

チャネル乱流におけるエネルギー輸送のスペクトルとスケーリング

水野 吉規 (Yoshinori Mizuno)

同志社大学 理工学部 (Faculty of Science and Engineering, Doshisha University)

1 はじめに

乱流ではさまざまな空間スケールの乱れが共存し、異なるスケールの中でエネルギーのやり取りが行われる。エネルギーカスケードとして知られる、大きなスケールから小さなスケールへとエネルギーが受け渡されていく過程は、多くの乱流において共通に現れると考えられている。また、流れによってエネルギーは空間的にも輸送される。乱流が統計的に一樣な方向にはその正味の輸送量はないが、例えば、外力によるエネルギー供給が空間的に局在するような場合には非一樣な乱流場が形成され、正味の空間的なエネルギー輸送が現れる。

固体壁面を過ぎる流れにおいて、壁面近傍のせん断によって生成される乱流は、しばしば壁乱流と呼ばれる。一般にはせん断の強さは壁からの距離に依存するので、乱れに対するエネルギーの供給率は壁に垂直な方向に非一樣になる。したがって、壁乱流には壁に垂直な方向に正味の空間的なエネルギー輸送が存在する。このエネルギー輸送の構造を理解することは、壁乱流の形成を理解する上で重要であると考えられる。

ここでは、無限に広い平行な2枚の平板の間を、平板に平行な圧力勾配によって駆動される非圧縮性流体の乱流（以下、チャネル乱流）を考える。この乱流は、壁に平行な方向には一樣で、壁に垂直な方向に非一樣であると仮定することができる。これは壁乱流の代表的な流れであり、古くから多くの研究がなされている。さらに、流れは定常であるとし、平均流が壁に平行なある方向に存在すると仮定する。その流れ方向に x 軸、壁に垂直な方向に y 軸、これらに直交する方向（スパン方向）に z 軸をとるデカルト座標系を考え、2つの壁の位置をそれぞれ、 $y = 0, 2h$ とする。平均流は $(U(y), 0, 0)$ と表し、時刻 t と位置 (x, y, z) における流速と圧力の平均からのずれをそれぞれ $(u, v, w), p$ と表すことにする。

乱れの運動エネルギーを $e \equiv (u^2 + v^2 + w^2)/2$ と定義すると、チャネル乱流における平均の運動エネルギー \bar{e} の収支方程式は

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = 0 = P + T^p + \Pi + \varepsilon + D, \quad (1)$$

ここで、

$$P(y) = -\overline{uv} \frac{dU}{dy}, \quad T^p(y) = -\frac{d\overline{ev}}{dy}, \quad \Pi(y) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\overline{pw}}{dy}, \quad \varepsilon(y) = -\nu \overline{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)^2}, \quad D(y) = \nu \frac{d^2 \bar{e}}{dy^2},$$

と書ける。 $\bar{\cdot}$ は x, z 方向についての空間および時間平均を表し、 ν は流体の動粘性率、 ρ は流体の密度を表す。また、表記の簡便さのため、 $(u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ 、 $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ を適宜用いる。(1)式右辺の各項は、第1項から順番にそれぞれ、エネルギー生成、乱流空間輸送、圧力による仕事、粘性散逸、粘性拡散による収支への寄与を表す。これらは実験や数値

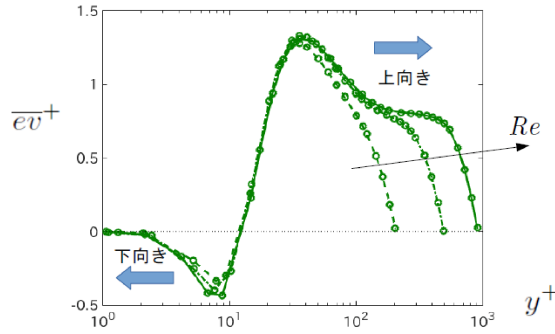


図 1: $\Theta^p = \overline{ev}^+$ の分布. レイノルズ数 $Re_\tau \equiv u_\tau h/\nu$ は小さいほうから 207, 496, 912.

計算から得られたデータを用いてこれまでも調べられており、壁からの距離やレイノルズ数への依存性については概ねよく理解されている。(例えば, [1, 2] を参照)

空間的なエネルギー輸送からの寄与は $T^p + \Pi + D$ によって表されるが、壁のごく近傍以外では T^p が卓越する。図 1 に乱流空間輸送によるエネルギー流束

$$\Theta^p(y) \equiv \overline{ev}(y) = - \int_0^y T^p(y') dy' \quad (2)$$

の分布を示す。上付きの $+$ は壁単位によって規格化された量であることを表す。壁単位とは、 $\rho, \nu, u_\tau \equiv \sqrt{\tau_w/\rho}$ から作られる単位である。(ここで、 τ_w は壁面での平均せん断応力の大きさである。) 壁近傍においてせん断からのエネルギーの供給が最大となり、およその位置を分水嶺としてエネルギーがその両側へと運ばれていく。したがって、壁のごく近傍 $y^+ = O(1)$ の粘性底層以外では、エネルギーは壁から離れる向きに輸送される。

乱流ではさまざまな空間スケールの乱れが共存しており、エネルギー輸送もさまざまなスケールで起こっているはずである。しかしながら、 $\Theta^p(y)$ と $T^p(y)$ によって評価できるのは全流束とそれによる収支への寄与であり、各スケールにおいてどちらの向きにどれだけのエネルギーが輸送がされるのかについてはわからない。このような疑問に答えるべく、エネルギー輸送のスケール依存性を明らかにする試みも古くからなされている。Lumley [3] は壁乱流におけるエネルギー収支について、速度の 2 点相関関数、あるいはそれと等価なエネルギースペクトルの収支方程式を用いて、エネルギー輸送のスケール依存性について考えた。当時はこれを定量的に評価するためのデータがなかったが、最近になり直接数値計算のデータによって調べられるようになってきている。[4, 5]

2 エネルギースペクトルの収支方程式

エネルギー輸送のスケール依存性を調べるために、式 (1) に対応するエネルギースペクトルの収支方程式を考える。統計的に一様な x, z 方向には周期性を仮定して、各物理量のフーリエ変換を考える。以下では、物理量 $a(x, y, z)$ のフーリエ係数を $\hat{a}(k_x, y, k_z)$ と表すことにする。ここで、 k_x と k_z はそれぞれ x と z 方向の波数である。このとき、エネルギースペクトル $\tilde{e} \equiv \langle \hat{u}_j \hat{u}_j^* \rangle / 2$ の収支方程式は、

$$\frac{\partial \tilde{e}}{\partial t} = 0 = \tilde{P} + \tilde{T}^p + \tilde{\Pi} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{D} + \tilde{T}^s, \quad (3)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\tilde{P}(k_x, y, k_z) &= \Re \left\{ -\langle \widehat{uv}^* \rangle \frac{dU}{dy} \right\}, & \tilde{T}^p(k_x, y, k_z) &= \Re \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d\langle \widehat{u}_j \widehat{u}_j v^* \rangle}{dy} \right\}, \\ \tilde{\Pi}(k_x, y, k_z) &= \Re \left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{d\langle \widehat{vp}^* \rangle}{dy} \right\}, & \tilde{\varepsilon}(k_x, y, k_z) &= -2\nu(k_x^2 + k_z^2)\tilde{\varepsilon} - \nu \left\langle \left| \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial y} \right|^2 \right\rangle, \\ \tilde{D}(k_x, y, k_z) &= \nu \frac{d^2 \tilde{\varepsilon}}{dy^2}, & \tilde{T}^s(k_x, y, k_z) &= \Re \left\{ \langle \partial_k \widehat{u}_j (\widehat{u}_j \widehat{u}_k)^* \rangle - \frac{1}{2} \frac{d\langle \widehat{u}_j (\widehat{u}_j v)^* \rangle}{dy} \right\}.\end{aligned}$$

と書ける. 括弧 $\langle \cdot \rangle$ は時間平均, $*$ は複素共役を表す. また, $(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = (ik_x, \partial/\partial y, ik_z)$ である. 式 (3) 右辺の \tilde{P} はエネルギー生成, \tilde{T}^p は乱流空間輸送, $\tilde{\Pi}$ は圧力による仕事, $\tilde{\varepsilon}$ は粘性散逸, \tilde{D} は粘性拡散による収支への寄与のスペクトルである. これらの全波数についての和は式 (1) 右辺の各項に一致する. そして, 最後の項 \tilde{T}^s はフーリエモード間 (スケール間) エネルギー輸送からの寄与のスペクトルを表しており, その波数についての和はゼロである.

3 結果

壁面上には粘着条件, x, z 方向には周期境界条件を課したチャネル乱流に対する非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を直接数値計算によって解き, 式 (3) 右辺の各項を評価した. 図 1 から示唆されるように, 高レイノルズ数に対するチャネル乱流の対数層では, 全エネルギー流束 Θ^p はほぼ一定であるので, 各高さにおいて, 生成 \tilde{P} , 粘性散逸 $\tilde{\varepsilon}$, スケール間輸送 \tilde{T}^s がほぼバランスすると考えられる. 図 2 にこれらの 2 次元スペクトルを示す. 乱れの生成が活発な領域はコスペクトル $\Re\{-\langle \widehat{uv}^* \rangle\}$ が大きな領域であり, これはよく知られているように, x 方向に引き伸ばされた構造をもつ. 一方で, 粘性散逸はより小さなスケールにおいて活発で, 等方的である. そして, 前者から後者のスケールへのエネルギー輸送を表すのが \tilde{T}^s である. 図に示された高さにおいては, これら 3 つの寄与はほぼバランスしており, したがって, 従来のエネルギーカスケードの描像が成り立つと言える. また同じ図から, 壁から離れるにつれて, 生成と散逸の活発なスケールが離れていくこともわかる. これは, 対数層においては, 前者が壁からの距離 y で増加するのに対して, 後者はおおよそ $y^{1/4}$ で増加することから説明できる.[6]

図 3 は $y^+ = 110$ における \tilde{T}^p と流束

$$\tilde{\Theta}^p(k_x, y, k_z) = - \int_0^y \tilde{T}^p(k_x, y', k_z) dy' \quad (4)$$

の 1 次元スペクトルを示す. この高さでは全流束 Θ^p は正であるが, スケールごとに見ると大スケールにおいては負, すなわち壁に向かうエネルギーの流れがあることがわかる. また, この高さにおける T^p は非常に小さく, これまでは空間的なエネルギー輸送による収支への寄与はほとんどないと解釈されてきたが, スケールごとに見るとわずかながら収支への寄与があることもわかる. 上向きの流束はスパン方向に小さなスケールの乱れにエネルギーを供給し, 大きなスケールの乱れからはエネルギーを取り去る役割を担っており, また, ここでは詳細は示さないが, より大きなスケールの下向きの流束は対数層から粘性底層へのエネルギーの供給を担っている.

上で述べたように, \tilde{T}^s は \tilde{P} と $\tilde{\varepsilon}$ の橋渡しをする役割を果たすので, 対数層では, そのスペクトルの長波長側は壁からの距離, 短波長側はコルモゴロフ長でスケールされる. 一方で, こ

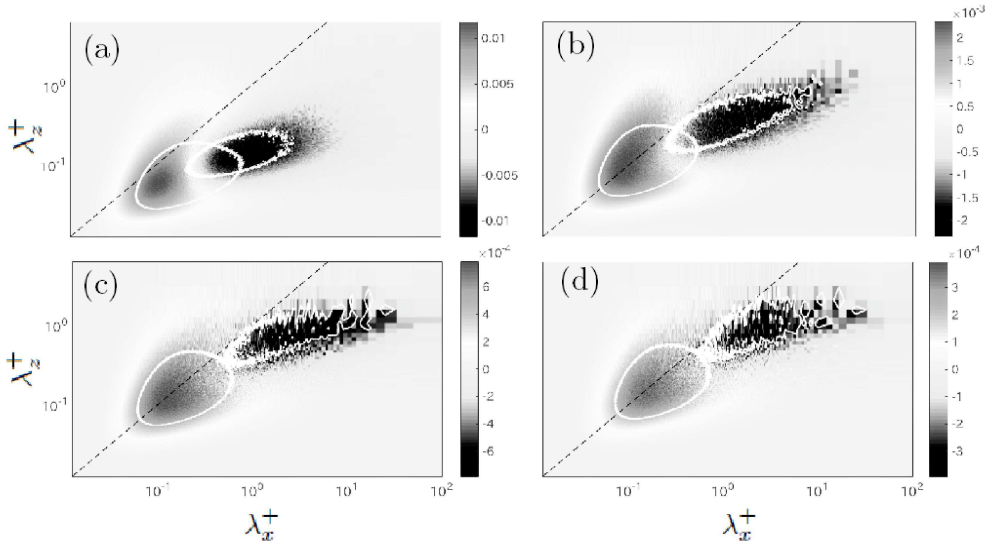


図 2: 波数で重み付けした \tilde{T}^s の 2 次元スペクトル. 横軸と縦軸はそれぞれ流れ方向とスパン方向の波長 λ_x^+ , λ_z^+ である. 白線は \tilde{P} , $\tilde{\varepsilon}$ の等高線を表す. 大きな (小さな) スケール側の等高線は \tilde{P} ($\tilde{\varepsilon}$) に対応する. 高さは $y^+ =$ (a) 32, (b) 110, (c) 320, (d) 550, レイノルズ数は $Re_\tau = 912$ である. 破線は $\lambda_x = \lambda_z$ を表す.

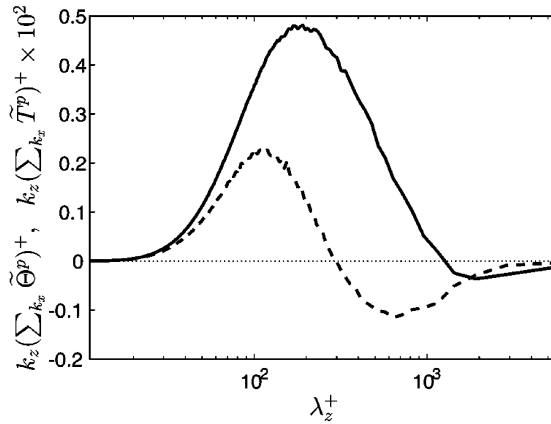


図 3: 波数で重み付けした 1 次元スペクトル, $k_z \sum_{k_x} \tilde{\Theta}^{p+}$ (実線) と $k_z \sum_{k_x} \tilde{T}^{p+}$ (破線). 横軸はスパン方向の波長 λ_z^+ , 高さは $y^+ = 110$, レイノルズ数は $Re_\tau = 912$ である.

ここでは示さないが, \bar{T}^p の特徴的長さは \bar{P} と同じく壁からの距離で与えられることもわかった. すなわち, 空間的なエネルギー輸送によるエネルギーのやり取りはエネルギー保有領域でおこなわれる.

4 まとめ

ここでは, エネルギースペクトルの収支方程式に現れる 2 つの乱流輸送からの寄与のスペクトルを直接数値計算のデータによって評価した. スケール間のエネルギー輸送については, エネルギー保有領域から散逸領域への輸送という従来の描像どおりの結果が得られた. 一方で空間輸送については, 新たに以下のことがわかった.

- 全流束がほぼ一定である対数層においても, スケールごとに見るとわずかながらエネルギーの収支に寄与している.
- バッファ層より上では全流束は正 (壁から離れる向き) であるが, スケールごとに見ると, 大きなスケールにおいては負 (壁に向かう向き) の流束が存在する. これは対数層から粘性底層までエネルギーを輸送する.
- 対数層においては, 空間輸送によってエネルギーのやり取りが行われる空間スケールはエネルギー保有領域と同じく壁からの距離で与えられる.

数値計算と結果の詳細については [7] を参照されたい.

参考文献

- [1] Mansour, N. N., Kim, J. & Moin, P., Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.* **194**, 15–44, 1988.
- [2] Hoyas, S. & Jiménez, J., Reynolds number effects on the Reynolds-stress budgets in turbulent channels. *Phys. Fluids* **20**, 101511, 2008.
- [3] Lumley, J. L., Spectral energy budget in wall turbulence. *Phys. Fluids* **7**, 190–196, 1964.
- [4] Bolotnov, I. A., Lahey, R. T. Jr, Drew, D. A., Jansen, K. E. & Overai, A. A., Spectral analysis of turbulence based on the DNS of a channel flow. *Computers Fluids* **39**, 640–655, 2010.
- [5] Lee, M. & Moser, R. D., Spectral analysis on Reynolds stress transport equation in high Re wall-bounded turbulence. In *International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP-9)*, 4A–3, 2015.
- [6] Tennekes, H. & Lumley, J. L., *First course in Turbulence*. MIT Press, 1972.
- [7] Mizuno, Y., Spectra of energy transport in turbulent channel flows for moderate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **805**, 171–187, 2016.