数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 213-216

高階微分環の BSE-拡大と乗作用素環について

高橋　眞映
Sin-Ei Takahasi
Laboratory of Mathematics and Games
sin_ei1@yahoo.co.jp

井上　純治
Jyunji Inoue
Department of Mathematics, Faculty of Science, Hokkaido University
rqstw4a1@xk9.so-net.ne.jp

概要

これは高次元 Euclid 空間上のある種の高階微分環の BSE-拡大及び乗作用素環に関する速報である。この高階微分環の BSE-拡大は同じ Euclid 空間上のある種の Lipschitz 環によって特徴づけられる事が示される。またそのような高階微分環の乗作用素環が明らかにされる。

1. 動機

一変数関数の微分は多変数関数では全微分として自然に定義され、偏微分の概念が自然に生まれる。勿論偏微分から全微分も定義され、大雑把に言えば多変数関数の微分は偏微分である。それ故一変数関数の微分構造はある程度多変数関数の微分構造に遺伝する。同じような事が微分環の BES 構造にも起こるのである。最も簡単な $\mathbf{R}$ 上の微分環 $C_0^1(\mathbf{R})$ は自然に d 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^d$ 上の高階微分環 $C_0^n(\mathbf{R}^d)$ に拡張される。井上-高橋 [4] は $C_0^1(\mathbf{R})$ の BSE-拡大は $\mathbf{R}$ 上の Lipschitz 環 $\mathrm{Lip}_1(\mathbf{R})$ に等しく、乗作用素環 (multiplier algbera) は微分環 $C_b^1(\mathbf{R})$ に等しい事を示した。実はこの問題は第一筆者が BSE-環を考えた 1985 年頃あるセミナーで薮田公三先生に微分環 $C^1([0,1])$ の BSE-拡大は何かと問われた事に端を発する。それでは高階微分環 $C_0^n(\mathbf{R}^d)$ についてはどうなのかと言う自然な問題が提起される。答えは「同じ様に遺伝する」が本論文の結論である。

2. 準備と目的

局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の自然な Banach 関数環 (natural Banach function algebra) A を考える。従って X と A の Gelfand 空間 Φ_A は同一視出

来るので、X を A の双対空間 A^* の部分集合とみて、X の線形包 span(X) の任意の元 p は

$$p = \sum_{x \in X} \widehat{p}(x)x$$

と一意に表現される。但し $\widehat{p}$ は有限の台を持つ X 上の複素数値関数である。

さて空間 X 上の有界な複素数値連続関数の作る可換 C*-環を $C_b(X)$ で表し、更に $C_b(X)$ に属する関数で無限遠点で消えるもの全体を $C_0(X)$ で表す。

関数 $\sigma \in C_b(X)$ は次の条件を満たすとき A に関する BSE-関数と言う：

$$\exists\beta > 0 : \left|\sum_{x \in X} \widehat{p}(x)\sigma(x)\right| \leq \beta \|p\|_{A^*} \ (\forall p \in \mathrm{span}(X)).$$

更にそのような β の下限は $\|\sigma\|_{BSE(A)}$ で表され、σ の BSE-norm と呼ばれる。これは混乱が生じない限り単に $\|\sigma\|_{BSE}$ と書かれる。空間 X 上の A に関する BSE-関数の全体を $C_{BSE(A)}(X)$ で表すと、これは norm $\| \ \|_{BSE}$ のもとで半単純可換 Banach 環になる事が知られている (see [8])。我々はこれを A の BSE-拡大と呼び、混乱が生じない限り単に A_{BSE} で表す。また関数 $\sigma \in C_b(X)$ が次の条件を満たすとき、A の乗作用素 (multiplier) と言う：

$$\sigma f \in A \ (\forall f \in A).$$

Banach 環 A の乗作用素全体は $M(A)$ で表され、これは単位的半単純可換 Banach 環をつくる。それ故これは A の乗作用素環 (multiplier algbera) と呼ばれる。もし $M(A) = C_b(X)$ が成り立つならば、A は I 型であると言い、そうでないとき II 型であると言う。勿論 II 型 Banach 環は同型を除いて沢山あるが、I 型 Banach 環も自明なもの (可換 C*-環) の他に同型を除いて沢山あることが知られている (see [9])。

もし $M(A) = A_{BSE}$ が成り立つならば、A は BSE-環であると言う。局所コンパクト可換群上の Fourier 環は BSE-環である。これは調和解析における Bochner-Shoenberg-Eberlein theorem として知られている (cf. [7])。勿論 BSE-環やそうでない半単純可換 Banach 環は沢山あることが知られている (cf. [4, 5])。

実は 1980 年後半 I 型 BSE-環は可換 C*-環だけかと予想したのであるが、その後第二筆者により簡単な Segal 環でどんな可換 C*-環にも同型でない I 型 BSE-環が発見された。その後だいぶ経って、それを少し一般化した論文がごく最近 accept されたが、この論文 [6] に端を発し、最近 I 型 Banach 環の分類問題が認識されている (see [9])。

所で BSE-拡大に関する一般的な特徴付けは [8] の中で次の様に与えられている：

Theorem 1. *Let X be a locally compact Hausdorff space and A a natural Banach function algebra on X. Then*

(i) *A_{BSE} equals the set of all $\sigma \in C_b(X)$ for which there exists a bounded net $\{f_\lambda\}$ in A with $\lim_\lambda f_\lambda(x) = \sigma(x)$ for all $x \in X$.*

(ii) *$A_{BSE} = C_b(X) \cap A^{**}|X$ holds, where A^{**} denotes the second dual of A.*

本論文の目的は高次元 Euclid 空間上のある種の微分環の BSE-拡大及び乗作用素環を明らかにする事にある。これは上の Theorem 1 を応用することによってなされる。

3. 主定理

次元 d の Euclid 空間 $\mathbf{R}^d$ 及び自然数 n を考え、次の条件を満たす $\mathbf{R}^d$ 上の有界な C^n-関数 f の全体を $C_b^n(\mathbf{R}^d)$ で表す：

$$\left\|\frac{\partial^m f}{\partial x_1 \cdots \partial x_{i_m}}\right\|_\infty < \infty \ (1 \le \forall i_1, \cdots, \forall i_m \le d, 1 \le \forall m \le n).$$

但し $\| \ \|_\infty$ は $\mathbf{R}^d$ 上の supremum norm を表す。このとき各関数 $f \in C_b^n(\mathbf{R}^d)$ に対して、

$$\|f\|_{n,\infty} = \|f\|_\infty + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{1 \le i_1, \cdots, i_m \le d} \left\|\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}}\right\|_\infty$$

と定義すると、$C_b^n(\mathbf{R}^d)$ は $\| \ \|_{n,\infty}$ を norm として $\mathbf{R}^d$ 上の単位的 Banach 関数環となる。また次の条件を満たす $C_b^n(\mathbf{R}^d)$ に属する関数 f の全体を $C_0^n(\mathbf{R}^d)$ で表す：

$$f, \ \frac{\partial^m f}{\partial x_1 \cdots \partial x_{i_m}} \in C_0(\mathbf{R}^d) \ (1 \le \forall i_1, \cdots, \forall i_m \le d, 1 \le \forall m \le n).$$

これは $C_b^n(\mathbf{R}^d)$ の閉 ideal となる。また $C_0^n(\mathbf{R}^d)$ の Gelfand 空間は $\mathbf{R}^d$ と同一視されるので、$C_0^n(\mathbf{R}^d)$ は $\mathbf{R}^d$ 上の自然な Banach 関数環となる。

次に $\mathbf{R}^d$ 上の関数 f に対して、その Lipschitz 定数：

$$\rho(f) = \sup_{\substack{x,y \in X \\ x \ne y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}$$

を考える。このとき

$$\mathrm{Lip}_1(\mathbf{R}^d) = \{f \in C_b(\mathbf{R}^d) : \rho(f) < \infty\}$$

と定義すると、$\mathrm{Lip}_1(\mathbf{R}^{\mathrm{d}})$ は norm

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_1} = \|f\|_\infty + \rho(f)$$

のもとで $\mathbf{R}^d$ 上の単位的 Banach 関数環となる。次に $n \ge 2$ の場合には、以下の条件を満たす $\mathbf{R}^d$ 上の $C_b^{n-1}(\mathbf{R}^d)$ に属する関数 f の全体を $\mathrm{Lip}_n(\mathbf{R}^d)$ で表す：

$$\rho\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{n-1}}}\right) < \infty \ (1 \le \forall i_1, \cdots, \forall i_{n-1} \le d).$$

このとき各関数 $f \in \mathrm{Lip}_n(\mathbf{R}^d)$ に対して、

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_n} = \|f\|_{n-1,\infty} + \rho(f) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} \sum_{1 \le i_1, \cdots, i_m \le d} \rho\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}}\right)$$

と定義すると、$\mathrm{Lip}_n(\mathbf{R}^d)$ は $\| \ \|_{\mathrm{Lip}_n}$ を norm として $\mathbf{R}^d$ 上の単位的 Banach 関数環となる。

次は我々の主定理である。

Theorem 2. *$C_0^n(\mathbf{R}^d)_{BSE} = \mathrm{Lip}_n(\mathbf{R}^d)$ and $M(C_0^n(\mathbf{R}^d)) = C_b^n(\mathbf{R}^d)$.*

上の主定理は本論文の目的である d-次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^d$ 上の微分環 $C_0^n(\mathbf{R}^d)$ の BSE-拡大及び乗作用素環を明らかにしている。

最後に次の事に注意する。

(1) 実は norms $\|\ \|_{n,\infty}$ 及び $\|\ \|_{\mathrm{Lip}_n}$ はそれぞれ同値な新しい norm を定義することによって、複雑な計算が大幅に緩和される事が分かっている。

(2) 主定理から $C_0^n(\mathbf{R}^d)$ は II 型 Banach 環であるが、BSE-環ではない事が分かっている。今後 BED-環であるかどうかの検証が必要となる。BED-環については [4] を参照されたい。

(3) 知るところでは [1, 2, 3] 等に高階微分環に関する研究がなされているが、何れも BSE-拡大や乗作用素環の研究という捉え方をしていない。

(4) X を $\mathbf{R}^d$ の開部分集合とするとき、$C_b^n(X), C_0^n(X), \mathrm{Lip}_n(X)$ 及びそれらの norms は上と同様に定義される。しかしこれらについて主定理と同じ結果が得られるかどうかは現在不明である。

最後にこの速報は証明をつけないで結果だけを述べたものである故、近い将来詳細な原稿を準備し、何れ何処かの雑誌に投稿するつもりである。

References

[1] J.T. Daly and P. B. Downum, A Banach Algebra of Functions with Bounded n-th Differences, Trans. Math. Soc. Vol.223(1976), pp.279-294.

[2] C. L. Fefferman, A sharp form of Whitney's extension theorem, Ann. Math.,162(2005), 509-577.

[3] C. L. Fefferman, A Generalized sharp Whitney Theorem for Jets, Rev. Mat. Iberoameeicana 21(2005), no.2, 577-688.

[4] J. Inoue and S.-E. Takahasi, On characterizations of the image of the Gelfand transform of commutative Banach algebras, Math. Nachr., 280 (2007), 105-126.

[5] J. Inoue and S.-E. Takahasi, Segal algebras in commutative Banach algebras, Rocky Mountain J. Math., 44-2 (2014), 539-589.

[6] J. Inoue and S.-E. Takahasi, A construction of a BSE-algebra of type I which is isomorphic to no C*-algebras, to appear in Rocky Mountain J. Math.

[7] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience Publishers, Inc., New York, 1962.

[8] S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein type-theorem, Proc. Amer. Math. Soc., 110-1 (1990), 149-158.

[9] S.-E. Takahasi, T. Miura, H. Takagi and J. Inoue, A Lau algebras defined by semisimple commutative Banach algebras of type I, to appear in RIMS Kôkyurôku.