorentz 空間と呼ばれている．

かつ，$0 \le p_X \le q_X \le 1$ となることが導かれる (*cf.* [10, p. 53]).

p_X, q_X はすべての Banach 関数空間に対して定義されるが，Boyd 指標は再配列不変な Banach 関数空間に対してのみ定義される．X を Ω 上の再配列不変 Banach 関数空間とする．各 $s>0$ に対して，$L_0(I)$ 上の線形作用素 E_s を

$$(E_s\phi)(t) = \begin{cases} \phi(st) & \text{if } st \in I, \\ 0 & \text{if } st \notin I, \end{cases}$$

のように定義する．このとき，E_s (を $\hat{X}$ に制限した作用素) は，$\hat{X}$ からそれ自身への有界作用素になる．但し，$\hat{X}$ は X の Luxemburg 表現を表す．関数 $h\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ を

$$h_X(s) = \|E_{1/s}\|_{B(\hat{X})}, \qquad s \in (0,\infty)$$

で定義し，X の **Boyd 指標** α_X, β_X を

$$\alpha_X = \sup_{0<s<1} \frac{\log h_X(s)}{\log s}, \qquad \beta_X = \inf_{1<s<\infty} \frac{\log h_X(s)}{\log s}$$

で定義する．但し，$\|E_{1/s}\|_{B(\hat{X})}$ は $E_{1/s}$ の ($\hat{X}$ からそれ自身への作用素としての) 作用素ノルムを表す．p_X, q_X と同様の理由から，α_X, β_X は極限を用いて表現でき，$0 \le \alpha_X \le \beta_X \le 1$ となる．

3 主結果

主結果を述べるにあたり，Ω 上の Banach 関数空間 X が与えられたとき，$x \in L_0(\Omega) \setminus X$ に対して $\|x\|_X = \infty$ と約束したことを想起されたい．これにより，例えば定理 3.1 の (i) が成り立つことは，$f_\infty \in X$ であるような $f=(f_n) \in \mathfrak{M}_u(\mathcal{F})$ と $v=(v_n) \in \mathfrak{p}(\mathcal{F})$ に対して，$(v*f)_\infty \in X$ となることを意味する．w-X に対しても事情は同様である．

マルチンゲール変換に課する不等式 (1.2) が成り立つ Banach 関数空間の特徴付けは，次の通りである．以下，C は正定数を表すものとするが，一般にその値は，その都度異なってもよいものとする．

<u>**定理 3.1 ([7]).**</u> X を Ω 上の Banach 関数空間とする．このとき，次の (i)–(v) は互いに同値である:

(i) $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$, $f=(f_n) \in \mathfrak{M}_u(\mathcal{F})$, $v=(v_n) \in \mathfrak{p}(\mathcal{F})$ であれば,

$$\|(v*f)_\infty\|_X \le C\,\|f_\infty\|_X .$$

(ii) $f=(f_n)$, $g=(g_n) \in \mathfrak{M}_u$, $Sg \le Sf$ a.s. であれば,

$$\|g_\infty\|_X \le C\,\|f_\infty\|_X .$$

(iii) $f=(f_n)$, $g=(g_n) \in \mathfrak{M}_u$, $\|Sg\|_X \le \|Sf\|_X$ であれば,

$$\|g_\infty\|_X \le C\,\|f_\infty\|_X .$$

(iv) $f=(f_n) \in \mathfrak{M}_u$ であれば,

$$C^{-1}\,\|f_\infty\|_X \le \|Sf\|_X \le C\,\|f_\infty\|_X .$$

(v) X は再配列不変であるように（同値的に）再ノルム付け可能であり，

$$0 < \alpha_X \quad \text{かつ} \quad \beta_X < 1. \tag{3.1}$$

他方，不等式 (1.3) が成り立つ Banach 関数空間の特徴付けは次の通りである．

定理 3.2. X を Ω 上の Banach 関数空間とする．このとき，次の (i)–(vi) は互いに同値である:

(i) $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$，$f = (f_n) \in \mathfrak{M}_u(\mathcal{F})$，$v = (v_n) \in \mathfrak{p}(\mathcal{F})$ であれば，

$$\|(v * f)_\infty\|_{\text{w-}X} \le C \|f_\infty\|_{\text{w-}X}.$$

(ii) $f = (f_n)$，$g = (g_n) \in \mathfrak{M}_u$，$Sg \le Sf$ a.s. であれば，

$$\|g_\infty\|_{\text{w-}X} \le C \|f_\infty\|_{\text{w-}X}.$$

(iii) $f = (f_n)$，$g = (g_n) \in \mathfrak{M}_u$，$\|Sg\|_X \le \|Sf\|_X$ であれば，

$$\|g_\infty\|_{\text{w-}X} \le C \|f_\infty\|_{\text{w-}X}.$$

(iv) $f = (f_n) \in \mathfrak{M}_u$ であれば，

$$C^{-1} \|f_\infty\|_{\text{w-}X} \le \|Sf\|_{\text{w-}X} \le C \|f_\infty\|_{\text{w-}X}.$$

(v) すべての $t \in [0,1]$ に対して $\overline{\varphi}_X(t) \le C \underline{\varphi}_X(t)$ であり，

$$0 < p_X \quad \text{かつ} \quad q_X < 1. \tag{3.2}$$

(vi) すべての $t \in [0,1]$ に対して $\overline{\varphi}_X(t) \le C \underline{\varphi}_X(t)$ であり，ある定数 $A > 1$ に対して

$$1 < \varliminf_{t \to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} \quad \text{かつ} \quad \varlimsup_{t \to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} < A. \tag{3.3}$$

上記の各条件が成り立つとき，$\text{w-}X = M(\overline{\varphi}_X) = M^*(\overline{\varphi}_X)$ となり，これらの空間の（準）ノルムは互いに同値である．

定理 3.1 と定理 3.2 はよく類似しているが，その本質的な違いは，それぞれの条件 (v) にあることは想像に難くない．実際には，定理 3.1 の (v) が成立すれば定理 3.2 の (v) が成立するが，その逆は正しくない．

4 定理 3.1 と定理 3.2 の比較

定理 3.1 の (v) と定理 3.2 の (v) に於いて，「X が再配列不変であるように再ノルム付け可能である」ことと，「すべての $t \in [0,1]$ に対して $\overline{\varphi}_X(t) \le C \underline{\varphi}_X(t)$ が成り立つ」ことが対応し，(3.1) と (3.2) が対応する．

先ず，前者の対応について考察する．「X が再配列不変であるように再ノルム付け可能」であることを特徴付ける次の命題が，前者の対応を理解する為の鍵になる．

命題 4.1 ([5, Lemma 5.1]). X を Ω 上の Banach 関数空間とする．このとき，次の (i), (ii) は互いに同値である:

(i) 非負確率変数 x, y が同じ分布を持てば，$\|x\|_X \le C\,\|y\|_X$.
(ii) X は再配列不変であるように（同値的に）再ノルム付け可能である．

実際，上記の命題に於いて (ii) が成り立てば (i) が成り立つことは明らかである．逆に (i) が成り立つとき，X 上の汎関数 $|||\cdot|||_X$ を

$$|||x|||_X = \sup\left\{\int_0^1 x^*(s)y^*(s)\,ds \colon y \in X',\ \|y\|_{X'} \le 1\right\}$$

のように定義すれば，$|||\cdot|||_X$ は $\|\cdot\|_X$ と同値な X 上のノルムであり，X が $|||\cdot|||_X$ に関して再配列不変になる．

命題 4.1 によれば，定理 3.1 の (v) に於ける「X は再配列不変であるように再ノルム付け可能」であるという条件は，命題 4.1 の (i) に置き換えることができる．他方，集合 A, $B \in \Sigma$ の指示関数 $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$ が同じ分布を持つということは，$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ が成り立つということであるから，命題 4.1 の (i) を x, y が指示関数の場合に制限すれば，「$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ であれば $\|\mathbb{1}_B\|_X \le C\,\|\mathbb{1}_A\|_X$」という命題になる．これは，「すべての $t \in [0,1]$ に対して $\overline{\varphi}_X(t) \le C\overline{\varphi}_X(t)$」ということに他ならない．斯くて，「$X$ が再配列不変であるように再ノルム付け可能」であるという条件と「すべての $t \in [0,1]$ に対して $\overline{\varphi}_X(t) \le C\underline{\varphi}_X(t)$」であるという条件は，同分布を持つ x, y に対する不等式 $\|x\|_X \le C\,\|y\|_X$ が，それぞれ非負確率変数，及び，集合の指示関数に対して成立するという条件に置き換えられる．当然のことながら，「X が再配列不変であるように再ノルム付け可能」であるという条件の方が真に強い (*cf.* [6, Example 2]).

次に，(3.1) と (3.2) の関係を明らかにしたい．鍵になる結果の 1 つは，Shimogaki の定理である．$L_0(I)$ のある部分空間上の線形作用素 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ を次のように定義する:

$$(\mathcal{P}\phi)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \phi(s)\,ds, \quad (\mathcal{Q}\phi)(t) = \int_t^1 \phi(s)\,\frac{ds}{s}, \quad t \in I.$$

$\mathcal{P}$ の定義域 $D(\mathcal{P})$ は，すべての $t \in I$ に対して区間 $(0,t)$ 上で積分可能な関数の全体であり，$\mathcal{Q}$ の定義域 $D(\mathcal{Q})$ は，すべての $t \in I^\circ = (0,1)$ に対して区間 $(t,1)$ 上で積分可能な関数の全体である．本稿で必要になるわけではないが，$\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ の $L_2(I)$ への制限は，互いに他の随伴作用素であることを注意しておく．Shimogaki の定理を（同氏の研究の後に導入された）Boyd 指標を用いて表現すれば，次のようになる．

Shimogaki の定理 ([11]). X を Ω 上の再配列不変な Banach 関数空間とする．このとき，次の (i), (ii) は互いに同値である:

(i) $\mathcal{P}$（の $\hat{X}$ への制限）は $\hat{X}$ からそれ自身への有界線形作用素である．
(ii) $\beta_X < 1$ である．

また，次の (iii), (iv) は互いに同値である:

(iii) $\mathcal{Q}$（の $\hat{X}$ への制限）は $\hat{X}$ からそれ自身への有界線形作用素である．
(iv) $0 < \alpha_X$ である．

(3.1) と (3.2) の関係を明らかにする為のもう 1 つの鍵になる結果は，次の命題である．その内容を述べる前に，Banach 関数空間 X に対して，必ずしも $\hat{M}^*(\overline{\varphi}_X) \subset D(\mathcal{P})$ とは限らないことに注意を要する．実際，$\overline{\varphi}_{L_1}(t) = t$ であるから，$\phi(t) = 1/t$ と置けば，$\phi \in \hat{M}^*(\overline{\varphi}_{L_1}) \setminus D(\mathcal{P})$ となる．

命題 4.2 (*cf.* [8, Propositions 3.2, 3.4]). X を Ω 上の Banach 関数空間とする．このとき，次の (i), (ii) は互いに同値である:

(i) $\hat{M}^*(\overline{\varphi}_X) \subset D(\mathcal{P})$ であり，$\mathcal{P}$ は $\hat{M}^*(\overline{\varphi}_X)$ からそれ自身への有界線形作用である．
(ii) $q_X < 1$ である．

また，次の (iii), (iv) は互いに同値である:

(iii) $\mathcal{Q}$ は $\hat{M}(\overline{\varphi}_X)$ から $\hat{M}^*(\overline{\varphi}_X)$ への有界線形作用である．
(iv) $0 < p_X$ である．

Shimogaki の定理と命題 4.2 によれば，(3.1) と (3.2) は，いずれも作用素 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ の有界性に関する条件であるということができる．Shimogaki の定理が X の Luxemburg 表現 $\hat{X}$ 上での $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ の有界性に関する結果であることを考慮すれば，命題 4.2 は「w-X の Luxemburg 表現」上での $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ の有界性に関する結果であることが自然である．しかしながら，w-X は再配列不変な Banach 関数空間ではないので，そもそも「w-X の Luxemburg 表現」という概念が定義されない．次の命題は，「w-X の Luxemburg 表現」の代わりになるのが $\hat{M}^*(\overline{\varphi}_X)$ であることを保証する．

命題 4.3 ([6, Lemma 3]). X を Ω 上の Banach 関数空間とする．このとき，次の (i), (ii) は互い同値である:

(i) すべての $t \in [0,1]$ に対して $\overline{\varphi}_X(t) \le C\underline{\varphi}_X(t)$.
(ii) w-$X = M^*(\overline{\varphi}_X)$ であり，これらの空間の準ノルムは同値である．

以上ことから，定理 3.1 と定理 3.2 の間には，きれいな対応が存在することが理解される．最後に，定理 3.2 の (vi) に関する簡単な注意を述べて，本稿を締めくくる．

定理 3.2 の (v) と (vi) の同値性は，次の命題が示す通り，(3.2) が成り立つことと，ある $A > 1$ に対して (3.3) が成り立つことの同値性から導かれる．

命題 4.4 ([9, Propositions 3.2, 3.5]). X を Ω 上の Banach 関数空間とする．

(1) $q_X < 1$ である為の必要十分条件は，ある $A > 1$ に対し $\displaystyle\varlimsup_{t\to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} < A$ となることである．

(2) $0 < p_X$ である為の必要十分条件は，ある $A > 1$ に対し $\displaystyle 1 < \varliminf_{t\to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)}$ となることである．

上記の命題に於ける上極限，下極限に関する不等式は，いずれも $A = 2$ の場合によく目にするものである．例えば，$X = L_p$ $(1 \le p < \infty)$ のとき，$\overline{\varphi}_X(t) = t^{1/p}$ であるから，いかなる $A > 1$ に対しても

$$\varliminf_{t\to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} = \varlimsup_{t\to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} = A^{1/p}$$

となり，$A > 1$ の値の如何に拘わらず，これらの上・下極限は，1 より大きく A より小さい．従って

$A=2$ の場合だけを考えてもよいように思う．実際，$\overline{\varphi}_X(t)$ が本当の凹関数であるような X の場合，ある $A>1$ に対して (3.3) の下極限が 1 より大きく，上極限が A より小さければ，すべての $A>1$ に対してそうである ([9, Appendix])．しかしながら，$\overline{\varphi}_X$ が本当の凹関数にならない X の場合，この限りではない．文献 [9, Appendix] には，

$$\varliminf_{t\to 0+}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}=1,\quad \varlimsup_{t\to 0+}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}=2$$

かつ

$$1<5=\varliminf_{t\to 0+}\frac{\varphi(10t)}{\varphi(t)},\quad \varlimsup_{t\to 0+}\frac{\varphi(10t)}{\varphi(t)}=5<10$$

であるような準凹関数 φ の例が与えられている．この φ に対して，$\overline{\varphi}_X=\varphi$ となるような Banach 関数空間 X は実際に存在する（例えば φ によって生成される Marcinkiewicz 空間など）．このような X は，$A=10$ に対して (3.3) を満たすが，$A=2$ に対しては (3.3) を満たさない．

参考文献

[1] H. Aoyama, *Lebesgue spaces with variable exponent on a probability space*, Hiroshima Math. J. **39** (2009), 207–216.

[2] C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of operators, Academic Press, Boston, 1988.

[3] D. L. Burkholder, *Martingale transforms*, Ann. Math. Statist. **37** (1966), 1494–1504.

[4] M. Kikuchi, *A remark on Doob's inequality in Banach function spaces*, Math. J. Toyama Univ. **21** (1998), 101–109.

[5] M. Kikuchi, *On the Davis inequality in Banach function spaces*, Math. Nachr. **281** (2008), 697–709

[6] M. Kikuchi, *Uniform boundedness of conditional expectation operators on a Banach function space*, Math. Inequal. Appl. **16** (2013), 483–499.

[7] M. Kikuchi, *On some inequalities for martingale transforms in Banach function spaces*, Acta Sci. Math. (Szeged) **80** (2014), 289–306.

[8] M. Kikuchi, *On some martingale inequalities for mean oscillations in weak spaces*, Ricerche Mat. **64** (2015), 137–165.

[9] M. Kikuchi, *On Doob's inequality and Burkholder's inequality in weak paces*, Collect. Math. **67** (2016), 461–483.

[10] S.G. Kreĭn, Yu.I. Petunin, and E.M. Semenov, Interpolation of linear operators (Translated from the Russian), American Mathematical Society, Providence, 1982.

[11] T. Shimogaki, *Hardy-Littlewood majorants in function spaces*, J. Math. Soc. Japan **17** (1965), 365–373.