数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 92-99

増大作用素の零点近似について

千葉大学・法政経学部 青山 耕治
Koji Aoyama
Faculty of Law and Economics,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H06, 47J25.
Keywords and phrases. 増大作用素, 零点, レゾルベント, 強収束定理.

概要

増大作用素の零点近似について最近得られた結果を報告する。

1 はじめに

E を Banach 空間, $A \subset E \times E$ を m-増大作用素とする。本稿では, A の零点を近似的に求めるため, 次のようなアルゴリズムに注目する。

$$\begin{cases} u, x_1 \in E, \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n) J_{\lambda_n} x_n \quad (n \in \mathbb{N}). \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列, $\{\lambda_n\}$ は正の実数列, J_{λ_n} は A のレゾルベント, つまり, $J_{\lambda_n} = (I + \lambda_n A)^{-1}$ である。

m-増大作用素 A の零点近似については, 近接点法 (proximal point algorithm) と呼ばれる次のアルゴリズムがよく知られている。

$$\begin{cases} x_1 \in E, \\ x_{n+1} = J_{\lambda_n} x_n \quad (n \in \mathbb{N}). \end{cases} \tag{1.2}$$

そして, ある仮定のもとで (1.2) により生成される点列 $\{x_n\}$ は A の零点に弱収束することが知られている (例えば, [5, 11, 14, 16, 19] を参照)。一方, たとえ E が Hilbert 空間であったとしても, (1.2) により生成される点列は, 一般には強収束しないことが知られている (例えば, [4, 6] を参照)。

上村–高橋 [8–10] は, [7, 17, 21, 26, 27] などで議論されていた不動点理論の成果と近接点法を融合させ, ある仮定のもとで (1.1) で生成される点列が強収束することを証明した。その後, アルゴリズム (1.1) に関する様々な結果が報告された。例えば, [13, Theorem 4.1], [1, Theorem 4.3], [24, Theorem 5.3] および [20, Theorem 12] は, すべて (1.1) が

強収束することを主張しているが, これらの結果では, 数列 $\{\lambda_n\}$ が ∞ に発散する, または, ある実数に収束するといった条件が仮定されている。

本稿では, $\{\lambda_n\}$ に関するこれらの条件が緩和できること, 具体的には, $\{\lambda_n\}$ については「0 から離れている」という仮定だけで (1.1) の強収束性が示せることを説明する (定理 3.1 および系 3.2)。その後, 主結果の凸最小化問題 (問題 4.1) への応用を述べる (系 4.2)。

2 準備

以下, E を実 Banach 空間, $\|\cdot\|$ を E またはその共役空間 E^* のノルム, $\langle x, x^* \rangle$ を $x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合とする。また, E の点列 $\{x_n\}$ が $x \in E$ に収束することを $x_n \to x$ で表す。

E の双対写像 (duality mapping) を J で表す。つまり, J は E から E^* への集合値写像で, $x \in E$ のとき, $Jx = \left\{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}$ である。

S を E の単位球面, つまり, $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とする。E のノルム $\|\cdot\|$ が Gâteaux 微分可能であるとは, すべての $x, y \in S$ に対して, 極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

が存在するときをいう。E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは, 各 $y \in S$ に対して (2.1) が x に関して一様に収束するときをいう。E のノルムが Gâteaux 微分可能であることと, 双対写像 J が 1 価であることは同値になることが知られている。また, E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能ならば, J は E の有界集合上で一様連続 (norm-to-weak*) であることが知られている。詳しくは, [22] を参照するとよい。

C を E の空でない部分集合, T を C から E への写像, $\mathrm{F}(T)$ を T の不動点の集合とする。写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$ が成り立つときをいう。K を C の空でない部分集合とし, Q を C から K の上への写像とする。Q が C から K の上への retraction であるとは, すべての $x \in K$ に対して $Qx = x$ が成り立つときをいう。Q が sunny であるとは,

$$x \in C,\ \lambda \ge 0,\ Qx + \lambda(x - Qx) \in C \Rightarrow Q\bigl(Qx + \lambda(x - Qx)\bigr) = Qx$$

が成り立つときをいう。K が C の sunny nonexpansive retract であるとは, C から K の上への sunny nonexpansive retraction [15] が存在するときをいう。

A を E から E への集合値写像とする。このとき, A とそのグラフを同一視し, $A \subset E \times E$ と表す。A の定義域を $\mathrm{D}(A)$ で, A の値域を $\mathrm{R}(A)$ で, A の零点の集合を $A^{-1}0$ で

表す。つまり, $\mathrm{D}(A) = \{x \in E : Ax \neq \emptyset\}$, $\mathrm{R}(A) = \bigcup_{x \in \mathrm{D}(A)} Ax$ および $A^{-1}0 = \{x \in \mathrm{D}(A) : Ax \ni 0\}$ である。集合値写像 $A \subset E \times E$ が増大 (accretive) 作用素であるとは, $x, y \in \mathrm{D}(A)$, $u \in Ax$ および $v \in Ay$ に対して, $\langle u - v, j \rangle \geq 0$ となる $j \in J(x - y)$ が存在するときをいう。増大作用素 $A \subset E \times E$ が m-増大であるとは, すべての $\lambda > 0$ に対して $\mathrm{R}(I + \lambda A) = E$ が成り立つときをいう. ここで, I は E 上の恒等写像である。

註 1 ([3, Remark 2.4]). E をそのノルムが一様に Gâteaux 微分可能な一様凸 Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合, $A \subset E \times E$ を増大作用素とし, すべての $\lambda > 0$ に対して $\overline{\mathrm{D}(A)} \subset C \subset \mathrm{R}(I + \lambda A)$ が成り立つと仮定する。ここで, $\overline{\mathrm{D}(A)}$ は $\mathrm{D}(A)$ の閉包である。このとき, $A^{-1}0$ は C の sunny nonexpansive retract であることが知られている。

$A \subset E \times E$ を増大作用素, I を E 上の恒等写像, λ を正の数とする。このとき, $(I + \lambda A)^{-1}$ は $\mathrm{R}(I + \lambda A)$ から $\mathrm{D}(A)$ の上への 1 価写像であることが知られており, 写像 $(I + \lambda A)^{-1}$ を A のレゾルベント (resolvent) といい, J_λ で表す。J_λ は非拡大であり, $\mathrm{F}(J_\lambda) = A^{-1}0$ となることが知られている ([22] を参照)。

[2, Lemma 2.5] より, 増大作用素のレゾルベントの列は次の性質を持つことがわかる。次節で述べる主結果 (定理 3.1) の証明において, この性質は重要な役割を演ずる。

補助定理 2.1. E, C, A を註 1 と同じとし, $\{\rho_n\}$ を正の数列とし, $A^{-1}0$ は空ではなく, ある $w \in A^{-1}0$ について $\|z_n - w\| - \|J_{\rho_n} z_n - w\| \to 0$ とする。このとき, $z_n - J_{\rho_n} z_n \to 0$ である。

3 主結果とそれより導かれる結果

この節では, E をそのノルムが一様に Gâteaux 微分可能な一様凸 Banach 空間とする。次の定理は, 本稿の主結果である。

定理 3.1 ([3, Theorem 3.1]). C を E の空でない閉凸集合, $A \subset E \times E$ を増大作用素, $\{\alpha_n\}$ を $(0, 1]$ の数列, $\{\lambda_n\}$ を正の数列とする。$A^{-1}0$ は空ではなく, すべての $\lambda > 0$ に対して $\overline{\mathrm{D}(A)} \subset C \subset \mathrm{R}(I + \lambda A)$ であり, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\alpha_n \to 0$ および $\inf_n \lambda_n > 0$ を仮定する。ここで, $\overline{\mathrm{D}(A)}$ は $\mathrm{D}(A)$ の閉包で, I は E 上の恒等写像である。u を C の点, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) J_{\lambda_n} x_n \tag{3.1}$$

で定義する。ここで, $J_{\lambda_n} = (I + \lambda_n A)^{-1}$ である。このとき, $\{x_n\}$ は Qu に強収束する。

ここで, Q は C から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

m-増大作用素のレゾルベントは, E から E への写像であるから, 定理 3.1 より直ちに, 次の系が得られる。

系 3.2. E, $\{\alpha_n\}$, $\{\lambda_n\}$ を定理 3.1 と同じとし, $A \subset E \times E$ を m-増大作用素とし, $A^{-1}0$ は空ではないと仮定する。u を E の点とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in E$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して (3.1) で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は Qu に強収束する。ここで, Q は E から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

註 2. [10, Theorem 2] と系 3.2 を大雑把に比較すると, $\{\alpha_n\}$ については [10, Theorem 2] の方が弱く, $\{\lambda_n\}$ については系 3.2 の方が弱い。また, ここでは E が一様凸であること仮定しているが, [10, Theorem 2] の結論は, それよりも弱い仮定のもとで得られることが知られている。

系 3.2 を使うと, 次の結果が得られる。このような収束定理は, [28] などで議論されている。

系 3.3. E, A, $\{\alpha_n\}$, $\{\lambda_n\}$ および Q を系 3.2 と同じとする。u を E の点とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in E$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = J_{\lambda_n}\big(\alpha_n u + (1-\alpha_n)x_n\big)$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は Qu に強収束する。

証明. $y_n = \alpha_n u + (1-\alpha_n)x_n$ とおくと, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$y_{n+1} = \alpha_{n+1}u + (1-\alpha_{n+1})x_{n+1} = \alpha_{n+1}u + (1-\alpha_{n+1})J_{\lambda_n}y_n$$

となる。よって, 系 3.2 より, $y_n \to Qu$ である。一方, 仮定より, $x_n - y_n \to 0$ であるから, $x_n \to Qu$ が示せた。 □

註 3. [25, Theorem 2] は, 系 3.3 と似た結果であるが, その証明は完全でないように思われる。実際, [25, Theorem 2] の証明中の式 (8) が成り立つことは明らかではないだろう。

4 凸最小化問題への応用

この節では, 前節の結果を次のような凸最小化問題へ応用する。

問題 4.1. H を実 Hilbert 空間, f を H から $(-\infty, \infty]$ への下半連続な真凸関数, つまり, $f(x) < \infty$ となる $x \in H$ が存在し, すべての実数 α に対して $\{x \in H : f(x) \leq \alpha\}$ が H の閉集合で, 任意の $x, y \in H$ と $\lambda \in (0,1)$ に対して $f\bigl(\lambda x + (1-\lambda)y\bigr) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ が成り立つとする。このとき, すべての $y \in H$ に対して $f(z) \leq f(y)$ となる $z \in H$ を求めよ。

この問題の解の集合を $\arg\min\{f(y) : y \in H\}$ で表す。

問題 4.1 の解を近似するために, ここでは f の劣微分 (subdifferential) を使う。f の劣微分 ∂f とは, $x \in H$ に対して

$$\partial f(x) = \{w \in H : f(y) \geq f(x) + \langle y - x, w \rangle \, \forall y \in H\}$$

で定義される H から H への集合値写像である。問題 4.1 の仮定のもとで, $0 \in \partial f(z)$ と $z \in \arg\min\{f(y) : y \in H\}$ が同値である。さらに, ∂f は極大単調作用素 (maximal monotone operator) であることが知られている ([12] または [18] を参照)。ここで, 集合値写像 $A \subset H \times H$ が単調 (monotone) であるとは, 任意の $x, y \in \mathrm{D}(A)$, $u \in Ax$, $v \in Ay$ に対して $\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$ が成り立つときをいう。また, 集合値写像 $A \subset H \times H$ が極大単調であるとは, A が単調で,

$$B \subset H \times H \text{ が単調で } A \subset B \text{ ならば } A = B$$

が成り立つときをいう. 集合値写像 $A \subset H \times H$ が m-増大であることと, A が極大単調であることは同値となることが知られている (例えば, [23] を参照)。

系 3.2 より, 次の結果が得られる。

系 4.2. H と f を問題 4.1 と同じとし, $\{\alpha_n\}$ を $(0,1]$ の数列, $\{\lambda_n\}$ を正の数列とし, 問題 4.1 の解が存在し, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\alpha_n \to 0$ および $\inf_n \lambda_n > 0$ を仮定する。さらに, u を H の点とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in H$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = \arg\min\left\{ f(z) + \dfrac{\|z - x_n\|^2}{2\lambda_n} : z \in H \right\}, \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) y_n \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は u からもっとも近い $\arg\min\{f(y) : y \in H\}$ の点に強収束する。

証明. 仮定より, ∂f は m-増大であり, $(\partial f)^{-1} 0 = \arg\min\{f(y) : y \in H\}$ であることが

わかる。I を H 上の恒等写像とする。すべての $n \in \mathbb{N}$ および $x \in H$ に対して

$$\left(I + \lambda_n(\partial f)\right)^{-1} x = \arg\min \left\{ f(z) + \frac{\|z - x\|^2}{2\lambda_n} : z \in H \right\}$$

であり, H から $(\partial f)^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction は H から $(\partial f)^{-1}0$ の上への距離射影であることが知られている ([23] を参照)。したがって, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n)\left(I + \lambda_n(\partial f)\right)^{-1} x_n$ が成り立ち, 系 3.2 から結論が得られる。 $\square$

参考文献

[1] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2350–2360.

[2] ———, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed point theory and its applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2008, pp. 1–18.

[3] K. Aoyama and M. Toyoda, *Approximation of zeros of accretive operators in a banach space*, Israel J. Math., to appear.

[4] H. H. Bauschke, E. Matoušková, and S. Reich, *Projection and proximal point methods: convergence results and counterexamples*, Nonlinear Anal. **56** (2004), 715–738.

[5] H. Brézis and P.-L. Lions, *Produits infinis de résolvantes*, Israel J. Math. **29** (1978), 329–345.

[6] O. Güler, *On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J. Control Optim. **29** (1991), 403–419.

[7] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.

[8] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[9] ———, *Iterative schemes for approximating solutions of accretive operators in Banach spaces*, Sci. Math. **3** (2000), 107–115 (electronic).

[10] ———, *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications*, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361–374.

[11] B. Martinet, *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives*, Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle **4** (1970), 154–158.

[12] J.-J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace hilbertien*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 273–299.

[13] K. Nakajo, *Strong convergence to zeros of accretive operators in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **7** (2006), 71–81.

[14] O. Nevanlinna and S. Reich, *Strong convergence of contraction semigroups and of iterative methods for accretive operators in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 44–58.

[15] S. Reich, *Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **44** (1973), 57–70.

[16] ———, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[17] ———, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 287–292.

[18] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math. **17** (1966), 497–510.

[19] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), 877–898.

[20] S. Saejung, *Halpern's iteration in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **73** (2010), 3431–3439.

[21] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3641–3645.

[22] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000. Fixed point theory and its applications.

[23] ———, *Introduction to nonlinear and convex analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.

[24] ———, *Viscosity approximation methods for countable families of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **70** (2009), 719–734.

[25] C. Tian and Y. Song, *Strong convergence of a regularization method for Rockafellar's proximal point algorithm*, J. Global Optim. **55** (2013), 831–837.

[26] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. (Basel) **58** (1992), 486–491.

[27] H.-K. Xu, *Iterative algorithms for nonlinear operators*, J. London Math. Soc. (2) **66** (2002), 240–256.

[28] ———, *A regularization method for the proximal point algorithm*, J. Global Optim. **36** (2006), 115–125.