数理解析研究所講究録
第2045巻 2017年 100-116

A characterization of the L^2-range of the Poisson transform with real and singular spectral parameter on symmetric spaces of noncompact type

学習院大学 理学部 貝塚 公一 *
(Koichi Kaizuka
Faculty of Science, Gakushuin University)

1 序

非コンパクト型対称空間 $X = G/K$ の境界 $B = K/M$ 上の L^2-関数に対する Poisson 変換の像の特徴付けについて考察する. 非コンパクト型対称空間上の不変微分作用素に対する同時固有関数の特徴付けに関して, これまで様々な結果が得られている. Helgason [5] は, 非コンパクト型対称空間上の任意の同時固有関数は, 境界 B 上の解析的汎関数の Poisson 変換による像として特徴付けられることを予想した (Helgason 予想 (あるいは Helgason-岡本予想) と呼ばれる). この予想は Kashiwara et al. [12] により肯定的に解決された. その後, 境界 B 上の様々な関数空間 (例えば $\mathcal{D}'(B)$, $C^\infty(B)$, $L^p(B)$ 等) の Poisson 変換による像の特徴付けが研究されている (cf. [2], [3], [4], [9], [13], [14], [15], [16], [17], [19], [23]).

非実なスペクトルパラメータ λ (ただし λ は Weyl 群に対し, ある仮定を満たす) に対しては, Ben Saïd et al. [3] が $L^p(B)$ の Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ による像を Hardy 型空間を用いて特徴付けている. さらに, Fatou 型の定理を証明し, L^p-空間などの様々な境界上の関数空間に対して, 同時固有関数から境界値を定める境界作用素を陽的に与えている.

Strichartz [24] はスペクトル理論の観点から, 対称空間および等質空間上の不変微分作用素に対する固有関数の特徴付けを考察した. そのなかで, 実かつ正則なスペクトルパラメータ λ に対して, $L^2(B)$ の Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ による像は, Agmon-Hörmander 型のノルムを用いて特徴付けられることを予想した (以下, Strichartz 予想と呼ぶ). 対称空間にランク 1 という特別な条件を課した場合には, [4], [9] などで Strichartz 予想が部分的に解決されていたが, 一般の場合は長らく未解決であった. 先行研究 [10] では, 定常散乱理論の手法を用いることで, Strichartz 予想に対して肯定的な解答を与えた. 定常散乱理論の手法を用いることで, 振動する関数をスペクトルパラメータに関して一様に評価することが可能となり, 予想の解決につながった.

本研究では, 実かつ特異なスペクトルパラメータ λ_0 に対して, $L^2(B)$ の Poisson 変換 $\mathcal{P}_{\lambda_0}$ による像を, Agmon-Hörmander 型のノルムを用いて特徴付ける. スペクトルパラメータが実かつ正則な場合と, 特異な場合は同時固有関数の無限遠での挙動が本質的に異なる. スペクトルパラメータが実かつ特異な場合には, その退化次数に応じて波動関数の周波数が合流し, 無限遠方での減衰度が悪くなる. そこで, 退化次数に応じた適切な関数空間を導入し, [10] で用いられた一様フーリエ制限評価や散乱公式を特異な場合に拡張して, Poisson 変換 $\mathcal{P}_{\lambda_0}$ の L^2-像を特徴付ける.

*現所属: 日本医科大学医学部 (2017 年 4 月 1 日現在)

2 ユークリッド空間の場合

特異なスペクトルに対する同時固有関数の無限遠での退化は，ユークリッド空間上の自由 Schrödinger 作用素の連続スペクトルの閾値に対しての一般化固有関数の退化とおおよそ対応している．自由 Schrödinger 作用素 $\boldsymbol{H}_0 = -\Delta_{\mathbb{R}^n}$ は $\mathcal{D}(\boldsymbol{H}_0) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n); \Delta_{\mathbb{R}^n} f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ を定義域とする $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の自己共役作用素として実現される．このとき，$\boldsymbol{H}_0$ のスペクトルに対しては $\sigma(\boldsymbol{H}_0) = \sigma_{\mathrm{ac}}(\boldsymbol{H}_0) = [0,\infty)$ が成り立つ．そして，各スペクトルはスペクトルパラメータ $\kappa \in \mathbb{R}$ により，κ^2 と表される．本節では，ユークリッド空間上の調和解析の立場から，$\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ の場合の一般化固有関数の特徴付け (Agmon-Hörmander [1]) と，閾値 (すなわち $\kappa = 0$ の場合) に付随する一般化固有関数の特徴付けについて振り返る．

はじめに，ユークリッド空間上の Agmon-Hörmander 型の関数空間を導入する．$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$, $\Omega_j = \{x \in \mathbb{R}^n; 2^{j-1} \leqslant |x| < 2^j\}$ $(j \in \mathbb{N})$ とおく．また，各集合 Ω_j に対する特性関数を χ_{Ω_j} と表す．$\sigma > 0$, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して，ノルム $\|\cdot\|_{B_\sigma(\mathbb{R}^n)}$ を以下で定義する．

$$\|f\|_{B_\sigma(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\sigma j} \left\|\chi_{\Omega_j} f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

このとき，

$$B_\sigma(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n); \|f\|_{B_\sigma(\mathbb{R}^n)} < \infty\right\}$$

とおくと，ノルム空間 $(B_\sigma(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{B_\sigma(\mathbb{R}^n)})$ は Banach 空間となる．また，Banach 空間 $B_\sigma(\mathbb{R}^n)$ の双対空間は以下のように実現される: ノルム $\|\cdot\|_{*,\sigma}$ を以下で定義する:

$$\|f\|_{*,\sigma} = \sup_{R>1} \frac{1}{R^\sigma} \left(\int_{|x|<R} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

そして，

$$B^*_\sigma(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n); \|f\|_{*,\sigma} < \infty\}$$

とおくとノルム空間 $(B^*_\sigma(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{*,\sigma})$ は Banach 空間となり，双線形写像

$$B_\sigma(\mathbb{R}^n) \times B^*_\sigma(\mathbb{R}^n) \ni (f,g) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \in \mathbb{C}$$

により $B_\sigma(\mathbb{R}^n)$ の双対空間の実現となる．

$\kappa \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\mathcal{E}_\kappa(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n); -\Delta_{\mathbb{R}^n} f = \kappa^2 f\}$$

とおく．$\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，$\mathcal{E}_\kappa(\mathbb{R}^n)$ の部分空間 $\mathcal{E}^2_\kappa(\mathbb{R}^n)$ を以下で定義する．

$$\mathcal{E}^2_\kappa(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in \mathcal{E}_\kappa(\mathbb{R}^n); \|f\|_{*,1/2} < \infty\right\}.$$

このとき，ノルム空間 $(\mathcal{E}^2_\kappa(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{*,1/2})$ は Banach 空間となる．

定義 2.1. Banach 空間 $(B^*_\sigma(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{*,\sigma})$ において同値関係 $\simeq$ を以下で定義する:

$$f_1 \simeq f_2 \text{ in } B^*_\sigma(\mathbb{R}^n) :\Longleftrightarrow \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{2\sigma}} \int_{|x|<R} |f_1(x) - f_2(x)|^2 dx = 0.$$

注意 2.2. $0 < R_1 < R_2 < \infty$ に対して, $A(R_1, R_2) = \{x \in \mathbb{R}^n; R_1 < |x| < R_2\}$ とおく. このとき, 簡単な考察により $f \in B_\sigma^*(\mathbb{R}^n)$ に対して以下が従う.

$$f \simeq 0 \text{ in } B_\sigma^*(X) \Longleftrightarrow 0 < \forall c_1 < \forall c_2 < \infty, \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{2\sigma}} \int_{A(c_1R, c_2R)} |f(x)|^2 dx = 0.$$

従って, $f \simeq 0$ とは, 上記の平均 L^2-ノルムの意味で, 無限遠で 0 となることを意味する.

定義 2.3 (Fourier 制限作用素). $\kappa \in \mathbb{R}$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して, $\mathcal{F}_\kappa f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ を以下で定める.

$$\mathcal{F}_\kappa f(b) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\kappa\langle x, b\rangle} f(x) dx.$$

補題 2.4 (一様 Fourier 制限評価). $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, $\mathcal{F}_\kappa$ は $B_{1/2}(\mathbb{R}^n)$ から $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ への連続線形作用素に一意的に拡張される. さらに, ある正定数 C が存在し, 任意の $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して以下が成り立つ.

$$\|\mathcal{F}_\kappa f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leqslant C|\kappa|^{-(n-1)/2} \|f\|_{B_{1/2}(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in B_{1/2}(\mathbb{R}^n).$$

$d\sigma$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度から誘導される $\mathbb{S}^{n-1}$ 上の測度とする. また, 全測度が 1 となるよう $d\sigma$ を正規化し, それを db とおく. $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{S}^{n-1})$ に対して, ユークリッド空間上の Poisson 変換 P_κ を以下で定義する.

$$P_\kappa F(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i\kappa\langle x, b\rangle} F(b) db.$$

簡単な計算により, $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して $\mathcal{F}_\kappa^* = P_\kappa$ が成り立ち, 以下が得られる.

補題 2.5. $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, P_κ は $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ から $B_{1/2}^*(\mathbb{R}^n)$ への連続線形作用素である. さらに, ある正定数 C が存在し, 任意の $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して以下が成り立つ.

$$\|P_\kappa F\|_{B_{1/2}^*(\mathbb{R}^n)} \leqslant C|\kappa|^{-(n-1)/2} \|F\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}, \quad F \in L^2(\mathbb{S}^{n-1}).$$

$\kappa \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathbb{R}^n$ 上の初等球関数 $\psi_\lambda(x)$ は以下で与えられる.

$$\psi_\kappa(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i\kappa\langle x, b\rangle} db = P_\kappa 1(x).$$

$J_\alpha(z)$ を α 次第一種 Bessel 関数とする. また, $\omega_n = \mathrm{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$ とする. このとき, 極座標表示 $x = rb$ $(r > 0, b \in \mathbb{S}^{n-1})$ のもとで, 初等球関数 $\psi_\kappa(x)$ は以下のように表される.

$$\psi_\kappa(rb) = \omega_n^{-1}(2\pi)^{n/2}(\kappa r)^{-\frac{n}{2}+1} J_{\frac{n}{2}-1}(rb).$$

Bessel 関数の無限遠での漸近挙動を用いることで, 以下の補題が得られる.

補題 2.6 (ψ_κ に対する散乱公式). $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする. $C_0(\kappa) = \omega_n^{-1}(i\kappa/2\pi)^{-(n-1)/2}$ とおく. このとき, 以下が成り立つ.

$$\psi_\kappa(x) \simeq |x|^{-(n-1)/2} \left\{ e^{+i\kappa|x|} C_0(+\kappa) + e^{-i\kappa|x|} C_0(-\kappa) \right\} \quad \text{in } B_{1/2}^*(\mathbb{R}^n).$$

以下では, ユークリッド空間上の平行移動による作用が初等球関数と球面波にどの様な影響を与えるかを振り返る.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ を固定し, $F_{\kappa,x_0}(b) = e^{-i\kappa\langle x_0,b\rangle}$ とおく. このとき, 以下が成り立つ.

$$P_\kappa[F_{\kappa,x_0}](x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i\kappa\langle x,b\rangle} e^{-i\kappa\langle x_0,b\rangle} db = \psi_\kappa(x-x_0)$$

そして, 平面波で表される $\mathbb{S}^{n-1}$ 上の関数 $F_{\kappa,x_0}(b)$ で生成される部分空間に対して以下が成り立つ.

定義 2.7. $\kappa \in \mathbb{R}$ に対して, $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ の部分空間 $L_\kappa(\mathbb{S}^{n-1})$ を以下で定義する.

$$L_\kappa(\mathbb{S}^{n-1}) = \left\{ \sum_{j=1}^{r} c_j e^{-i\kappa\langle x_j,b\rangle}; r \in \mathbb{N}, c_j \in \mathbb{C}, x_j \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

補題 2.8 (稠密性). $\kappa \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して $L_\kappa(\mathbb{S}^{n-1})$ は $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ で稠密.

ノルムに対するユークリッド空間上の平行移動の作用に関して, 以下の評価が良く知られている.

補題 2.9. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して, $b_x = x/|x| \in \mathbb{S}^{n-1}$ とおく. また, $x, y \in \mathbb{R}^n$ $(x \neq 0)$ に対して, $R_{0,+}(x,y)$ を以下で定義する.

$$R_{0,+}(x,y) = |x-y| - |x| + \langle y, b_x\rangle.$$

このとき, y に依存する正定数 $C(y)$ が存在して, 以下の不等式が成り立つ.

$$|R_{0,+}(x,y)| \leqslant C(y)(1+|x|)^{-1}.$$

補題 2.9 により, 球面波 $e^{\pm i\kappa|x|}$ への平行移動の作用に関して, 以下のような漸近評価が成り立つ.

$$e^{\pm i\kappa|x-x_0|} = e^{\pm i\kappa|x|} e^{\mp i\kappa\langle x_0,b_x\rangle} + O(|x|^{-1}) \quad \text{as } |x| \to \infty.$$

このとき, 補題 2.5, 補題 2.6, 補題 2.8, 補題 2.9 を組み合わせることで, $\kappa \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して以下の結果が得られる.

定理 2.10 (cf. Agmon-Hörmander [1]). $\kappa \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ とする. このとき, Poisson 変換 P_κ は $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ から $\mathcal{E}^2_\kappa(\mathbb{R}^n)$ への位相同型を与える. さらに, $f = P_\kappa F$ $(F \in L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$ に対して, 以下の散乱公式が成り立つ.

$$f(x) \simeq |x|^{-(n-1)/2} \sum_{w\in\{\pm1\}} e^{iw\kappa|x|} C_0(w\kappa) F(wb_x) \quad \text{in } B^*_{1/2}(\mathbb{R}^n).$$

また, 以下の系は $\kappa \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して, $\mathcal{E}^2_\kappa(\mathbb{R}^n)$ が非自明な極小の解空間となることを意味する.

系 2.11 (Rellich の定理). $\kappa \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ とする. $f \in \mathcal{E}^2_\kappa(\mathbb{R}^n)$ が $f \simeq 0$ in $B^*_{1/2}(\mathbb{R}^n)$ を満たすと仮定する. このとき, $\mathbb{R}^n$ 上恒等的に $f = 0$ となる.

一方, $\kappa = 0$, すなわち連続スペクトルの閾値に対応する場合には, ノルム $\|\cdot\|_{*,1/2}$ による一般化固有空間の特徴付けは ($n \geqslant 2$ のときは) 成り立たない. $\kappa = 0$ の場合には, ノルムの指数を $1/2$ から $n/2$ に変えた関数空間

$$\mathcal{E}^2_0(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{E}_\kappa(\mathbb{R}^n); \|f\|_{*,n/2} < \infty \right\}$$

が境界 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上の L^2-関数に対する極小な固有空間となる. ただし, この場合には $\mathcal{E}^2_0(\mathbb{R}^n) = \{f(x) = C; C \in \mathbb{C}\}$ となり, Poisson 変換 P_0 は $L^2(B)$ から $\mathcal{E}^2_0(\mathbb{R}^n)$ への全射連続写像となるが, 非自明な核をもつ.

3 記号と準備

この節では, 対称空間上の調和解析に関連する記号を導入する (記号の用法は基本的に [7] に従う). $X=G/K$ を非コンパクト型対称空間とする. dx を X 上の左-G-不変測度とする. $o=eK$ を X の原点とする. $G=KAN$ を Lie 群 G の Iwasawa 分解とし, $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{a}=\mathrm{Lie}(A)$ とする. $l=\dim\mathfrak{a}$ を X のランクとする. $\Sigma\subset\mathfrak{a}^*$ を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系とする. Σ^+ を正の制限ルートから成る集合とし, $\Sigma_0^+=\{\alpha\in\Sigma^+;\alpha/2\notin\Sigma^+\}$ とおく. $\Pi(\subset\Sigma^+)$ を正の単純ルートから成る集合とする. $\alpha\in\Sigma$ に対して, その重複度を m_α とおき, $\rho=\sum_{\alpha\in\Sigma^+}m_\alpha\alpha/2$ とおく. また, $\mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}=\{\lambda\in\mathfrak{a}^*;\langle\lambda,\alpha\rangle\neq 0,\ \forall\alpha\in\Sigma\}$, $\mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}=\mathfrak{a}^*\setminus\mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$ とおく. M を A の K における中心化群とする. $B=K/M$ とおき, B 上の正規化された K-不変測度を db とする. $X_{\mathrm{reg}}\ni x\mapsto(A^+(x),b_x)\in\mathfrak{a}^+\times B$ を一般化極座標とする. W を Weyl 群とする. Iwasawa 分解により $g\in G$ に対して, $g\in K\exp(H(g))N$ となる $H(g)\in\mathfrak{a}$ が一意的に定まる. そこで $(x,b)=(g\cdot o,kM)\in X\times B$ に対して, $A(x,b)=-H(g^{-1}k)\in\mathfrak{a}$ と定義する. dH (resp. $d\lambda$) を $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{a}^*$) 上の Lebesgue 測度に $(2\pi)^{-l/2}$ を乗じた測度とする. また, dn を N 上の (ある種の正規化をした)Haar 測度とする. $\boldsymbol{c}(\lambda)$ を Harish-Chandra $\boldsymbol{c}$-関数とする.

定義 3.1 (Radon 変換). $f\in C_0^\infty(X)$ に対して, Radon 変換 $\mathcal{R}$ を以下で定義する.

$$Rf(H,b)=e^{\rho(H)}\int_N f(ke^Hn\cdot o)dn,\quad (H,b)=(H,kM)\in\mathfrak{a}\times B.$$

定義 3.2 (Helgason-Fourier 変換). $f\in C_0^\infty(X)$ に対して, Helgason-Fourier 変換 $\mathcal{F}$ を以下で定義する.

$$\mathcal{F}f(\lambda,b)=\int_X e^{(-i\lambda+\rho)(A(x,b))}f(x)dx,\quad (\lambda,b)\in\mathfrak{a}^*\times B.$$

定理 3.3 (Fourier slice theorem). $f\in C_0^\infty(X)$ に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$\mathcal{F}f(\lambda,b)=\mathcal{F}_{\mathfrak{a}}[\mathcal{R}f(\,\cdot\,,b)](\lambda).$$

ただし, $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$ はユークリッド空間 $\mathfrak{a}$ 上の標準的な Fourier 変換である.

定義 3.4 (Plancherel 定理). Helgason-Fourier 変換 $\mathcal{F}$ は以下のユニタリ同型に一意的に拡張される.

$$\mathcal{F}:L^2(X)\to L^2_W(\mathfrak{a}^*\times B,|W|^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda db).$$

ただし, $L^2_W(\mathfrak{a}^*\times B,|W|^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda db)$ は以下のように定義される Hilbert 空間である.

$$\begin{aligned}
&\psi\in L^2_W(\mathfrak{a}^*\times B,|W|^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda db)\\
:\Longleftrightarrow\ &\text{(i) } \psi\in L^2(\mathfrak{a}^*\times B,|W|^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda db).\\
&\text{(ii) } \int_B e^{(iw\lambda+\rho)(A(x,b))}\psi(w\lambda,b)db=\int_B e^{(i\lambda+\rho)(A(x,b))}\psi(\lambda,b)db,\\
&\qquad w\in W,\ \text{a.e. } (x,\lambda)\in X\times\mathfrak{a}^*.
\end{aligned}$$

定義 3.5 (Fourier 制限作用素). $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ に対して, $C_0^\infty(X)$ を定義域, $L^2(B)$ を値域とする Fourier 制限作用素 $\mathcal{F}_\lambda$ を以下で定める.

$$\mathcal{F}_\lambda f(b)=\int_X e^{(-i\lambda+\rho)(A(x,b))}f(x)dx,\quad f\in C_0^\infty(X).$$

定義 3.6 (Poisson 変換). $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $F \in L^1(B)$ に対して, F の Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda F$ を以下で定義する.

$$\mathcal{P}_\lambda F(x) = \int_B e^{(i\lambda+\rho)(A(x,b))} F(b) db.$$

このとき, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $f \in C_0^\infty(X)$, $F \in L^2(B)$ に対し, 以下が成り立つことに注意する.

$$\int_X \mathcal{P}_\lambda F(x)\overline{f(x)}dx = \int_B F(b)\overline{\mathcal{F}_\lambda f(b)}db. \tag{3.1}$$

定義 3.7 (初等球関数). $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して X 上の初等球関数 $\varphi_\lambda(x)$ が以下で定義される:

$$\varphi_\lambda(x) = \int_B e^{(i\lambda+\rho)(A(x,b))} db.$$

$\boldsymbol{D}(X)$ を対称空間 X 上の G-不変微分作用素の成す代数とする. また, $\boldsymbol{D}_W(A)$ を Lie 群 A 上の W-不変な A-不変微分作用素の成す代数とする. $\Gamma : \boldsymbol{D}(X) \to \boldsymbol{D}_W(A)$ を Harish-Chandra 同型とし, $D \in \boldsymbol{D}(X)$ に対応する A 上の微分作用素 $\Gamma(D)$ の表象を $\Gamma(D)(i\lambda)$ とおく. $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, 同時固有関数の成すベクトル空間 $\mathcal{E}_\lambda(X)$ を以下で定義する.

$$\mathcal{E}_\lambda(X) = \{f \in C^\infty(X); Df = \Gamma(D)(i\lambda)f \quad \text{for all } D \in \boldsymbol{D}(X)\}.$$

ここで, $\mathcal{E}_\lambda(X)$ は $C^\infty(X)$ 上の標準的な Fréchet 位相に関して, $C^\infty(X)$ の閉部分空間となり, Fréchet 空間となる.

4 代表的な先行研究

初めに, 対称空間上の Poisson 変換に対する Helgason 予想について振り返る.

予想 4.1 (Helgason 予想 (cf. [5])). 以下の条件 (4.1) を満たす任意の $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ は B 上の解析的汎関数全体から成る位相ベクトル空間 $\mathcal{A}'(B)$ から $\mathcal{E}_\lambda(X)$ への位相同型を与える.

$$-2\langle i\lambda, \alpha\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle \notin \mathbb{N}, \quad \alpha \in \Sigma^+. \tag{4.1}$$

その後, Helgason 予想は Kashiwara et al. [12] によって肯定的に解決された. そして, 次の研究段階として以下のような問題が自然に導かれる.

問題 4.2. 条件 (4.1) をみたす $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, 適当な位相ベクトル空間 $\mathcal{V}_B(\subset \mathcal{A}'(B))$ と $\mathcal{V}_X(\subset \mathcal{E}_\lambda(X))$ を選ぶことで, 位相同型

$$\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{V}_B \to \mathcal{V}_X$$

を構成せよ. (例えば, $\mathcal{V}_B = \mathcal{D}'(B)$, $C^\infty(B)$, $L^p(B)$ 等.)

始めに, $\mathcal{V}(B) = \mathcal{D}'(B)$ の結果を振り返る. $\mathcal{E}(X)$ の部分空間 $\mathcal{E}^*(X)$ を以下で定義する.

$$\mathcal{E}^*(X) = \left\{f \in \mathcal{E}(X); \exists A > 0 \text{ s.t. } f(x) = O(e^{Ar(x)})\right\}.$$

また, $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, 以下のように同時固有関数から成る空間 $\mathcal{E}_\lambda^*(X)$ を導入する. (位相の詳細は割愛する.)

$$\mathcal{E}_\lambda^*(X) = \mathcal{E}^*(X) \cap \mathcal{E}_\lambda(X).$$

定理 4.3 (Lewis [16] (rank one), Oshima and Sekiguchi [19] (general)). $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ が (4.1) を満たすとき, 以下の位相同型を得る.

$$\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{D}'(B) \to \mathcal{E}_\lambda^*(X).$$

注意 4.4. Lewis [16] は, ランク 1 の場合に, λ が $\langle i\lambda, \alpha\rangle / \langle \alpha, \alpha\rangle \notin \mathbb{Z}$ かつ "simple" という仮定の下で Poisson 変換に対する同型を得ている. また, Lewis [16] はランクが一般の場合に包含関係 $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{D}'(B)) \subset \mathcal{E}_\lambda^*(X)$ を得ている.

次に, $\mathcal{V}(B) = C^\infty(B)$ の結果を振り返る. $\boldsymbol{D}(G)$ を G 上の左-G-不変な微分作用素全体から成る代数とする. また, $\boldsymbol{E}(X)$ を X 上の微分作用素全体から成る代数とする. このとき, 関数への G-作用 $f(x) \mapsto f(g^{-1} \cdot x)$ は自然な準同型写像 $\nu : \boldsymbol{D}(G) \to \boldsymbol{E}(X)$ を誘導する. $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, $\mathcal{E}_\lambda(X)$ の部分空間 $\mathcal{E}_\lambda^\infty(X)$ を以下で定義する. (位相の詳細は割愛する.)

$$\mathcal{E}_\lambda^\infty(X) = \left\{ f \in \mathcal{E}_\lambda(X); \exists A > 0 \text{ s.t. } \forall D \in \boldsymbol{D}(G),\ (\nu(D)f)(x) = O(e^{Ar(x)}) \right\}.$$

定理 4.5 (van den Ban and Schlichtkrull [2]). $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ が (4.1) を満たすとき, 以下の位相同型を得る.

$$\mathcal{P}_\lambda : C^\infty(B) \to \mathcal{E}_\lambda^\infty(X).$$

次に, λ が実かつ正則 (すなわち $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}^*$) である場合に Strichartz [24] が予想した, Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ の L^2-像の特徴づけについて振り返る.

予想 4.6 (Strichartz 予想 [24, Conjecture 4.5]). $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}^*$ を固定する. $f \in \mathcal{E}_\lambda(X)$ と仮定する. このとき, ある $F \in L^2(B)$ が存在して $f = \mathcal{P}_\lambda F$ が成り立つ為の必要十分条件は, ある $y \in X$ (あるいは任意の y) に対して

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^l} \int_{B(y,R)} |f(x)|^2 dx < \infty$$

が成り立つこと, または

$$\sup_{R>0, y\in X} \frac{1}{R^l} \int_{B(y,R)} |f(x)|^2 dx < \infty$$

が成り立つことである. さらに

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^l} \int_{B(y,R)} |\mathcal{P}_\lambda F(x)|^2 dx = \gamma_l^2 |\boldsymbol{c}(\lambda)|^2 \|F\|_{L^2(B)}^2$$

が成り立ち, λ に依存しない正定数 C が存在して以下が成り立つ.

$$C^{-1} \|F\|_{L^2(B)}^2 \leqslant |\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2} \sup_{R>0, y\in X} \frac{1}{R^l} \int_{B(y,R)} |\mathcal{P}_\lambda F(x)|^2 dx \leqslant C \|F\|_{L^2(B)}^2. \tag{4.2}$$

対称空間にランク 1 という特別な条件を課した場合には, 超幾何関数や複素 Poisson 核に対する具体性に基いた解析により [4, Theorem A], [9, Theorem 1] などで Strichartz 予想が部分的に解決されていたが, 一般の場合は未解決であった. 特に, 不等式 (4.2) の最右辺の評価に関しては, ランク 1 の場合でさえ精密な評価は得られていなかった.

最後に, λ が (本質的に) 非実である場合の, Poisson 変換の L^p-像の特徴付けを振り返る. $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, W の部分群 W_λ, W_λ^R を以下で定義する.

$$W_\lambda = \{w \in W; w\lambda = \lambda\}, \quad W_\lambda^R = \{w \in W; w\,\mathrm{Re}(i\lambda) = \mathrm{Re}(i\lambda)\}.$$

このとき, Poisson 変換に対して以下の Fatou 型定理が成り立つ.

定理 4.7 (Fatou 型定理, Ben Saïd et al. [3, Theorem 3.2]). $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ が次の仮定を満たすとする.

$$\text{(A1)} \quad \forall \alpha \in \Sigma^+,\ \langle \mathrm{Re}(i\lambda), \alpha \rangle \geqslant 0, \quad \text{(A2)} \quad W_\lambda = W_\lambda^R.$$

このとき, B 上の関数, あるいは汎函数 F に対して, 次の収束

$$\lim_{a \to \infty} \varphi_\lambda(a)^{-1} \mathcal{P}_\lambda F(ka \cdot o) = F(kM)$$

が以下の各位相の元で成り立つ.

(i) $F \in C(B)$ の場合, B 上の一様位相;

(ii) $p \in [1, \infty)$, $F \in L^p(B)$ の場合, $L^p(B)$-位相;

(iii) $F \in L^\infty(B)$ の場合, $L^1(B)$ に対する汎弱位相;

(iv) $F \in C^*(B)$ の場合, $C(B)$ に対する汎弱位相;

(v) $\mathcal{F}(B) = \mathcal{A}'(B)$, $\mathcal{D}'(B)$, $C^\infty(B)$, または $C^m(B)$ $(m \in \mathbb{N})$ のそれぞれの関数空間に対して, $F \in \mathcal{F}(B)$ の場合, $\mathcal{F}(B)$ 上の強位相.

次に, Poisson 変換の L^p 像の特徴づけを記述するために対称空間 X 上の Hardy 型空間 $\mathcal{H}_\lambda^p(X)$ を導入する. $p \in [1, \infty]$, $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, ノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\lambda^p}$ を以下で定義する.

$$\|f\|_{\mathcal{H}_\lambda^p} = \begin{cases} \sup_{x \in X} \varphi_{\mathrm{Re}(i\lambda)}(x)^{-1} \left(\int_K |f(kx)|^p dk \right)^{1/p}, & p \in [1, \infty) \\ \sup_{x \in X} \varphi_{\mathrm{Re}(i\lambda)}(x)^{-1} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

そして, Hardy 型空間 $\mathcal{H}_\lambda^p(X)$ を以下のように導入する.

$$\mathcal{H}_\lambda^p(X) = \left\{ f \in \mathcal{E}_\lambda(X); \|f\|_{\mathcal{H}_\lambda^p} < \infty \right\}.$$

定理 4.8 (Ben Saïd et al. [3, Theorem 3.6, Corollary 3.7]). $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ が定理 4.7 の仮定 (A1), (A2) を満たすとする. このとき, Poisson 変換は以下の等長同型を与える.

(i) $p \in (1, \infty]$ の場合;

$$\mathcal{P}_\lambda : L^p(B) \to \mathcal{H}_\lambda^p(X).$$

(ii) $p = 1$ の場合;

$$\mathcal{P}_\lambda : C^*(B) \to \mathcal{H}_\lambda^1(X).$$

5 正則な場合

この節では, スペクトルパラメータ λ が実かつ正則な場合の結果, すなわち Strichartz 予想に対する肯定的な解答を振り返る. $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ に対して, ノルム $\|\cdot\|_*$ を以下で定義する:

$$\|f\|_* = \sup_{R > 1} \frac{1}{R^{l/2}} \left(\int_{B(o,R)} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

ただし, $B(o,R)=\{x\in X; d(x,o)<R\}$. Banach 空間 $(B^*_{l/2}(X),\|\cdot\|_*)$ を $B^*_{l/2}(X)=\{f\in L^2_{\mathrm{loc}}(X); \|f\|_*<\infty\}$ により定義する. 実かつ正則なスペクトルパラメータ $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$ に対して, $\mathcal{E}_\lambda(X)$ の部分空間 $\mathcal{E}^2_\lambda(X)$ を以下で定義する.

$$\mathcal{E}^2_\lambda(X)=\{f\in\mathcal{E}_\lambda(X); \|f\|_*<\infty\}.$$

このとき, $(\mathcal{E}^2_\lambda(X),\|\cdot\|_*)$ は $B^*_{l/2}(X)$ の閉部分空間であり, Banach 空間となる.

スペクトルパラメータ λ が実かつ正則な場合に以下の結果が成り立つ.

定理 5.1 (Kaizuka [10, Theorem 3.6]). $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$ と仮定する.

(i) λ に依存しない正定数 C が存在し, $F\in L^2(B)$ に対して以下が成り立つ.

$$C^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|\,\|F\|_{L^2(B)}\leqslant\|\mathcal{P}_\lambda F\|_*\leqslant C|\boldsymbol{c}(\lambda)|\,\|F\|_{L^2(B)}.$$

さらに, 平均 L^2-ノルムの極限に対して以下が成り立つ.

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^l}\int_{B(o,R)}|\mathcal{P}_\lambda F(x)|^2dx=\gamma_l^2|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2\,\|F\|^2_{L^2(B)}.$$

ただし, $\gamma_l=2^{-l/4}\Gamma(l/2+1)^{-1/2}$.

(ii) Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ は $L^2(B)$ から $\mathcal{E}^2_\lambda(X)$ への位相同型を与える.

(iii) $f\in\mathcal{E}^2_\lambda(X)$ に対して, 逆像 $F=\mathcal{P}_\lambda^{-1}f$ は以下の反転公式で与えられる.

$$F(b)=\lim_{R\to\infty}\gamma_l^{-2}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}\frac{1}{R^l}\mathcal{F}_\lambda[\chi_{B(o,R)}f](b)\quad\text{in } L^2(B).$$

ただし, $\chi_{B(o,R)}(x)$ は $B(o,R)$ の特性関数である.

定義 5.2. $B^*_{l/2}(X)$ において, 同値関係 $\simeq$ を以下で定義する: $f_1,f_2\in B^*_{l/2}(X)$ に対し,

$$f_1\simeq f_2 \text{ in } B^*_{l/2}(X):\Longleftrightarrow\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^l}\int_{B(o,R)}|f_1(x)-f_2(x)|^2dx=0.$$

このとき, Poisson 変換に対して無限遠における以下の漸近展開が成り立つ.

定理 5.3 (Kaizuka [10, Theorem 6.1]). $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$, $F\in L^2(B)$ に対して以下が成り立つ.

$$\mathcal{P}_\lambda F(x)\simeq\sum_{w\in W}e^{(iw\lambda-\rho)(A^+(x))}\boldsymbol{c}(w\lambda)[U_{w,\lambda}F](b_x)\quad\text{in } B^*_{l/2}(X).$$

ただし, $U_{w,\lambda}$ は $U_{w,\lambda}=\mathcal{P}_{w\lambda}^{-1}\circ\mathcal{P}_\lambda$ により定義される $L^2(B)$ 上のユニタリ作用素である.

6 主結果

前節の λ が実かつ正則な場合の結果から, 以下の事が読み取れる: $\lambda_0\in\mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ とし, $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty\subset\mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$ が $\lambda_j\to\lambda_0$ $(j\to\infty)$ を満たすとする. このとき, 任意の $w\in W$ に対して $|\boldsymbol{c}(w\lambda_j)|\to\infty$ $(j\to\infty)$. よって, 定理 5.1 (i) より, 非零な $F\in L^2(B)$ に対して $\left\|\mathcal{P}_{\lambda_j}F\right\|_*\to\infty$ $(j\to\infty)$ が成り立つ. また, 定理 5.3 の散乱公式における係数 $\boldsymbol{c}(w\lambda_j)$ もすべて発散する. 実際, 後に述べるように, 非零な

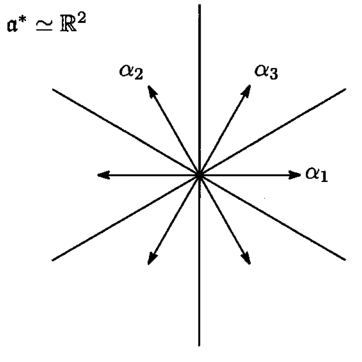
表 1: スペクトルの対応

等質空間	$\mathbb{R}^n$	G/K
パラメータ	$\kappa \in \mathbb{R}$	$\lambda \in \mathfrak{a}^*$
不変微分方程式 (系)	$(-\Delta_{\mathbb{R}^n})f = \kappa^2 f$	$Df = \Gamma(D)(i\lambda)f$
対称性	$\mathbb{Z}_2 \curvearrowright \mathbb{R}$	$W \curvearrowright \mathfrak{a}^*$
正則な場合	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$
特異な場合	$\{0\}$	$\mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$

$F \in L^2(B)$ に対しては, $\mathcal{P}_{\lambda_0} F \notin B^*_{l/2}(X)$ が成り立ち, 同時固有関数に無限遠での減衰に関して退化が生じる. ユークリッド空間の場合と比較すると, 表 1 の様な対応関係が見て取れる.

ユークリッド空間上の自由 Schrödinger 作用素に対しては, 一点 0 だけが特異なスペクトルパラメータである. その一方で, 同時固有関数に対するスペクトルの特異集合 $\mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ は, $\mathfrak{a}^*$ 内の原点を通る超平面の有限和で表される. 例えば, 制限ルート系が A_2 型の場合, 特異集合 $\mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ は図 1 のようになる. 特異集合 $\mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ は $\boldsymbol{c}$-関数 $\boldsymbol{c}(\lambda)$ の (実の) 特異点集合と一致する. $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ に対して, $\boldsymbol{c}$-関数の特異点の位数に応じた関数空間の指数 ν_0 を定めて, Poisson 変換 $\mathcal{P}_{\lambda_0}$ の L^2-像を特徴づける.

図 1: A_2 型の特異集合



$\mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}} = \bigcup_{j=1}^{3}\{\lambda \in \mathfrak{a}^*; \langle \lambda, \alpha_j \rangle = 0\}$

$\Sigma_0^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

主結果を述べるためにいくつか記号を導入する. $\sigma > 0$, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ に対して, ノルム $\|\cdot\|_{*,\sigma}$ を以下で定義する:

$$\|f\|_{*,\sigma} = \sup_{R>1} \frac{1}{R^\sigma} \left(\int_{B(o,R)} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Banach 空間 $(B^*_\sigma(X), \|\cdot\|_{*,\sigma})$ を $B^*_\sigma(X) = \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(X); \|f\|_{*,\sigma} < \infty\}$ により定義する.

定義 6.1. Banach 空間 $(B^*_\sigma(X), \|\cdot\|_{*,\sigma})$ において同値関係 $\simeq$ を以下で定義する:

$$f_1 \simeq f_2 \ \text{ in } B^*_\sigma(X) :\Longleftrightarrow \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{2\sigma}} \int_{B(o,R)} |f_1(x) - f_2(x)|^2 dx = 0.$$

以下, $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ と仮定する. W の λ_0 における固定部分群を W_{λ_0} とする. また, $\Sigma^0_{\lambda_0} = \{\alpha \in \Sigma_0^+; \langle \alpha, \lambda_0 \rangle = 0\}$ とおく. λ_0 における $\boldsymbol{c}(\lambda)$ の特異性を与える多項式関数 $\boldsymbol{\pi}_0(\lambda)$ と, (λ_0 の近傍で) 滑

らかな成分 $\boldsymbol{b}_0(\lambda)$ を以下で定める.

$$\boldsymbol{\pi}_0(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Sigma^0_{\lambda_0}} \langle\alpha,\lambda\rangle,\quad \boldsymbol{b}_0(\lambda) = \boldsymbol{\pi}_0(i\lambda)\boldsymbol{c}(\lambda). \tag{6.1}$$

また, 正定数 γ_0 を以下で定義する.

$$\gamma_0 = \frac{|W_{\lambda_0}|^{1/2}}{\partial(\boldsymbol{\pi}_0)(\boldsymbol{\pi}_0)}\left(\int_{|H|<1}|\boldsymbol{\pi}_0(H)|^2 dH\right)^{1/2}.$$

ただし, $\partial(\boldsymbol{\pi}_0)$ は多項式関数 $\boldsymbol{\pi}_0$ を表象とする $\mathfrak{a}^*$ 上の微分作用素である. さらに, λ_0 に対して指数 $\nu_0\in\mathbb{N}$ を以下で定義する.

$$\nu_0 = l + 2|\Sigma^0_{\lambda_0}|.$$

注意 6.2. いくつかの具体的な場合に, $\lambda_0\in\mathfrak{a}^*_{\text{sing}}$ に対して指数 ν_0 が取り得る値を提示しておく.

(1) ランク 1 の場合: $\mathfrak{a}^*_{\text{sing}} = \{o\}$, すなわち $\lambda_0 = o$ であり, $\nu_0 = 3(=\nu_X)$ となる. ただし, $\nu_X = l + 2|\Sigma^+_0|$ は対称空間に付随する擬次元と呼ばれる自然数である.

(2) A_2 型の場合: $\nu_0 = 4$, あるいは $8(=\nu_X)$.

(3) A_3 型の場合: $\nu_0 = 5, 7, 9$, あるいは $15(=\nu_X)$.

(4) B_3 型の場合: $\nu_0 = 5, 7, 9, 11$, あるいは $21(=\nu_X)$.

この指数 ν_0 に応じたノルム $\|\cdot\|_{*,\nu_0/2}$ を用いて, Poisson 変換の L^2-像を特徴付ける. $\mathcal{E}_{\lambda_0}(X)$ の部分空間 $\mathcal{E}^2_{\lambda_0}(X)$ を以下で定義する.

$$\mathcal{E}^2_{\lambda_0}(X) = \left\{f\in\mathcal{E}_{\lambda_0}(X); \|f\|_{*,\nu_0/2}<\infty\right\}.$$

このとき, ノルム空間 $(\mathcal{E}^2_{\lambda_0}(X), \|\cdot\|_{*,\nu_0/2})$ は Banach 空間となる.
以下が本研究の主結果である.

定理 6.3 (Kaizuka [11, Theorem 2.1]). $\lambda_0\in\mathfrak{a}^*_{\text{sing}}$ と仮定する.

(i) λ_0 に依存しない正定数 C が存在し, $F\in L^2(B)$ に対して以下が成り立つ.

$$C^{-1}|\boldsymbol{b}_0(\lambda_0)|\,\|F\|_{L^2(B)} \leqslant \|\mathcal{P}_{\lambda_0}F\|_{*,\nu_0/2} \leqslant C|\boldsymbol{b}_0(\lambda_0)|\,\|F\|_{L^2(B)}.$$

さらに, 平均 L^2-ノルムの極限に対して以下が成り立つ.

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{\nu_0}}\int_{B(o,R)}|\mathcal{P}_{\lambda_0}F(x)|^2dx = \gamma_0^2|\boldsymbol{b}_0(\lambda_0)|^2\,\|F\|^2_{L^2(B)}.$$

(ii) Poisson 変換 $\mathcal{P}_{\lambda_0}$ は $L^2(B)$ から $\mathcal{E}^2_{\lambda_0}(X)$ への位相同型を与える.

(iii) $f\in\mathcal{E}^2_{\lambda_0}(X)$ に対して, 逆像 $F=\mathcal{P}^{-1}_{\lambda_0}f$ は以下の反転公式で与えられる.

$$F(b) = \lim_{R\to\infty}\gamma_0^{-2}|\boldsymbol{b}_0(\lambda_0)|^{-2}\frac{1}{R^{\nu_0}}\mathcal{F}_{\lambda_0}[\chi_{B(o,R)}f](b)\quad\text{in } L^2(B).$$

7 証明の概略

主結果の証明の基本方針は, 実かつ正則な場合と同じで, 一様 Fourier 制限評価と散乱公式を証明することである. ただし, 実かつ正則な場合のそれらの証明では, 至る所の係数に $\boldsymbol{c}(\lambda)$, あるいは $\boldsymbol{c}(\lambda)^{-1}$ が現れる為, 同じ議論により直接証明することはできない. そこで, Narayanan et al. [18] において, スペクトルパラメータが特異な場合の, 初等球関数 (あるいは超幾何関数) の漸近展開に用いられた以下のテクニックを導入する: $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ と (6.1) で定義した多項式関数 $\boldsymbol{\pi}_0(\lambda)$ に対して, 次の恒等式が成り立つ.

$$\partial(\boldsymbol{\pi}_0)(\boldsymbol{\pi}_0)\varphi_{\lambda_0} = \partial(\boldsymbol{\pi}_0)[\boldsymbol{\pi}_0(\lambda)\varphi_\lambda]\|_{\lambda=\lambda_0}. \tag{7.1}$$

この恒等式を用いることで, 初等球関数 φ_λ の級数展開 (Harish-Chandra 展開) に現れる, 特異な係数 $\boldsymbol{\pi}_0(i\lambda)^{-1}$ を消し, 無限遠で減衰度が退化した漸近評価が得られる. 一様 Fourier 制限評価についても, 似たアイデアを導入することで λ_0 において消えてしまう多項式関数 $\boldsymbol{\pi}_0(i\lambda)$ を取り除くことが出来る.

7.1 一様 Fourier 制限評価

$\sigma > 0$ に対して, ユークリッド空間の場合と同様に Banach 空間 $B_\sigma(X)$ を導入する. スペクトルパラメータが実かつ特異な場合には, 以下の一様 Fourier 制限評価が成り立つ.

補題 7.1. $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ に対して, Fourier 制限作用素 $\mathcal{F}_{\lambda_0}$ は $B_{\nu_0/2}(X)$ から $L^2(B)$ への連続線形作用素に一意的に拡張される. さらに, λ_0 に依存しない正定数 C が存在して, 任意の $R > 1$ と $\operatorname{supp} u \subset B(o, R)$ を満たす任意の $u \in C_0^\infty(X)$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\|\mathcal{F}_{\lambda_0} u\|_{L^2(B)} \leqslant CR^{\nu_0/2}|\boldsymbol{b}_0(\lambda_0)|\|u\|_{L^2(X)}. \tag{7.2}$$

これより直ちに, 以下が成り立つ

$$\|\mathcal{F}_{\lambda_0} u\|_{L^2(B)} \leqslant C|\boldsymbol{b}_0(\lambda_0)|\|u\|_{B_{\nu_0/2}(X)}. \tag{7.3}$$

$\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$ の場合の一様 Fourier 制限評価は, Fourier slice theorem (定理 3.3) を用いて, Fourier 制限作用素をユークリッド空間上の Fourier 変換と Radon 変換の合成として表し, 関数 f あるいはその Radon 変換 $\mathcal{R}f(\cdot, b)$ の台の大きさと Plancherel 定理 (定理 3.4) を用いて, $L^2(B)$-ノルムの大きさを評価することで得られる. (厳密には, $\boldsymbol{c}$-関数そのものではなく, modify した関数 $\widetilde{\boldsymbol{c}}(\lambda)$ を, Fourier multiplier $\widetilde{J} = \widetilde{\boldsymbol{c}}^{-1}(D_H)$ が "uniformly properly supported" となるように上手く定義, 導入し議論する必要がある (cf. [10, Proof of Proposition 6.3]).) 一方, $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ の場合には, $\boldsymbol{c}^{-1}(\lambda_0) = 0$ (あるいは $\widetilde{\boldsymbol{c}}^{-1}(\lambda_0) = 0$) となり, 正則な場合の議論を直接用いることはできない. そこで, (7.1) をうまく用いて以下のように議論する: 正則な場合と同じように $f \in C_0^\infty(X)$ と λ_0 に十分近い $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$ に対して, 以下が成り立つ. ($\lambda \to \lambda_0$ とすると, 以下の等式は両辺 0 となることに注意する.)

$$\widetilde{\boldsymbol{c}}^{-1}(\lambda)\mathcal{F}_\lambda f(b) = \int_{\mathfrak{a}} e^{-i\lambda(H)}\widetilde{J}\mathcal{R}f(H, b)dH. \tag{7.4}$$

ここで, λ_0 の近傍で滑らかな関数 $\widetilde{\boldsymbol{b}}_0(\lambda)$ を $\widetilde{\boldsymbol{b}}_0(\lambda) = \boldsymbol{\pi}_0(i\lambda)\widetilde{\boldsymbol{c}}(\lambda)$ により定義する. そして, (7.4) の両辺に対して, (7.1) と同じ操作を施すことで以下を得る.

$$\partial(\boldsymbol{\pi}_0)(\boldsymbol{\pi}_0)\widetilde{\boldsymbol{b}}_0^{-1}(\lambda_0)\mathcal{F}_{\lambda_0} f(b) = \int_{\mathfrak{a}} e^{-i\lambda_0(H)}\boldsymbol{\pi}_0(-H)\widetilde{J}\mathcal{R}f(H, b)dH. \tag{7.5}$$

等式 (7.5) により, 関数 f の台の大きさと λ_0 の指数 ν_0 を考慮に入れた, Fourier 制限作用素に対する一様評価が得られる.

補題 7.1 と (3.1) を用いることで, Poisson 変換に対するスペクトルパラメータに関して一様な連続性評価 (定理 6.3 (i), 右辺不等式) が従う. その評価を補題として述べておく.

補題 7.2. $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ に対して, Poisson 変換 $\mathcal{P}_{\lambda_0}$ は $L^2(B)$ から $B^*_{\nu_0/2}(X)$ への連続線形作用素に一意的に拡張される. さらに, λ_0 に依存しない正定数 C が存在して以下の評価が成り立つ.

$$\|\mathcal{P}_{\lambda_0}F\|_{*,\nu_0/2} \leqslant C|\boldsymbol{b}_0(\lambda_0)|\|F\|_{L^2(B)}, \quad F \in L^2(B). \tag{7.6}$$

7.2 初等球関数に対する漸近評価

初等球関数に対する Harish-Chandra 展開について振り返る. $\Lambda = \sum_{\alpha\in\Pi}\mathbb{N}_0\alpha$, $\widetilde{\Lambda} = \sum_{\alpha\in\Pi}\mathbb{Z}\alpha$, $\Lambda^+ = \Lambda\setminus\{o\}$ とおく. また, σ_μ, $\mathcal{T}^\dagger$ を以下で定義する:

$$\sigma_\mu = \{\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}; \langle\mu,\mu\rangle = 2i\langle\lambda,\mu\rangle\}, \quad \mu \in \Lambda,$$
$$\mathcal{T}^\dagger = \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \setminus \cup_{\mu\in\Lambda^+}\sigma_\mu.$$

初等球関数 φ_λ に対して, 以下の Harish-Chandra 展開が成り立つことが知られている.

定理 7.3 (Helgason [6], Chapter IV, Theorem 5.5)**.** $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ が以下の条件を満たすと仮定する:

(i) $w_1, w_2 \in W$ $(w_1 \neq w_2)$ に対して, $i(w_1\lambda - w_2\lambda) \notin \widetilde{\Lambda}$.

(ii) $w \in W$ に対して, $w\lambda \in \mathcal{T}^\dagger$.

このとき, 以下が成り立つ:

$$\varphi_\lambda(e^H) = \sum_{w\in W}\boldsymbol{c}(w\lambda)e^{(iw\lambda-\rho)(H)}\sum_{\mu\in\Lambda}\Gamma_\mu(w\lambda)e^{-\mu(H)} \quad H \in A^+, \tag{7.7}$$

ただし, Γ_μ は以下のように帰納的に定義される $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ 上の有理関数である.

$$(a) \quad \Gamma_0 \equiv 1.$$
$$\begin{aligned}(b) \quad &\{\langle\mu,\mu\rangle - 2i\langle\mu,\lambda\rangle\}\Gamma_\mu(\lambda)\\ &= 2\sum_{\alpha\in\Sigma^+}m_\alpha\sum_{k\in\mathbb{N}}\Gamma_{\mu-2k\alpha}(\lambda)\{\langle\mu+\rho-2k\alpha,\alpha\rangle - i\langle\alpha,\lambda\rangle\}.\end{aligned}$$

さらに, 級数 (7.7) は A^+ の各点で絶対収束し, かつ subchamber $\{e^H \in A^+; \alpha(H) > c > 0, \alpha \in \Pi\}$ 上で一様収束する.

Harish-Chandra 展開には (7.7) のように, $\mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ 上で特異な係数 $\boldsymbol{c}(w\lambda)$ が現れる. そこで, 特異な場合の漸近評価を得るために本節前半で述べた恒等式 (7.1) を用いる. 議論を見やすくするため主要な項だけ計算する. $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$ が, λ_0 の十分小さい近傍に含まれるとき φ_λ の主要項は以下で与えられる.

$$\varphi_\lambda(e^H) = \sum_{w\in W}e^{(iw\lambda-\rho)(H)}\boldsymbol{c}(w\lambda) + (\text{lower order term}).$$

この両辺に $\boldsymbol{\pi}_0(\lambda)$ を乗じて, $\mathfrak{a}^*$ 上の微分作用素 $\partial(\boldsymbol{\pi}_0)$ を作用させ, 極限 $\lambda \to \lambda_0$ を取ると以下が得られる.

$$\partial(\boldsymbol{\pi}_0)(\boldsymbol{\pi}_0)\varphi_{\lambda_0}(e^H) = \sum_{w \in W} e^{(iw\lambda_0-\rho)(H)}\boldsymbol{\pi}_0(w^{-1}H)\boldsymbol{b}_{0,w}(\lambda_0)$$
$$+ (\text{lower order term}).$$

しかし, 散乱公式を得るための応用上は, 上記の "lower order term" の部分を単純には無視できない. また, Narayanan et al. [18] で得られている評価も, 一部の "Weyl wall" から離れた領域上での評価にとどまる. そこで, "lower order term" の "Weyl wall" 近傍での影響がうまく無視できるように, うまいカットオフ関数を導入することで困難を解決し, 応用上有用な漸近評価を得た.

$\mathfrak{a}^+$ を Weyl wall に沿って分割する. $s > 1$ と $I \subset \Pi$ に対して, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_I \subset \mathfrak{a}^+$ を以下で定義する.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &= \{H \in \mathfrak{a}^+; \alpha(H) \geqslant 1 \text{ for all } \alpha \in \Pi\},\\
\mathcal{D}_I &= \{H \in \mathfrak{a}^+; \alpha(H) \geqslant s\log(e+|H|) \text{ for all } \alpha \in \Pi \setminus I,\\
&\qquad \alpha(H) < s\log(e+|H|) \text{ for all } \alpha \in I\} \setminus \mathcal{D}_1,
\end{aligned}$$

このとき, positive Weyl chamber $\mathfrak{a}^+$ は以下のように分割される.

$$\mathfrak{a}^+ = \mathcal{D}_1 \sqcup \left[\sqcup_{\emptyset \subsetneq I \subsetneq \Pi} \mathcal{D}_I\right] \sqcup \mathcal{D}_\Pi.$$

ここで, $\mathcal{D}_\Pi$ は $\mathfrak{a}^+$ の有界部分集合であり, 散乱公式には影響しないことに注意する. $\mathcal{D}_1$ 上では, Harish-Chandra 展開と上で述べた手法を組み合わせることで, 散乱公式を示すのに十分な漸近評価が得られる. 一方, $\mathcal{D}_I$ $(I \subset \Pi, \neq \emptyset, \Pi)$ 上では, Harish-Chandra 級数展開の項の順序を入れ替えることで (あるいは, Trombi-Varadarajan 展開の主要項をとることで) 以下のような展開が成り立つ,

$$\varphi_\lambda(e^H) = \sum_{w \in W} e^{(iw\lambda-\rho)(H^I)}\boldsymbol{c}^I(w\lambda)\varphi^I_{(w\lambda)_I}(e^{H_I}) + \cdots.$$

ここで, $\varphi^I_{\lambda_I}$ は I で生成される制限ルート系に付随する対称空間上の初等球関数である. この展開と, 上述の多項式 $\boldsymbol{\pi}_0(\lambda)$ を乗じて, 微分作用素 $\partial(\boldsymbol{\pi}_0)$ を作用させるアイデアを組み合わせることで, 散乱公式を示すのに十分な漸近評価が得られる.

7.3 同時固有関数の散乱公式

散乱公式に現れる振幅関数を導入する. $w \in W$ に対して, $\boldsymbol{\pi}_{0,w}(H) = \boldsymbol{\pi}_0(w^{-1} \cdot H)$, $\boldsymbol{b}_{0,w}(\lambda) = \boldsymbol{\pi}_0(i\lambda)\boldsymbol{c}(w\lambda)$ とおく. $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\text{sing}}$ に対して, 振幅関数 $\boldsymbol{a}_0(x, \lambda_0; w)$ を以下で定義する.

$$\boldsymbol{a}_0(x, \lambda_0; w) = \frac{|W_{\lambda_0}|}{\partial(\boldsymbol{\pi}_0)(\boldsymbol{\pi}_0)}\boldsymbol{\pi}_{0,w}(A^+(x))\boldsymbol{b}_{0,w}(\lambda_0).$$

前述の初等球関数に対する漸近評価を用いることで, φ_{λ_0} に対する散乱公式が得られる.

補題 7.4. $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\text{sing}}$ とする. このとき以下が成り立つ.

$$\mathcal{P}_{\lambda_0}[1](x) = \varphi_{\lambda_0}(x) \simeq \sum_{[w] \in W/W_{\lambda_0}} e^{(iw\lambda_0-\rho)(A^+(x))}\boldsymbol{a}_0(x, \lambda_0; w) \ \text{ in } B^*_{\nu_0/2}(X).$$

ユークリッド空間の場合と同様に, 対称空間 $X = G/K$ 上の G-作用が初等球関数と K-不変な波動関数にどのような影響を与えるか考察する.

$\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $g \in G$ に対して, $F_{\lambda,g}(b) = e^{(-i\lambda+\rho)(A(g\cdot o,b))}$ とおく. このとき, 初等球関数に対して以下が成り立つ.

$$\mathcal{P}_\lambda F_{\lambda,g}(x) = \int_B e^{(+i\lambda+\rho)(A(x,b))} e^{(-i\lambda+\rho)(A(g\cdot o,b))} db = \varphi_\lambda(g^{-1}\cdot x).$$

ユークリッド空間上での補題 2.8 に対応する以下の命題が知られている.

定義 7.5. $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して, $L^2(B)$ の部分空間 $\mathcal{L}^2_\lambda(B)$ を以下で定義する.

$$\mathcal{L}^2_\lambda(B) = \left\{ \sum_{j=1}^r c_j e^{(-i\lambda+\rho)(A(g_j\cdot o,b))}; r \in \mathbb{N}, c_j \in \mathbb{C}, g_j \in G \right\}.$$

補題 7.6 (稠密性). $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して $\mathcal{L}^2_\lambda(B)$ は $L^2(B)$ で稠密.

$\tau(H) = \min_{\alpha\in\Pi} \alpha(H)$ とおく. 動径関数 $A^+(x)$ に対する G-作用に対しては, 以下の評価が成り立つ.

補題 7.7 (cf. [10, Lemma 5.3]). $y = h\cdot o \in X$ と $x \in X_{\mathrm{reg}} \cap (h\cdot X_{\mathrm{reg}})$ に対して,

$$R_+(x,y) = A^+(h^{-1}\cdot x) - A^+(x) + A(y,b_x)$$

とおく. このとき, y に依存するある定数 $C(y)$ が存在して, 以下の評価が成り立つ.

$$|R_+(x,y)| \leqslant C(y)e^{-2\tau(A^+(x))}, \quad x \in X_{\mathrm{reg}} \cap (h\cdot X_{\mathrm{reg}}).$$

補題 7.2, 補題 7.4, 補題 7.6, 補題 7.7 を組み合わせることで, 以下の同時固有関数に対する散乱公式が得られる.

定理 7.8 (Kaizuka [11, Theorem 6.1]). $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$, $F \in L^2(B)$ に対して以下が成り立つ.

$$\mathcal{P}_{\lambda_0}F(x) \simeq \sum_{[w]\in W/W_{\lambda_0}} e^{(iw\lambda_0-\rho)(A^+(x))} \boldsymbol{a}_0(x,\lambda_0;w)[U_{w,\lambda_0}F](b_x) \quad \text{in } B^*_{\nu_0/2}(X).$$

例 7.9 (A_2 型の場合). 制限ルート系が A_2 型の場合に, どの様に振幅関数 $\boldsymbol{a}_0(x,\lambda_0;w)$ に退化が起こるかを具体的に記述する.

(1) $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ が $\langle\alpha_1,\lambda_0\rangle = 0$, $\langle\alpha_j,\lambda_0\rangle \neq 0$ $(j=2,3)$ を満たす場合 (図 2 右側参照): このとき, $\Sigma^0_{\lambda_0} = \{\alpha_1\}$, $\boldsymbol{\pi}_0(\lambda) = \langle\alpha_1,\lambda\rangle$, $W_{\lambda_0} = \{\mathrm{Id}, s_{\alpha_1}\}$, $W/W_{\lambda_0} = \{[\mathrm{Id}],[s_{\alpha_2}],[s_{\alpha_3}]\}$ (ただし, s_α は α に関する鏡映変換を表す). そして, $\nu_0 = 2+2\cdot 1 = 4$ であり, $B^*_{\nu_0/2}(X) = B^*_2(X)$.

$$\boldsymbol{a}_0(x,\lambda_0;w) = \text{const.} \times (w\alpha_1)(A^+(x)).$$

よって, $A^+(x)$ に関して 1 次の退化が起こる.

(2) $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ が $\langle\alpha_j,\lambda_0\rangle = 0$ $(j=1,2,3)$ を満たす場合, すなわち $\lambda_0 = 0$ 場合: このとき, $\Sigma^0_{\lambda_0} = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, $\boldsymbol{\pi}_0(\lambda) = \prod_{j=1}^3\langle\alpha_j,\lambda\rangle$, $W_{\lambda_0} = W$, $W/W_{\lambda_0} = \{[\mathrm{Id}]\}$. そして, $\nu_0 = 2+2\cdot 3 = 8$ であり, $B^*_{\nu_0/2}(X) = B^*_4(X)$.

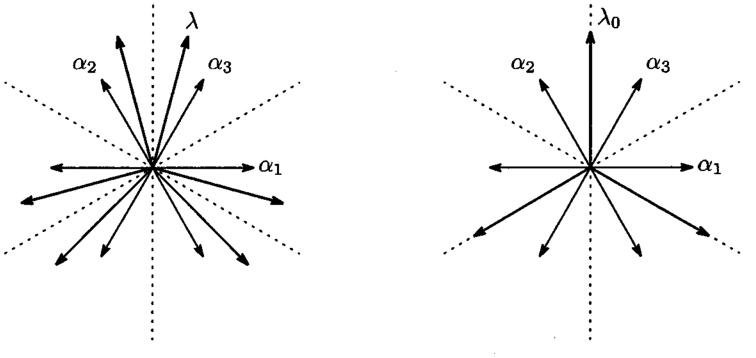
$$\boldsymbol{a}_0(x,\lambda_0;\mathrm{Id}) = \text{const.} \times \prod_{j=1}^3 \alpha_j(A^+(x)).$$

よって, $A^+(x)$ に関して 3 次の退化が起こる.

定理 7.8 により, 定理 6.3 (i) の証明が完了する. 定理 6.3 (ii), (iii) の主張は, 定理 6.3 (i) を用いることで, 正則な場合とほぼ同様の手法で証明される.

最後に, 特異な場合の散乱公式と正則な場合との相違点を述べる. 正則な場合には, $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{reg}}$ の Weyl 群 W による軌道の個数は $|W|$ と一致する. 一方, 特異な場合には, $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathrm{sing}}$ の Weyl 群 W による軌道の個数は $|W|/|W_{\lambda_0}|$ と一致する (図 2 参照). よって, 特異な場合の散乱公式は, 正則な場合の波動関数 $\{e^{(iw\lambda)(H)}\}_{w\in W}$ の一部 (あるいは全部) が合流し, 共鳴を起こすことで振幅が大きくなり退化した, と解釈することが出来る.

図 2: W-軌道 (A_2 型の場合)



8 補遺

[10] と [11] により, 対称空間上の不変微分作用素に付随する同時固有関数に対する定常散乱理論の基礎が完成した. 一方で, Semenov-Tjan-Šanskiĭ [21] は対称空間上の不変微分作用素に対する時間依存する散乱理論 (“波動方程式” に対する散乱理論) を構築している. Semenov-Tjan-Šanskiĭ [21] は, 不変微分作用素の成す代数 $\boldsymbol{D}(X)$ に対して, 以下のような微分方程式系に対する “初期値問題” を導入し, 散乱理論を構築した.

$$\begin{cases} \partial_H(\Gamma(D))u(x,H) = D_x u(x,H), & D \in \boldsymbol{D}(X), \\ (\partial_H(p_j)u)(x,o) = f_j(x), & 1 \leqslant j \leqslant |W|. \end{cases}$$

詳細は省くが, この微分方程式系では $H \in \mathfrak{a}(\simeq \mathbb{R}^l)$ が (多次元の) 時間パラメータの役割を果たしており, ラプラシアンに対する単独の波動方程式の拡張となっている (ランク 1 の場合は (修正) 波動方程式と一致する). その為この微分方程式系は, “multitemporal wave equation” と呼ばれている. “multitemporal wave equation” に対する散乱理論に関連する研究としては, 例えば Helgason [8], Phillips-Shahshahani [20], Shahshahani [22] 等がある.

[付記] 本稿は, 著者の日本数学会 2017 年度春季年会 (於:首都大学東京) における函数解析学分科会特別講演のアブストラクトをもとに, 大幅な加筆・修正を加えたものである.

参考文献

[1] S. Agmon and L. Hörmander, *Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics*, J. Analyse Math. **30** (1976), 1–38.

[2] E. P. van den Ban and H. Schlichtkrull, *Asymptotic expansions and boundary values of eigenfunctions on Riemannian symmetric spaces*, J. Reine Angew. Math. **380** (1987), 108–165.

[3] S. Ben Saïd, T. Oshima, and N. Shimeno, *Fatou's theorems and Hardy-type spaces for eigenfunctions of the invariant differential operators on symmetric spaces*, Int. Math. Res. Not. **16** (2003), 915–931.

[4] A. Boussejra and H. Sami, *Characterization of the L^p-range of the Poisson transform in hyperbolic spaces $B(\mathbb{F}^n)$*, J. Lie Theory **12** (2002), no. 1, 1–14.

[5] S. Helgason, *A duality for symmetric spaces with applications to group representations*, Advances in Math. **5** (1970), 1–154.

[6] ———, "Groups and geometric analysis", Mathematical Surveys and Monographs, vol. 83, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[7] ———, "Geometric analysis on symmetric spaces", 2nd ed., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 39, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[8] ———, *Integral geometry and multitemporal wave equations*, Comm. Pure Appl. Math. **51** (1998), no. 9-10, 1035–1071. Dedicated to the memory of Fritz John.

[9] A. D. Ionescu, *On the Poisson transform on symmetric spaces of real rank one*, J. Funct. Anal. **174** (2000), no. 2, 513–523.

[10] K. Kaizuka, *A characterization of the L^2-range of the Poisson transform related to Strichartz conjecture on symmetric spaces of noncompact type*, Adv. Math. **303** (2016), 464–501.

[11] ———, *A characterization of the L^2-range of the Poisson transform with real and singular spectral parameter on symmetric spaces of noncompact type*, Preprint.

[12] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima, and M. Tanaka, *Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space*, Ann. of Math. (2) **107** (1978), no. 1, 1–39.

[13] P. Kumar, *Fourier restriction theorem and characterization of weak L^2 eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator*, J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 9, 5584–5597.

[14] P. Kumar, S. K. Ray, and R. P. Sarkar, *The role of restriction theorems in harmonic analysis on harmonic NA groups*, J. Funct. Anal. **258** (2010), no. 7, 2453–2482.

[15] ———, *Characterization of almost L^p-eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), no. 6, 3191–3225.

[16] J. B. Lewis, *Eigenfunctions on symmetric spaces with distribution-valued boundary forms*, J. Funct. Anal. **29** (1978), no. 3, 287–307.

[17] N. Lohoué and Th. Rychener, *Some function spaces on symmetric spaces related to convolution operators*, J. Funct. Anal. **55** (1984), no. 2, 200–219.

[18] E. K. Narayanan, A. Pasquale, and S. Pusti, *Asymptotics of Harish-Chandra expansions, bounded hypergeometric functions associated with root systems, and applications*, Adv. Math. **252** (2014), 227–259.

[19] T. Oshima and J. Sekiguchi, *Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space*, Invent. Math. **57** (1980), no. 1, 1–81.

[20] R. S. Phillips and M. M. Shahshahani, *Scattering theory for symmetric spaces of noncompact type*, Duke Math. J. **72** (1993), 1–29.

[21] M. A. Semenov-Tjan-Šanskiĭ, *Harmonic analysis on Riemannian symmetric spaces of negative curvature and scattering theory*, Math. USSR, Izvestija **10** (1976), 535–563.

[22] M. M. Shahshahani, *Invariant hyperbolic systems on symmetric spaces*, Differential geometry (College Park, Md., 1981/1982), Progr. Math., vol. 32, Birkhäuser, Boston, Mass., 1983, pp. 203–233.

[23] P. Sjögren, *Characterizations of Poisson integrals on symmetric spaces*, Math. Scand. **49** (1981), no. 2, 229–249.

[24] R. S. Strichartz, *Harmonic analysis as spectral theory of Laplacians*, J. Funct. Anal. **87** (1989), no. 1, 51–148.

[25] ———, *Corrigendum to: "Harmonic analysis as spectral theory of Laplacians"*, J. Funct. Anal. **109** (1992), no. 2, 457–460.