数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 209-212

HILBERT REPRESENTATIONS OF QUIVERS (箙のヒルベルト表現)

綿谷　安男 (WATATANI, YASUO)　九大数理

ABSTRACT. Hilbert 空間上に作用する作用素の族を有向グラフ (quiver) にそって表したものを quiver のヒルベルト表現といい、その中で二つの直和に分かれないようなものを直既約表現という。表現の準同型環がスカラーになるものを推移的な表現という。これらの quiver のヒルベルト表現のクラスとディンキン図形との関連について今までの研究の survey をおこなう。これは、榎本氏との共同研究である。

1. QUIVER の直既約ヒルベルト表現

Quiver(箙) とは有向グラフのことである。その頂点にヒルベルト空間を対応させ、その辺に有界作用素を対応させることを考える。これを quiver のヒルベルト表現 (Hilbert representations of quivers) とよぼう [1], [2], [3], [4]。

Definition 1.1. $\Gamma = (V, E, s, r)$ が、quiver(箙) であるとは、集合 V が頂点集合で、集合 E が辺集合で、s, r が E から V への写像で、$\alpha \in E$ に対して、$s(\alpha) \in V$ が α の始点 であり、$r(\alpha) \in V$ が、α の終点であるものと指定するものである。つまり、箙 (quiver) とは有向グラフのことである。

例えば Kronecker quiver $K_2 = (V, E, s, r)$ とは、2 個の頂点の間を同じ向きの辺がある quiver である。つまり $V = \{1, 2\}$, $E = \{\alpha, \beta\}$,$s(\alpha) = 1, s(\beta) = 1$, $r(\alpha) = 2, r(\beta) = 2$ なるものである：

$$K_2 : 1 \rightrightarrows 2$$

Definition 1.2. ひとつの組 (H, f) が、quiver Γ のヒルベルト表現であるとは、$H = (H_v)_{v \in V}$ は、頂点を足にもつヒルベルト空間の族で、$f = (f_\alpha)_{\alpha \in E}$ は、辺に足をもつ有界線形作用素の族で、f_α は $H_{s(\alpha)}$ から、$H_{r(\alpha)}$ への作用素になっているものである。quiver Γ の 2 つのヒルベルト表現 (H, f) と (K, g) に対して、$\phi : (H, f) \to (K, g)$ が準同型写像とは、$\phi = (\phi_v)_v$ は有界線形作用素 $\phi_v : H_v \to K_v$ $(v \in V)$ の族で、

$$\phi_{r(\alpha)} f_\alpha = g_\alpha \phi_{s(\alpha)} (\alpha \in E)$$

をみたすものである。$Hom((H, f), (K, g))$ を、(H, f) から (K, g) への準同型写像全体とする。$Hom((H, f), (H, f))$ を, $End(H, f)$ と書く。QuiverΓ のヒルベルト表現 (H, f) と (K, g) が同型とは、ある同型写像 $\phi : (H, f) \to (K, g)$ が存在することである。

Definition 1.3. QuiverΓ の 2 つのヒルベルト 表現 (K, g) と (K', g') に対して、その直和 (H, f) を、$H_v = K_v \oplus K'_v (v \in V)$, $f_\alpha = g_\alpha \oplus g'_\alpha (\alpha \in E)$ で定義する。Quiver Γ のヒルベルト表現 (H, f) が直既約 (indecomposable) とは、(H, f) が非自明な直和にかけないことである。

Definition 1.4. Quiver Γ のヒルベルト表現 (H,f) が推移的（transitive）とは、$End(H,f) = \mathbb{C}I$ のことである。

Quiver Γ のヒルベルト表現 (H,f) が推移的（transitive）なら直既約（indecomposable）である。しかし、逆は成立しない。

S を $K = \ell^2(N)$ 上の片側シフトとする。K の基底を $e_1, e_2, ...$ とする。$\lambda = (\lambda_i)_i \in \ell^\infty(N)$ を、$\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$ を満たすものとする。 $w = (w_i)_i \in \ell^2(N)$ を、$w_n \neq 0$(任意の $n \in N$) を満たすものとする。 $\theta_{e_1,w}$ をランク 1 の作用素とする。Kronecker quiverK_2 のヒルベルト表現 (H,f) を、$H_1 = H_2 = K, f_\alpha = S, f_\beta = SD_\lambda + \theta_{e_1,w}$ とおく。このとき、このヒルベルト表現 (H,f) は transitive である。しかし、この Kronecker quiver K_2 の下の辺の向きづけを変えた次のような quiver $\Gamma = (V,E,s,r)$ を考える。つまり $V = \{1,2\}$, $E = \{\alpha,\beta\}$,$s(\alpha) = 1, s(\beta) = 2$, $r(\alpha) = 2, r(\beta) = 1$ なるものである：

$$\Gamma : 1 \rightleftarrows 2$$

この quiver の向きづけを忘れるとこれは拡大ディンキン図形 $\tilde{A}_2$ になる。

Theorem 1.5. *(榎本-綿谷）この quiver* Γ

$$\Gamma : 1 \rightleftarrows 2$$

には、無限次元の transitve なヒルベルト表現が存在しない。

もっと一般に次のことが成立する。

Theorem 1.6. *(榎本-綿谷）Γ を有限個の頂点からなる連結な quiver とする。*
(1) もし向きづけを忘れた無向グラフ $|\Gamma|$ が拡大ディンキン図形 $\tilde{D}_n$ $(n \geq 4), \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ のどれかを含むならば、向きづけに関わらず transitve な無限次元ヒルベルト表現が存在する。
(2) もし向きづけを忘れた無向グラフ $|\Gamma|$ が拡大ディンキン図形 $\tilde{A}_n$ ならば、transitve な無限次元ヒルベルト表現が存在するための必要十分条件は Γ が oriented cyclic quiver でないことである。

2. Path algebras

有限の quiver$\Gamma = (V,E,s,r)$ に対する path algebra（道環）$\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ を定義し、quiver Γ のヒルベルト表現 と path algebra$\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ の表現が自然に対応するようにしよう。

Definition 2.1. $\Gamma = (V,E,s,r)$ を有限の quiver とする。$\Gamma = (V,E,s,r)$ 上の長さが n の path $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ とは n 個の辺 $\alpha_i \in E, i = 1,\cdots,n$ の組で連結可能なもののことである。ここで連結可能とは $s(\alpha_i) = r(\alpha_{i+1}), \alpha_i \in E$, としておく。特に長さが 0 の path は頂点そのものと解釈しておく。長さが n の path 全体を $Path_n(\Gamma)$ とかくと、$Path_0(\Gamma) = V$,$Path_1(\Gamma) = E$ となる。さらに path 全体を

$$Path(\Gamma) = \cup_{n=0}^{\infty} Path_n(\Gamma)$$

であらわす。paths $\gamma \in Path(\Gamma)$ を不定元とするベクトル空間を $\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ とする。

$$\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle = \{ \sum_{\gamma \in Path(\Gamma)} a_\gamma e_\gamma \mid , a_\gamma \in \mathbb{C}, \ \{\gamma ; a_\gamma \neq 0\} \text{ is finite}\}.$$

さらに path の連結 (concatenation) を使って、$\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ は algebra になる。 つまり、二つの paths $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ と $\beta = \beta_1\beta_2\cdots\beta_m$ に対して、もし $s(\alpha(n)) = r(\beta(1))$ なら連結可能で、このときその連結は

$$\alpha\beta = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\beta_1\beta_2\cdots\beta_m$$

とする。このとき、積を

$$e_\alpha e_\beta = e_{\alpha\beta}$$

とし、もし $s(\alpha(n)) \neq r(\beta(1))$ のときは $e_\alpha e_\beta = 0$ とするということである。このようにしてつくられた algebra $\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ を quiver Γ に対する path algebra と呼ぶ。単位元は $I = \Sigma_{v\in V} e_v$ であり、各 e_v は巾等元になるので、これは単位元の分解とみることができる。

さて、この path algebra $\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ の Hilbert 表現 π とは、H_π が Hilbert 空間で $\pi : \mathbb{C}\langle\Gamma\rangle \to B(H_\pi)$ は unital algebra homomorphism で、さらに、すべての頂点 $v \in V$ に対して $\pi(e_v)$ が射影になるもののことである。こう仮定しなくても、similarity を除いてこの形にできるので、問題はない。

このようにすることで、quiver Γ の Hilbert 表現と path algebra $\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ の Hilbert 表現が自然に対応することはほぼ明らかになる。

Proposition 2.2. *(榎本-綿谷)* $\Gamma = (V, E)$ を有限 *quiver* とすると Γ のヒルベルト表現全体

$$Hil(\Gamma) = \{(H, f); (H, f) \textit{is a Hilbert representation of}\, \Gamma\}$$

と *path algebra*$\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ の *Hilbert* 表現全体

$$Rep(\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle) = \{\pi; \pi \textit{is a Hilbert representation of}\, \mathbb{C}\langle\Gamma\rangle\}$$

の間には次のように作用素行列を使った $1:1$ 対応がある:Γ のヒルベルト表現 (H, f) に対しては *path algebra*$\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ の *Hilbert* 表現 π を次で構成する。

$$H_\pi := \oplus_{v\in V} H_v.$$

頂点 $v \in V$ に対しては、H_π から H_v への射影を $\pi(e_v)$ とする。辺 $\alpha \in E$ に対しては、作用素行列 $\pi(e_\alpha)$ を $r(e) - s(e)$ 成分が f_α でその他の成分は 0 とすることできめる。一般の *path* $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \in Path_n(\Gamma)$ に対しては、

$$\pi(\alpha) = \pi(\alpha_1)\pi(\alpha_2)\cdots\pi(\alpha_n)$$

とすればよい。

Example. 最も簡単な場合をかくが、一般もほぼ同じことである。辺が 1 個の quiver$\Gamma = (V, E)$ を $V = \{1, 2\}$, $E = \{\alpha\}$, $s(\alpha) = 1, r(\alpha) = 2$ できめる。(H, f) を Γ の Hilbert 表現とすると $f_\alpha \in B(H_1, H_2)$ になっている。このとき、$H_\pi = H_1 \oplus H_2$ で $\pi(e_i) = P_i$ は H_π から H_i への射影であり、作用素表現は

$$\pi(e_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_\alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

この 1:1 対応により、quiver Γ の Hilbert 表現が indecomposable であることや transitive であることが path algebra $\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ の Hilbert 表現のことばで表せる。

Proposition 2.3. *(榎本-綿谷)* $\Gamma = (V, E)$ を有限 *quiver* とする。Γ のヒルベルト表現 (H, f) に対応する *path algebra* $\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ の *Hilbert* 表現を π とする。すると、準同型環 $End(H, f)$ は可換子環 $\pi(\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle)'$ と同型になる。 さらに、Γ のヒルベルト表現 (H, f) が *transitive* であることは $\pi(\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle)' = \mathbb{C}$　であることは同値である。Γ のヒルベルト表現 (H, f) が *indecomposable* であることは $\pi(\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle)'$ の巾等元が $0, I$ しかないことと同値である。

References

[1] M. Enomoto and Y. Watatani, *Relative position of four subspaces in a Hilbert space,* Adv. Math. **201** (2006), 263-317.

[2] M. Enomoto and Y. Watatani, *Indecmposable representations of quivers of quivers on infinite-dimensional Hilbert spaces,* J. Func. Anal. **256** (2009), 959-991.

[3] M. Enomoto and Y. Watatani, *Strongly irreducible operators and indecomposable representations quivers on infinite-dimensional Hilbert spaces*, Integral equations and operator theory, **83**(2015),563-587.

[4] M. Enomoto and Y. Watatani, *Unbounded strongly irreducible operators and transitive representations of quiverson infinite-dimensional Hilbert spaces,* preprint.

(Yasuo Watatani) Department of Mathematical Sciences, Kyushu University, Motooka, Fukuoka, 819-0395, Japan