

# $\alpha$ 乱流におけるエンストロフィー慣性領域の力学

神戸大学 大学院理学研究科 岩山 隆寛\*

Takahiro Iwayama

Department of Planetology, Graduate School of Science, Kobe University

名古屋工業大学 工学研究科 渡邊 威†

Takeshi Watanabe

Department of Physical Science and Engineering,

Graduate School of Engineering, Nagoya Institute of Technology

## 概要

一般化された2次元流体系の強制散逸乱流, しばしば $\alpha$ 乱流と呼ばれる, におけるエンストロフィー慣性領域のエンストロフィースペクトルを理論的に研究する. この系の支配方程式は非圧縮流によってラグランジュ的に移流されるスカラー場と流れ関数との間の関係式に実数パラメーター $\alpha$ を含み, 移流項を通じて $\alpha$ は系のダイナミクスに影響する. これまでの数値実験によりエンストロフィー慣性領域のエンストロフィースペクトルは波数 $k$ の冪則に従い,  $\alpha < 2$ では冪は $\alpha$ に依存するが,  $\alpha > 2$ では冪は $-1$ となることが知られている. この系の渦減衰準正規Markov化完結近似方程式の解析により,  $\alpha = 2$ におけるエンストロフィースペクトルの冪則の転移は, 波数空間内の非局所相互作用が原因であることを示す.

## 1 はじめに

一般化された2次元流体系は, 次の非線型移流方程式,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = D + F, \quad (1a)$$

$$-(-\nabla^2)^{\alpha/2}\psi = q, \quad (1b)$$

に従う系である. ここで,  $\psi(x, t)$  は流れ関数,  $q(x, t)$  は非圧縮性速度場  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla\psi$  により移流されるスカラー場,  $\mathbf{e}_z$  は運動の平面に垂直な単位ベクトル,  $J$  は2次元 Jacobian,  $\alpha$  は実数,  $\nabla^2$  は2次元 Laplacian,  $D$  と  $F$  は散逸項と強制項をそれぞれ表す. この系は, 2次元 Navier–Stokes (2D NS) 方程式に従う強制散逸乱流のエンストロフィー慣性領域における非局所相互作用を研究するために導入されたモデル方程式<sup>(18)</sup> であるが, 地球流体力学的2次元流体系の幾つかも表現できる.<sup>(3), (7), (9), (20)</sup> そこでこの系の乱流特性に関する研究の他にも, デルタ関数的な  $q$  の分布に対する

\* iwayama@kobe-u.ac.jp

† watanabe@nitech.ac.jp

$\psi$  の応答 (Green 関数) の研究<sup>(11)</sup> や、流れの安定性の研究<sup>(10)</sup> などが精力的に行われてきた。本論文では、この系の導入のきっかけになった強制散逸乱流のエンストロフィー慣性領域の話題を議論することにする。以下では、この系に従う乱流状態のことを  $\alpha$  乱流と呼ぶことにする。<sup>\*1</sup>

2D NS 系と同様に散逸と強制がなければ、(1) は 2 つの不変量、一般化エネルギー  $\mathcal{E}_\alpha$  と一般化エンストロフィー  $\mathcal{Q}_\alpha$ ,

$$\mathcal{E}_\alpha \equiv -\frac{1}{2}\overline{\psi q}, \quad (2)$$

$$\mathcal{Q}_\alpha \equiv \frac{1}{2}\overline{q^2}, \quad (3)$$

を持つ。ここで、上線は流れの領域に渡る空間平均を意味する。我々は  $\mathcal{E}_\alpha$  と  $\mathcal{Q}_\alpha$  をそれぞれ簡潔にエネルギーとエンストロフィーと呼ぶ。加えて、 $q$  を一般化渦度もしくは単に渦度と呼ぶ。ただし、それらは  $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{T}$  をそれぞれ長さの単位と時間の単位としたとき、 $[q] = \mathcal{L}^{2-\alpha}\mathcal{T}^{-1}$ ,  $[\mathcal{E}_\alpha] = \mathcal{L}^{4-\alpha}\mathcal{T}^{-2}$ ,  $[\mathcal{Q}_\alpha] = \mathcal{L}^{4-2\alpha}\mathcal{T}^{-2}$  の次元をもつことを注意しておく。

2 つの不変量が存在するために 2D NS 乱流 ( $\alpha = 2$  の場合) と同様に、 $\alpha$  乱流においても波数空間内で 2 つの不変量のカスケード現象が起きることが期待される。強制散逸  $\alpha$  乱流のエンストロフィー慣性領域におけるエンストロフィースペクトル  $Q_\alpha(k)$  は Kraichnan-Leith-Batchelor (KLB) スケーリング<sup>(2),(14),(16)</sup> を適用すると、

$$Q_\alpha(k) \propto k^{-(7-2\alpha)/3}, \quad (4)$$

となる。<sup>(18)</sup> エネルギー慣性領域を解像しない (1) の直接数値シミュレーションによると、<sup>(18),(19)</sup>  $0 < \alpha < 2$  では、KLB スケーリングによる予測 (4) は妥当であるが、 $2 \leq \alpha$  では、KLB スケーリングによる予測は破綻する。この KLB スケーリングの予測の破綻は、KLB スケーリングが波数空間内における相互作用の局所性を仮定していることに依っていることが指摘されていた。<sup>(18),(19)</sup> そこで、Watanabe & Iwayama (2004)<sup>(21)</sup> では、KLB スケーリングに波数空間内の非局所相互作用の効果を取り入れること (以下ではこれを修正された KLB スケーリングと呼ぶ) により、 $\alpha$  の全ての値に適用できるエンストロフィー慣性領域のエンストロフィースペクトルの統一的な形を導出した。彼らの統一的スペクトルは、 $\alpha < 2$  では KLB スケーリングの結果 (4) に一致し、 $\alpha = 2$  では Kraichnan (1971)<sup>(15)</sup> により提唱された KLB スケーリングに対する対数補正を導き、 $\alpha > 2$  では  $\alpha$  の値によらずエンストロフィースペクトルは  $k^{-1}$  に飽和する。すなわち、

$$Q_\alpha(k) \propto \begin{cases} k^{-(7-2\alpha)/3}, & (0 < \alpha < 2), \\ k^{-1} \ln k, & (\alpha = 2), \\ k^{-1}, & (2 < \alpha). \end{cases} \quad (5)$$

これらの結果は、エネルギー慣性領域を解像しない (1) の数値実験により正当性が確認されている。<sup>(18),(19),(21),(22)</sup>

このように、強制散逸  $\alpha$  乱流のエンストロフィー慣性領域では、波数空間内の非局所相互作用により、エンストロフィースペクトルの幕則が  $\alpha = 2$  で転移し、修正された KLB スケーリングによ

<sup>\*1</sup> この系が提唱された当初は、主にこの系の乱流特性が調べられたこと、そして (1) にパラメター  $\alpha$  が含まれていることから、この系は  $\alpha$  乱流系と呼ばれていたが、現在では乱流研究以外にも注目が集まり研究が行われてきたので、一般化された 2 次元流体系と呼ばれるようになっていく。

て冪則の転移を説明することに成功している。一方で、 $\alpha$  乱流の完結近似方程式を用いたエンストロフィースペクトルの冪則の転移の導出は、未だ行われていない。

最近 Burgess & Shepherd (2013)<sup>(6)</sup> (以下, BS13 と略記する) は一般化された 2 次元流体系の渦減衰準正規 Markov 化 (EDQNM) 完結近似方程式を導入した。彼らはこの EDQNM 完結近似方程式を用いて、強制散逸  $\alpha$  乱流のエネルギー慣性領域の自己相似性について研究し、エネルギー慣性領域では KLB スケーリングを仮定すると、 $\alpha \geq 5/2$  に対してエネルギーフラックスが高波数側に、エンストロフィーフラックスが低波数側に向くことを示した。このことにより、KLB スケーリングはエネルギー慣性領域では  $\alpha \geq 5/2$  に対して破綻すると結論した。この予測の正当性は、数値実験により確認されている。<sup>(5), (6), (8)</sup> いっぽう、著者ら<sup>(12)</sup> は、この EDQNM 完結近似方程式を使って、赤外領域 ( $k \rightarrow 0$ ) のエンストロフィースペクトルの冪則は  $\alpha$  の値に依存しないことを示した。さらに、彼らは一般化された 2 次元流体系の渦粘性は低波数極限においても一般に異常拡散型であり、2DNS のときのみ正常拡散型であることを EDQNM の漸近解析によって導き、数値実験による検証によってその正当性を確かめている。<sup>(8)</sup> このように BS13 で提出された一般化された 2 次元流体系の EDQNM 完結近似方程式は、 $\alpha$  乱流の研究に有用な道具となっている。なお、BS13 では、エネルギー慣性領域だけでなく、エンストロフィー慣性領域の自己相似性についても言及している。しかしながら、 $\alpha \geq 2$  におけるスペクトルの冪則は導かれていない。

本研究では、BS13<sup>(6)</sup> により導入された EDQNM 完結方程式におけるエンストロフィーフラックスに対して、波数空間内の非局所相互作用が及ぼす影響を漸近解析によって取り出し、さらに BS13 によって提出された EDQNM 完結近似方程式を修正することにより、エンストロフィー慣性領域のスペクトル (5) が実際に導かれることを示す。これにより、 $\alpha$  乱流系のエンストロフィー慣性領域におけるエンストロフィースペクトルをめぐる議論は、次元解析的現象論による導出 (修正された KLB スケーリング<sup>(21)</sup>) と完結近似方程式に基づく導出によってより強固なものになる。

この論文は以下のように構成されている。§ 2 では、一般化された 2 次元流体系における EDQNM 完結近似方程式を簡潔に紹介する。§ 3 では予備的な解析として BS13 の方法に従って EDQNM 完結近似方程式からエンストロフィー慣性領域のスペクトルを導出し、さらにエンストロフィー輸送に寄与する三波の性質を調べる。この節では、 $\alpha < 2$  のエンストロフィースペクトルの導出のみ成功する。§ 4 では、前節の結果を参考にして、Basdevant *et al.* (1978) (以下, BLS78 と略記する) の方法に従って EDQNM 完結近似方程式においてエンストロフィーフラックスに対する波数空間内の非局所相互作用の効果を見積もり (5) を導く。§ 4 における導出の詳細は、著者らの最近の論文<sup>(13)</sup> に書かれているので、それについてはここでは繰り返さない。§ 5 は EDQNM 完結近似方程式の数値計算の結果とそれからの示唆について述べる。

## 2 一般化された 2 次元流体系の EDQNM 完結近似方程式

本論文の議論の出発点はエンストロフィースペクトルの発展方程式

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\nu_p k^{2p} \right) Q_\alpha(k) = -\frac{\partial \Pi_\alpha^Q(k)}{\partial k}, \quad (6)$$

である。ここで我々は先ず一辺が  $L$  の正方形で、二重周期境界条件を満たす領域に閉じ込められた系を考察する。さらに (1a) の粘性項  $\mathcal{D}$  は超粘性項、

$$\mathcal{D} = -\nu_p (-\nabla^2)^p q, \quad (7)$$

であり、解析のために強制項  $\mathcal{F}$  はゼロと設定しているが、強制問題を想定している。<sup>\*2</sup> また、物理量は一様等方性を仮定し、 $L \rightarrow \infty$  の極限をとることで波数は連続的な変数として扱かう。超粘性係数  $\nu_p$  と粘性の階数  $p$  は共に正の量である。

エンストロフィーフラックス  $\Pi_\alpha^\mathcal{Q}(k)$  は三波エンストロフィー伝達関数  $T_\alpha^\mathcal{Q}(k, l, m)$  を用いて、

$$\Pi_\alpha^\mathcal{Q}(k) = \frac{1}{2} \int_k^\infty dk' \int_0^\infty dl \int_0^\infty dm T_\alpha^\mathcal{Q}(k', l, m), \quad (8)$$

と表される。 $T_\alpha^\mathcal{Q}(k, l, m)$  が詳細保存則、

$$T_\alpha^\mathcal{Q}(k, l, m) + T_\alpha^\mathcal{Q}(l, m, k) + T_\alpha^\mathcal{Q}(m, k, l) = 0, \quad (9)$$

を満足し、 $l$  と  $m$  との置換に関して対称な性質、

$$T_\alpha^\mathcal{Q}(k, l, m) = T_\alpha^\mathcal{Q}(k, m, l), \quad (10)$$

を持つことから、エンストロフィーフラックス  $\Pi_\alpha^\mathcal{Q}(k)$  は2つの部分に分解することができる:

$$\Pi_\alpha^\mathcal{Q}(k) = \Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(+)}(k) - \Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(-)}(k), \quad (11a)$$

$$\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(+)}(k) = \int_k^\infty dk' \int_0^k dl \int_0^l dm T_\alpha^\mathcal{Q}(k', l, m), \quad (11b)$$

$$\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(-)}(k) = \int_0^k dk' \int_k^\infty dl \int_l^\infty dm T_\alpha^\mathcal{Q}(k', l, m). \quad (11c)$$

$\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(+)}(k)$  は  $l$  と  $m$  が共に  $k$  よりも小さいような相互作用により、 $k$  よりも大きな波数モードへの正味のエンストロフィー流入であり、一方  $\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(-)}(k)$  は  $l$  と  $m$  が共に  $k$  よりも大きいような相互作用により  $k$  よりも小さな波数モードへの正味のエンストロフィー流入である。

一般化された2次元流体系の EDQNM 完結近似方程式を用いた我々の以前の研究<sup>(8),(12)</sup> では、 $\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(-)}(k)$  に対する非局所相互作用の寄与を議論した。本論文では、 $\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(+)}(k)$  に対する非局所相互作用の寄与を議論する。

準正規 Markov 化近似<sup>(6),(17)</sup> を用いると、三波エンストロフィー伝達関数はエンストロフィースペクトルを用いて、

$$T_\alpha^\mathcal{Q}(k, l, m) = \frac{2k^{\alpha+2}}{\pi lm} \theta_{klm} \left\{ 2a_{klm} \frac{k}{(lm)^\alpha} Q_\alpha(l) Q_\alpha(m) - b_{klm} \frac{l}{(mk)^\alpha} Q_\alpha(m) Q_\alpha(k) - b_{kml} \frac{m}{(kl)^\alpha} Q_\alpha(k) Q_\alpha(l) \right\}, \quad (12)$$

<sup>\*2</sup> のちの理論的解析では統計的定常性を仮定する。

と書ける. ここで  $T_\alpha^Q(k, l, m)$  は  $k, l, m$  が  $k + l + m = 0$  となる三角形を形成するような  $(l, m)$  平面の領域の外側ではゼロであるとする.

$$a_{klm} = \frac{b_{klm} + b_{kml}}{2}, \quad (13a)$$

$$b_{klm} = 2 \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(k^\alpha - m^\alpha)\sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2}(lm)^{\alpha-2}}, \quad (13b)$$

$$b_{kml} = 2 \frac{(m^\alpha - l^\alpha)(k^\alpha - l^\alpha)\sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2}(lm)^{\alpha-2}}, \quad (13c)$$

は幾何学因子で  $x$  は三角形  $k + l + m = 0$  の長さ  $k$  の辺と向かい合う内角の余弦である:

$$x = \frac{l \cdot m}{lm}. \quad (14)$$

関数  $\theta_{klm}$  は三波  $(k, l, m)$  に伴う 3 次モーメントの緩和時間であり,  $\theta_{klm}$  に渦減衰の効果を導入した近似が渦減衰準正規 Markov 化 (EDQNM) 近似<sup>(17)</sup> と参照される. その近似では  $\theta_{klm}$  は次元解析により以下のように表現される:<sup>(6)</sup>

$$\theta_{klm} = \frac{1}{\mu_{klm}}, \quad (15a)$$

$$\mu_{klm} = \mu_k + \mu_l + \mu_m, \quad (15b)$$

$$\mu_k = \lambda [k^{5-2\alpha} Q_\alpha(k)]^{1/2}. \quad (15c)$$

後の節では, 修正された KLB スケーリング<sup>(21)</sup> の議論を参考に, BS13 により導入された (15c) を

$$\mu_k = \lambda \left[ \int_{k_b}^k k'^{4-2\alpha} Q_\alpha(k') dk' \right]^{1/2}. \quad (16)$$

と修正したものを用いることにする. (16) における比例係数  $\lambda$  は今のところ未決定であるが,  $\lambda$  の具体的な値は後の議論の結論に無関係であることを注意しておく.  $k_b$  は赤外発散を避けるために導入した波数で,  $0 < k_b \ll k$  である.

### 3 予備的解析

エンストロフィー慣性領域の力学に寄与する三波相互作用を調べるために, Burgess & Shepherd(2013)<sup>(6)</sup> で行われたエネルギー慣性領域の解析を参考にして, EDQNM 完結近似されたエンストロフィーフラックスを解析する.

#### 3.1 波数の規格化

$\Pi_\alpha^{Q(+)}(k)$  に寄与する三波  $(k', l, m)$ , ただし, これらの大小関係は  $m \leq l \leq k \leq k'$  である, を Type A,  $\Pi_\alpha^{Q(-)}(k)$  に寄与する三波  $(k', l, m)$ , ただし, これらの大小関係は  $k' \leq k \leq l \leq m$  である, を Type B の三波と呼ぶことにする.<sup>(6)</sup>  $k$  は注目する波数である.

中間の波数  $l$  を注目する波数  $k$  で  $l = k/u$  と規格化し, さらに三波のその他の波数を  $l$  を用いて, 最小波数を  $lv$ , 最大波数を  $lw$  と規格化する.

### 3.2 三波エンストロフィー伝達関数の表現

次に, (11b), (11c) に含まれる三波エンストロフィー伝達関数の変形を行う. 先ず, エンストロフィーの詳細保存則 (9) とエネルギーの詳細保存則,

$$k^{-\alpha}T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(k, l, m) + l^{-\alpha}T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(l, m, k) + m^{-\alpha}T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(m, k, l) = 0,$$

より, 三波エンストロフィー伝達関数は

$$T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(k', l, m) = \frac{m^{\alpha} - l^{\alpha}}{k'^{\alpha} - m^{\alpha}} \frac{k'^{\alpha}}{l^{\alpha}} T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(l, m, k') \quad (17)$$

とかける. 前小節の波数の規格化を適用すると, Type A, Type B の相互作用それぞれについて, 三波エンストロフィー伝達関数の表現,

$$T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(k', l, m) = \frac{1 - v^{\alpha}}{v^{\alpha} - w^{\alpha}} w^{\alpha} T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(l, lv, lw), \quad (18a)$$

$$T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(k', l, m) = \frac{w^{\alpha} - 1}{v^{\alpha} - w^{\alpha}} v^{\alpha} T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(l, lv, lw), \quad (18b)$$

を得る.

さらに, エンストロフィースペクトルが冪的スペクトルに従うと仮定する:

$$Q_{\alpha}(k) = C_{\alpha} k^{-n}. \quad (19)$$

即ち, 我々は無限に広いエンストロフィー慣性領域を考えることにし, エネルギー慣性領域の存在は無視することを仮定している. この仮定は理論的解析を簡単にする. さらに第1節で述べたように, KLB スケーリングの実現や  $k^{-1}$  への転移を示す数値シミュレーションでは, エンストロフィー慣性領域のみを解像しているので, このことはエネルギー慣性領域を解像しない仮定と整合的である. このとき, 三波エンストロフィー伝達関数のスケーリングは  $5 - 2\alpha - n$  の符号に依存する.  $5 - 2\alpha - n > 0$  の時には

$$T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(l, lv, lw) = \left(\frac{k}{u}\right)^{(1-2\alpha-3n)/2} T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(1, v, w) \quad (20)$$

となる. 一方,  $5 - 2\alpha - n < 0$  の時には

$$T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(l, lv, lw) = \left(\frac{k}{u}\right)^{3-2\alpha-2n} T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(1, v, w) \quad (21)$$

である.

$5 - 2\alpha - n > 0$  の時には (11b), (11c) は

$$\Pi_{\alpha}^{\mathcal{Q}(\pm)}(k) = k^{(7-2\alpha-3n)/2} \int_0^1 dv L_{\alpha}^{\mathcal{Q}(\pm)}(v), \quad (22a)$$

$$L_{\alpha}^{\mathcal{Q}(\pm)}(v) = \int_1^{1+v} dw W_{\alpha}^{\mathcal{Q}(\pm)}(v, w, n) T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(1, v, w), \quad (22b)$$

$$W_{\alpha}^{\mathcal{Q}(+)}(v, w, n) = \frac{1 - v^{\alpha}}{v^{\alpha} - w^{\alpha}} w^{\alpha} \int_1^w du u^{(n+2\alpha-9)/2}, \quad (22c)$$

$$W_{\alpha}^{\mathcal{Q}(-)}(v, w, n) = \frac{w^{\alpha} - 1}{v^{\alpha} - w^{\alpha}} v^{\alpha} \int_1^w du u^{(n+2\alpha-9)/2}, \quad (22d)$$

と書ける.  $L_\alpha^{\mathcal{Q}(\pm)}(v)$ ,  $W_\alpha^{\mathcal{Q}(\pm)}(v, w, n)$  はそれぞれ局所関数, 重み関数と呼ばれる. エンストロフィー慣性領域ではエンストロフィーフラックスは波数  $k$  に依存しないので, (22) より

$$n = \frac{7 - 2\alpha}{3} \quad (23)$$

を得る.  $5 - 2\alpha - n > 0$  の条件と (23) は  $\alpha < 2$  を意味する. 即ち,  $\alpha < 2$  における KLB スケーリングが完結近似方程式から導かれる.

一方,  $5 - 2\alpha - n < 0$  の時には (22) は

$$\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(\pm)}(k) = k^{6-2\alpha-2n} \int_0^1 dv L_\alpha^{\mathcal{Q}(\pm)}(v) \quad (24a)$$

$$W_\alpha^{\mathcal{Q}(+)}(v, w, n) = \frac{1 - v^\alpha}{v^\alpha - w^\alpha} w^\alpha \int_1^w du u^{2n+2\alpha-7}, \quad (24b)$$

$$W_\alpha^{\mathcal{Q}(-)}(v, w, n) = \frac{w^\alpha - 1}{v^\alpha - w^\alpha} v^\alpha \int_1^w du u^{2n+2\alpha-7}, \quad (24c)$$

と変更される. ただし,  $L_\alpha^{\mathcal{Q}(\pm)}(v)$  は不変である. エンストロフィー慣性領域ではエンストロフィーフラックスは波数  $k$  に依存しないので, (24) より

$$n = 3 - \alpha \quad (25)$$

を得る.  $5 - 2\alpha - n < 0$  の条件と (25) は  $\alpha > 2$  を意味する. つまり単に (16) のように  $\theta_{klm}$  に非局所性を導入しただけでは,  $\alpha > 2$  における  $k^{-1}$  への転移を導けない.

$\alpha > 2$  に対するエンストロフィースペクトル  $k^{-1}$  の導出に失敗しているが, このまま解析を進めることにする.

### 3.3 エンストロフィー慣性領域に寄与する三波相互作用

エンストロフィー慣性領域の形成に寄与する三波を調べるために, エンストロフィー散逸率  $\eta_\alpha \equiv \Pi_\alpha^{\mathcal{Q}}(k)$  で規格化された  $\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(+)}(k)$ ,  $\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(-)}(k)$  を図 1 に示す. (22) における積分は,  $dv = dw = 2 \times 10^{-4}$  の解像度で数値的に行った. 解像度が  $dv = dw = 10^{-3}$  の場合でも結果が変わらないことを確認している. 図 1 は,  $\alpha$  が小さい場合には, 正味のフラックス  $\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}}(k)$  に対する  $\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(+)}(k)$  と  $\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(-)}(k)$  の寄与は同程度であるが,  $\alpha$  が大きくなるにつれて  $\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(+)}(k)$  の寄与が増大することを示している. 上で得られたエンストロフィー慣性領域のフラックスの 2 つの項の寄与の  $\alpha$  依存性は Watanabe & Iwayama (2007)<sup>(22)</sup> による直接数値実験の結果 (Watanabe & Iwayama(2007) の FIG.6) と整合的である.

さらに, エンストロフィー慣性領域のエンストロフィー輸送がどのような形の三波で行われているかを調べてみる. 局所関数  $L_\alpha^{\mathcal{Q}(\pm)}(v)$  が極大値をもつ  $v$  の値,  $v_{\max}^{\mathcal{Q}(\pm)}$ , の  $\alpha$  依存性を図 2 に示す. 図 2 は,  $v_{\max}^{\mathcal{Q}(-)}$  は  $\alpha$  の値に依存しないが,  $v_{\max}^{\mathcal{Q}(+)}$  は  $\alpha$  の値とともに減少し,  $\alpha = 5/4$  で最低波数に達することを示している.

以上の解析をまとめると, エンストロフィー慣性領域では, Type A の三波による低波数から高波数へのフラックスと Type B による高波数から低波数へのフラックスがあり, 前者と後者の差し引きとして全ての  $\alpha$  で低波数から高波数へ向けてエンストロフィーが輸送される.  $\alpha$  が大きくなるにつれ

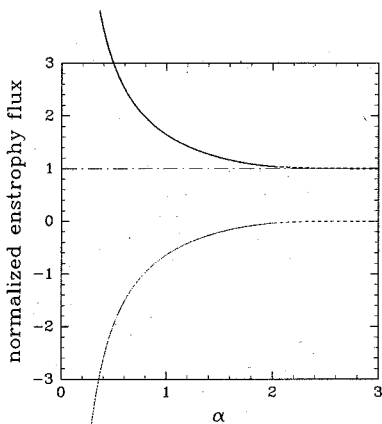


図1 エンストロフィー散逸率で規格化したエンストロフィー慣性領域のエンストロフィーフラックスの  $\alpha$  依存性. 太線は  $\Pi_{\alpha}^{\mathcal{Q}(+)}(k)/\eta_{\alpha}$ , 細線は  $-\Pi_{\alpha}^{\mathcal{Q}(-)}(k)/\eta_{\alpha}$ , 一点破線は正味のエンストロフィーフラックスである.  $\alpha > 2$  ではエンストロフィースペクトルのスケーリング則の導出に失敗しているので, 参考のために点線で記している.

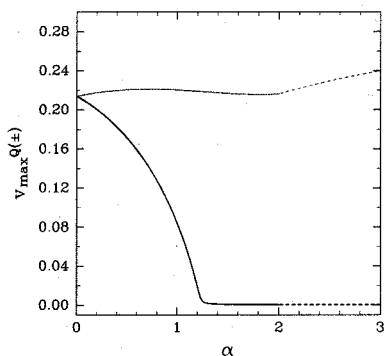


図2 局所性関数  $L_{\alpha}^{\mathcal{Q}(\pm)}(v)$  が最大となる波数比  $v_{\max}^{\mathcal{Q}(\pm)}$  の  $\alpha$  依存性. 太線は  $v_{\max}^{\mathcal{Q}(+)}$  を, 細線は  $v_{\max}^{\mathcal{Q}(-)}$  を表す. 図1と同様に  $\alpha > 2$  ではエンストロフィースペクトルのスケーリング則の導出に失敗しているので, 参考のために点線で記している.

て Type B の三波によるエンストロフィーフラックスは小さくなり, エンストロフィー慣性領域のエンストロフィーフラックスは  $\alpha \gtrsim 2$  では Type A だけが担う. さらに,  $\alpha$  が大きくなるにつれて Type A の三波のうち最低波数と中間の波数との比がより小さな非局所な三波がエンストロフィーフラックスを担うようになる.



## 4 EDQNM 完結近似方程式を用いたエンストロフィースペクトルの転移の導出

この節では、前節の議論を参考にしながら Basdevant *et al.*(1978)<sup>(1)</sup> によって提唱された方法で EDQNM 完結近似方程式におけるエンストロフィーフラックスに対する波数空間内の非局所相互作用の効果を見積もり、 $\alpha$  乱流のエンストロフィー慣性領域におけるエンストロフィースペクトル (5) を導出する。以下では  $\alpha > 0$  の場合だけを議論する。

前節の解析から  $\alpha > 2$  では Type A の三波によるエンストロフィーフラックスが卓越することが示されたので、 $\Pi_{\alpha}^{Q(+)}(k)$  に注目する。さらに、 $m \ll l < k < k'$  となる非局所な三波による寄与を取り出す。計算の詳細は Iwayama & Watanabe (2016)<sup>(13)</sup> にあるのでここでは割愛する。エンストロフィーフラックスに対する  $m \ll l < k < k'$  となる三波 ( $k', l, m$ ) の効果は、

$$\Pi_{\alpha\text{NL}}^{Q(+)}(k) \simeq \frac{1}{4} \theta_{kk0} \left\{ \underbrace{-k^3 \frac{\partial k^{-1} Q_{\alpha}(k)}{\partial k} \int_{k_b}^{ak} m^{4-2\alpha} Q_{\alpha}(m) dm}_{\equiv \text{I}} + \alpha k^{-\alpha} \{Q_{\alpha}(k)\}^2 \int_{k_b}^{ak} m^{5-\alpha} dm}_{\equiv \text{II}} \right\} \quad (26)$$

となる。

エンストロフィーフラックスに対する非局所相互作用の効果は、(26) において 2 つの項、I, II, で表現されている。いま、自己相似なスペクトル (19) を仮定し、この 2 つの項の大きさを見積もってみる。この見積もりには  $\theta_{klm}$  の関数形は無関係であることに注意しておく。物理的に理にかなった系では  $\alpha < 3$  であること<sup>(11)</sup> を要請する。十分に広いエンストロフィー慣性領域の仮定から一般性を失うことなく  $k_b/k = \mathcal{O}(a^2)$  と仮定する。乱流的なスペクトルでは、エンストロフィー等分配スペクトル ( $n = -1$ ) よりも急峻なスペクトル ( $n > -1$ ) になることが期待されるから、このような場合には I の項は、II の項に比べて支配的になる。したがって、

$$\Pi_{\alpha\text{NL}}^{Q(+)}(k) \simeq -\frac{1}{4} \theta_{kk0} k^3 \frac{\partial k^{-1} Q_{\alpha}(k)}{\partial k} \int_{k_b}^{ak} m^{4-2\alpha} Q_{\alpha}(m) dm. \quad (27)$$

(27) のエンストロフィーフラックスの形は、2DNS 系に対して Kraichnan(1971)<sup>(15)</sup> によって導かれたフラックス (4.3) の  $\alpha$  乱流に対する一般化である。(27) における積分は、 $T^{-2}$  の次元を持つことに注意する。そこで、これは  $ak$  よりも小さな波数をもつ平均シアーの 2 乗を表す、と解釈できるだろう。(27) はエンストロフィー等分配スペクトル  $Q_{\alpha}(k) \propto k^1$  のときに、エンストロフィーフラックス (27) はゼロになることに注意しておく。

(27) からエンストロフィー慣性領域のエンストロフィースペクトルの幕則を導出する。エンストロフィースペクトルが、自己相似形 (19) を持つと仮定する。このとき、

1.  $5 - 2\alpha - n > 0$  のとき

(27) は

$$\Pi_{\alpha\text{NL}}^Q(k) \simeq \frac{(n+1)C_\alpha^{3/2}}{8\lambda\sqrt{5-2\alpha-n}} a^{(5-2\alpha-n)/2} k^{(7-2\alpha-3n)/2}, \quad (28)$$

となる。エンストロフィー慣性領域では、エンストロフィーフラックスは波数に依らない一定値なので、(28) より KLB スケーリング, (23) を得る。さらに、 $5-2\alpha-n > 0$  の条件は、 $\alpha < 2$  となる。また、小さなパラメーター  $a$  の冪指数は正值であるので、今考えている非局所相互作用によるエンストロフィーフラックスは小さい。

2.  $5-2\alpha-n < 0$  のとき

(27) は

$$\Pi_{\alpha\text{NL}}^Q(k) \simeq \frac{(n+1)C_\alpha^{3/2}}{8\lambda\sqrt{|5-2\alpha-n|}} k_b^{(5-2\alpha-n)/2} k^{1-n}, \quad (29)$$

となる。再び、エンストロフィー慣性領域では、エンストロフィーフラックスは波数に依らない一定値なので、(29) より、

$$n = 1, \quad (30)$$

を得る。さらに、 $5-2\alpha-n < 0$  の条件は、 $\alpha > 2$  となる。また、小さなパラメーター  $k_b$  の冪指数は負値であるので、今考えている非局所相互作用によるエンストロフィーフラックスは大きいことがわかる。

3.  $5-2\alpha-n = 0$  のとき

Kraichnan(1971)<sup>(15)</sup> によって導かれた NS 方程式系におけるエンストロフィー慣性領域のエンストロフィースペクトルの KLB スケーリングに対する対数補正

$$Q_2(k) \propto k^{-1} [\ln(k/k_b)]^{-1/3}, \quad (k \ll k_b) \quad (31)$$

が  $k \gg k_b$  の leading order として導かれる。

まとめると、EDQNM 完結近似方程式の解析によると、 $0 < \alpha < 2$  では、 $m \ll l < k < k'$  となる三波  $(k', l, m)$  のエンストロフィーフラックスへの寄与は小さく、エンストロフィー慣性領域のエンストロフィースペクトルは、KLB スケーリングの予測に一致する。一方、 $2 < \alpha$  では、 $m \ll l < k < k'$  となる三波  $(k', l, m)$  のエンストロフィーフラックスへの寄与は大きく、エンストロフィー慣性領域のエンストロフィースペクトルは、KLB スケーリングの予測からずれ、 $Q_\alpha(k) \propto k^{-1}$  となる。

## 5 議論

本節では EDQNM 完結近似方程式 (6) を数値計算した結果を示す。数値計算では (6) における粘性項は高波数側に働く超粘性だけでなく、低波数側に働く粘性も考慮した

$$d(k) = 2\nu_p k^{2p} + 2\gamma_s \left( \frac{k_\gamma}{k} \right)^{2s} \quad (32)$$

を採用した。このことは強制項により注入されたエネルギーが逆カスケードにより低波数に集積することを防ぐためである。また、Bos & Bertoglio(2009)<sup>(4)</sup>に従って (16) にも (32) の効果を導入しておく：

$$\mu_k = \lambda \left[ \int_{k_b}^k k'^{4-2\alpha} Q_\alpha(k') dk' \right]^{1/2} + d(k). \quad (33)$$

数値計算は、波数を線形離散化した場合 ( $k_i = i\Delta k$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ) と対数離散化した場合 ( $k_i = e^{i\Delta n}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ) の結果を比較する。ここで、 $k_i$  は数値計算における波数である。採用したパラメータは、線形離散化では  $\Delta k = 1$ ,  $N = 512$ , 対数離散化では  $\Delta n = 0.1949476$ ,  $N = 32$  である。この  $\Delta n$  は  $N = 32$  としたときに最大波数が線形離散化したものと一致するように選んでいる。時間発展は  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$  とした 2 次精度の Adams-Bashforth 法を採用した。強制項は  $1 \leq k \leq 8$  でのみ値を与え、その大きさはエンストロフィー注入率が波数空間の離散化に依存せず 0.04 となるように選んだ。(32), (33) におけるパラメータは  $p = 4$ ,  $s = 4$ ,  $k_\gamma = 2$ ,  $\gamma_s = 0.005$ ,  $\lambda = 1$  の値を採用した。超粘性係数  $\nu_4$  は  $\alpha$  の値に応じて表 1 に示した値を採用した。定常状態に達

表 1 EDQNM 完結近似方程式の数値計算に使用した超粘性係数の値。

$\alpha$	1	1.5	2	2.5	3
$\nu_4$	$5 \times 10^{-20}$	$2 \times 10^{-20}$	$8 \times 10^{-21}$	$3 \times 10^{-21}$	$1 \times 10^{-21}$

した時刻におけるエンストロフィースペクトルを、線形離散化した場合について図 3 に、対数離散化した場合について図 4 に示した。比較のため図 3 には KLB スケーリングから予測されるスペクトル (4) と  $k^{-1}$  を、図 4 には  $\alpha < 2$  については KLB スケーリング (4),  $\alpha > 2$  については (25) の指数を持ったスペクトル (19) を記入している。 $\alpha < 2$  では線形離散化した場合、対数離散化した場合ともに KLB スケーリング (4) に従うエンストロフィースペクトルが得られるが、 $\alpha > 2$  の場合は、波数の離散化の仕方によって結果が異なる。線形離散化をした場合には  $k^{-1}$  へのスペクトルの飽和が見られるが、対数離散化した場合には (25) の指数を持ったスペクトル (19) が得られている。対数離散化した場合には波数が大きい領域でほぼ同じ大きさを持った波数 (例えば  $l \simeq k$ ) を解像することができない。そこで  $m \ll l \simeq k$  となる非局所な三波によるエンストロフィーフラックスが表現できないために、(25) に従うスペクトルが得られたと解釈できる。このことは 3, 4 節で展開してきた議論と整合的である。

## 6 結論

EDQNM 完結近似方程式を用いて、強制散逸  $\alpha$  乱流におけるエンストロフィー慣性領域の力学を考察してきた。 $\alpha$  が小さい場合には、エンストロフィーフラックスは低波数側にも高波数側に向き、それらの僅かな差が正味の高波数向きエンストロフィーフラックスとなる。 $\alpha$  が増大すると正味のエンストロフィーフラックスは高波数向きのフラックスだけで占められ、エンストロフィーフラックスには非局所な三波の寄与が卓越する。このような特徴を考慮すると EDQNM 完結近似方程式から  $\alpha > 2$  に対するエンストロフィー慣性領域のエンストロフィースペクトル、 $k^{-1}$ , が理論的に導け

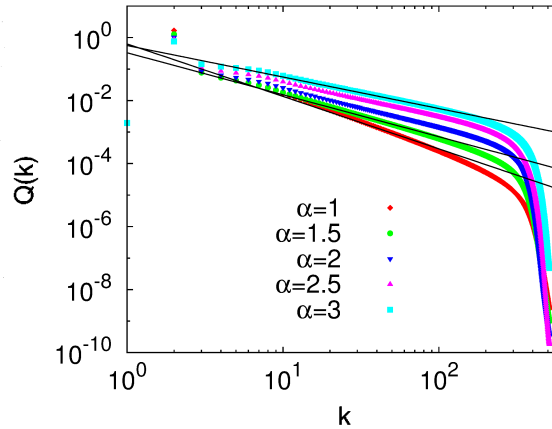


図3 EDQNM 完結近似方程式を数値計算した結果得られたエンストロフィースペクトル. 波数を線形離散化した場合. 黒実線は上から順に  $k^{-1}$  の傾き,  $\alpha = 1.5, 1$  とした場合の (4) である.

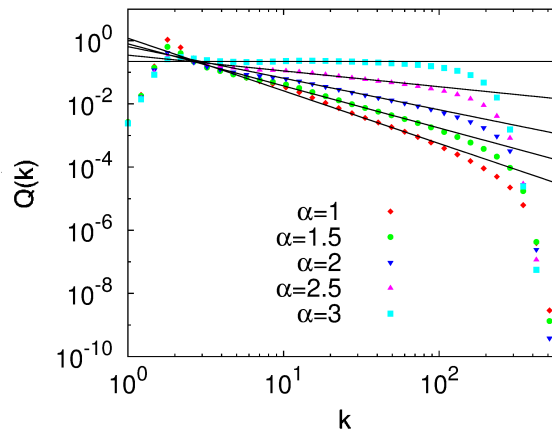


図4 EDQNM 完結近似方程式を数値計算した結果得られたエンストロフィースペクトル. 波数を対数離散化した場合. 黒実線は上から順に  $\alpha = 3, 2.5, 2$  とした場合の  $k^{-3+\alpha}$  の傾き, 及び  $\alpha = 1.5, 1$  とした場合の (4) である.

る. 完結近似方程式の数値計算において波数を対数離散化した場合には, 非局所な三波相互作用が数値計算で解像できないために誤ったスペクトルを得ることがある. 完結近似方程式を数値計算する際に, 波数を対数離散化した結果と線形離散化した場合とを比較することにより, スペクトルの形成に対する非局所三波相互作用の寄与の重要性を調べることが可能となることを本研究の結果は示唆している.

## 謝辞

本研究は日本学術振興会からの科学研究費 (基盤研究 (C) No. 15K05288) の援助を受けて行われた.

## 参考文献

- [1] C. Basdevant, M. Lesieur, and R. Sadourny. Subgrid-scale modeling of enstrophy transfer in two-dimensional turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **35**:1028, 1978.
- [2] G. K. Batchelor. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids Suppl. II*, **12**: 233, 1969.
- [3] W. Blumen. Uniform potential vorticity flow: Part I. theory of wave interactions and two-dimensional turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **35**: 774, 1978.
- [4] W. J. T. Bos and J.-P. Bertoglio. Large-scale bottleneck effect in two-dimensional turbulence. *J. Turb.*, **10**: N30, 2009.
- [5] B. H. Burgess, R. K. Scott, and T. G. Shepherd. Kraichnan-Leith-Batchelor similarity theory and two-dimensional inverse cascades. *J. Fluid Mech.*, **767**: 467, 2015.
- [6] B. H. Burgess and T. G. Shepherd. Spectral nonlocality, absolute equilibria, and Kraichnan-Leith-Batchelor phenomenology in two-dimensional turbulent energy cascades. *J. Fluid Mech.*, **725**: 332, 2013.
- [7] I. M. Held, R. T. Pierrehumbert, S. T. Garner, and K. L. Swanson. Surface quasi-geostrophic dynamics. *J. Fluid Mech.*, **282**: 1, 1995.
- [8] T. Iwayama, S. Murakami, and T. Watanabe. Anomalous eddy viscosity for two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **27**: 045104, 2015.
- [9] T. Iwayama, T. G. Shepherd, and T. Watanabe. An ‘ideal’ form of decaying two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, **456**: 183, 2002.
- [10] T. Iwayama, M. Sueyoshi, and T. Watanabe. Linear stability analysis of parallel shear flows for an inviscid generalized two-dimensional fluid system. *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**: 065501, 2013.
- [11] T. Iwayama and T. Watanabe. Green’s function for a generalized two-dimensional fluid. *Phys. Rev. E*, **82**: 036307, 2010.
- [12] T. Iwayama and T. Watanabe. Universal spectrum in the infrared range of two-dimensional turbulent flows. *Phys. Fluids*, **26**: 025105, 2014.
- [13] T. Iwayama and T. Watanabe. Enstrophy inertial range dynamics in generalized two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Fluids*, **1**: 034403, 2016.
- [14] R. H. Kraichnan. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **10**: 1417, 1967.
- [15] R. H. Kraichnan. Inertial-range transfer in two- and three-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, **47**: 525, 1971.
- [16] C. E. Leith. Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **11**: 671, 1968.
- [17] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Springer, 4 th edition, 2008.
- [18] R. T. Pierrehumbert, I. M. Held, and K. L. Swanson. Spectra of local and nonlocal two dimensional turbulence. *Chaos, Solitons & Fractals*, **4**: 1111, 1994.
- [19] N. Schorghofer. Energy spectra of steady two-dimensional turbulent flows. *Phys. Rev. E*, **61**: 6572, 2000.
- [20] K. S. Smith, G. Boccaletti, C. C. Henning, I. Marinov, C. Y. Tam, I. M. Held, and G. K. Vallis. Turbulent diffusion in the geostrophic inverse cascade. *J. Fluid Mech.*, **469**: 13, 2002.
- [21] T. Watanabe and T. Iwayama. Unified scaling theory for local and non-local transfers in generalized two-dimensional turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.*, **73**: 3319, 2004.
- [22] T. Watanabe and T. Iwayama. Interacting scales and triad enstrophy transfers in generalized two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, **76**: 046303, 2007.