数理解析研究所講究録
第2049巻 2017年 32-38

球面枠付き曲線と extrinsic flat great circular surface

北海道大学大学院理学院数学専攻　本多 俊一
(Department of Mathematics, Hokkaido University, Shun'ichi HONDA)

1 はじめに

当稿では，[2] によって与えられた 3 次元球面内の特異点を持つ曲線から生成される 4 種類の extrinsic flat great circular surface とその特異点型の特徴付けを紹介する．Extrinsic flat great circular surface は [4] によって導入された $\mathbb{R}^3$ の可展面に対応する概念である．特異点を持つ曲線としては球面枠付き曲線を考える．球面枠付き曲線は特異点を持つ曲線と枠の組である．

2 準備

3 次元球面 S^3 を $S^3=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\}$ とする．S^3 における内積は $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in S^3$ に対して，$\mathbb{R}^4$ の標準内積

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{4}x_iy_i$$

を用いる．任意の $\boldsymbol{a}_i=(a_i^1,a_i^2,a_i^3,a_i^4)\in\mathbb{R}^4$ $(i=1,2,3)$ に対して，ベクトル積 $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3$ を

$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3=\det\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_4 \end{pmatrix}$$

と定義する．ここで，$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ は $\mathbb{R}^4$ の標準基底である．$\mathbb{R}^4$ の正規直交 3 枠 (orthonormal 3-frame) とは，$\mathbb{R}^4$ の中の 3 個のベクトルの組 $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_3)$ であって，次の条件 (1) (2) をみたすものをいう：

(1) $\|\boldsymbol{v}_i\|=1 \quad (i=1,2,3)$,
(2) $\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j=0 \quad (i\neq j.\ i,j=1,2,3)$.

$\mathbb{R}^4$ の中の直交 3 枠全体のなす集合を $V_{4,3}$ と書く．

定義 2.1 (球面枠付き曲線) 写像 $(\gamma,\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2):I\to V_{4,3}$ が任意の $t\in I$ に対して次の条件 (1) (2) をみたすとき，$(\gamma,\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ を球面枠付き曲線 (*spherical framed curve*) という：

$$(1)\ \dot{\gamma}(t)\cdot\boldsymbol{\nu}_1(t)=0,\quad (2)\ \dot{\gamma}(t)\cdot\boldsymbol{\nu}_2(t)=0.$$

球面枠付き曲線 $(\gamma,\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2)$ に対して，$\boldsymbol{\mu}(t)=\gamma(t)\times\boldsymbol{\nu}_1(t)\times\boldsymbol{\nu}_2(t)$ とすれば，$\{\gamma(t),\boldsymbol{\nu}_1(t),\boldsymbol{\nu}_2(t),\boldsymbol{\mu}(t)\}$ は $\mathbb{R}^4$ の中の正規直交基底をなす．

命題-定義 2.2 (フレネ・セレ型の公式, [2]) 写像 $(\gamma, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to V_{4,3}$ を球面枠付き曲線とする．このとき，以下のフレネ・セレ型の公式が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\nu}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{\nu}}_2(t) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha(t) \\ 0 & 0 & \ell(t) & m(t) \\ 0 & -\ell(t) & 0 & n(t) \\ -\alpha(t) & -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \boldsymbol{\nu}_1(t) \\ \boldsymbol{\nu}_2(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{pmatrix}.$$

ここで，$\alpha(t), \ell(t), m(t), n(t)$ は以下で与えられる I 上の関数である：

$$\alpha(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t),\ \ell(t) = \dot{\boldsymbol{\nu}}_1(t) \cdot \boldsymbol{\nu}_2(t),\ m(t) = \dot{\boldsymbol{\nu}}_1(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t),\ n(t) = \dot{\boldsymbol{\nu}}_2(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t).$$

このとき，写像 $(\alpha, \ell, m, n) : I \to \mathbb{R}^4$ を球面枠付き曲線 $(\gamma, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ の曲率と呼ぶ.

定義 2.3 (球面枠付き曲線の合同) 2 つの球面枠付き曲線 $(\gamma, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ と $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2)$ が合同であるとは，ある回転行列 $A \in SO(4)$ が存在して，任意の $t \in I$ に対して

$$(1)\ \widetilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)), \quad (2)\ \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_i(t) = A(\boldsymbol{\nu}_i(t)) \quad (i = 1, 2)$$

をみたすときをいう.

枠付き曲線の存在定理と一意性定理（[3]）の特別な場合として，以下の存在定理と一意性定理が成り立つ.

定理 2.4 (球面枠付き曲線の存在定理, [2]) 写像 $(\alpha, \ell, m, n) : I \to \mathbb{R}^4$ に対して，球面枠付き曲線 $(\gamma, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to V_{4,3}$ で (α, ℓ, m, n) が曲率であるものが存在する.

定理 2.5 (球面枠付き曲線の一意性定理, [2]) 2 つの球面枠付き曲線 $(\gamma, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ と $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2)$ に対して，これらの曲率が一致するとする．このとき，$(\gamma, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ と $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2)$ は合同である.

球面枠付き曲線 $(\gamma, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to V_{4,3}$ に対して，$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) \in \Delta$ を

$$\boldsymbol{b}_1(t) = \cos\theta(t)\boldsymbol{\nu}_1(t) - \sin\theta(t)\boldsymbol{\nu}_2(t),\ \boldsymbol{b}_2(t) = \sin\theta(t)\boldsymbol{\nu}_1(t) + \cos\theta(t)\boldsymbol{\nu}_2(t)$$

と定義する．ここで，Δ は $\Delta = \{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \in S^3 \times S^3 \mid \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0\}$，$\theta(t)$ は滑らかな関数である．このとき，$(\gamma, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) : I \to V_{4,3}$ は再び球面枠付き曲線となり，単位接ベクトルを保つ：

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{b}}(t) = \gamma(t) \times \boldsymbol{b}_1(t) \times \boldsymbol{b}_2(t) = \boldsymbol{\mu}(t).$$

$\{\gamma(t), \boldsymbol{b}_1(t), \boldsymbol{b}_2(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ を $\theta(t)$ に依る**回転された枠**という．特に，$\theta(t)$ が条件 $\dot{\theta}(t) = \ell(t)$ を満たすとき，$\{\gamma(t), \boldsymbol{b}_1(t), \boldsymbol{b}_2(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ を $\theta(t)$ による**ビショップ枠**という（[1]）．ビショップ枠の取り方は $\gamma(t)$ に対して一意ではなく，積分定数程度の自由度が存在する．ビショップ枠による球面枠付き曲線 $(\gamma, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ は，以下のフレネ・セレ型の公式を持つ：

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ \dot{\boldsymbol{b}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{b}}_2(t) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha(t) \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{m}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{n}(t) \\ -\alpha(t) & -\widetilde{m}(t) & -\widetilde{n}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \boldsymbol{b}_1(t) \\ \boldsymbol{b}_2(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{pmatrix}.$$

ここで，$\widetilde{m}(t), \widetilde{n}(t)$ は

$$\widetilde{m}(t) = \cos\theta(t)m(t) - \sin\theta(t)n(t),\ \widetilde{n}(t) = \sin\theta(t)m(t) + \cos\theta(t)n(t)$$

である．一方，$m^2(t)+n^2(t)\neq 0$ の仮定の下，$(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)\in\Delta$ を

$$\boldsymbol{n}_1(t)=\frac{n(t)\boldsymbol{\nu}_1(t)-m(t)\boldsymbol{\nu}_2(t)}{\sqrt{m^2(t)+n^2(t)}},\ \boldsymbol{n}_2(t)=\frac{m(t)\boldsymbol{\nu}_1(t)+n(t)\boldsymbol{\nu}_2(t)}{\sqrt{m^2(t)+n^2(t)}}$$

と定義する．このとき，$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2):I\to V_{4,3}$ は再び球面枠付き曲線となり，単位接ベクトルを保つ：

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{n}}(t)=\boldsymbol{\gamma}(t)\times\boldsymbol{n}_1(t)\times\boldsymbol{n}_2(t)=\boldsymbol{\mu}(t).$$

$\{\boldsymbol{\gamma}(t),\boldsymbol{n}_1(t),\boldsymbol{n}_2(t),\boldsymbol{\mu}(t)\}$ を **フレネ型の枠** と呼ぶ．フレネ型の枠による球面枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2)$ は，以下のフレネ・セレ型の公式を持つ：

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{n}}_1(t)\\ \dot{\boldsymbol{n}}_2(t)\\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&\alpha(t)\\ 0&0&\overline{\ell}(t)&0\\ 0&-\overline{\ell}(t)&0&\overline{n}(t)\\ -\alpha(t)&0&-\overline{n}(t)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}(t)\\ \boldsymbol{n}_1(t)\\ \boldsymbol{n}_2(t)\\ \boldsymbol{\mu}(t)\end{pmatrix}.$$

ここで，$\overline{\ell}(t),\overline{n}(t)$ は

$$\overline{\ell}(t)=\ell(t)+\frac{m(t)\dot{n}(t)-\dot{m}(t)n(t)}{m^2(t)+n^2(t)},\ \overline{n}(t)=\sqrt{m^2(t)+n^2(t)}\neq 0$$

である．

3 双対曲面と tangent extrinsic flat great circular surface

本節では extrinsic flat great circular surface の具体例として，球面枠付き曲線から生成される双対曲面と tangent extrinsic flat great circular surface を紹介する．Great circular surface 及び extrinsic flat great circular surface については [4] もしくは本稿の付録を参照のこと．

定義 3.1 (双対曲面) $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2):I\to V_{4,3}$ を球面枠付き曲線とする．写像 $\mathcal{DS}_\gamma:I\times[0,2\pi)\to S^3$ を

$$\mathcal{DS}_\gamma(t,\theta)=\cos\theta\boldsymbol{\nu}_1(t)+\sin\theta\boldsymbol{\nu}_2(t)$$

と定義する．このとき，$\mathcal{DS}_\gamma$ を γ の双対曲面（*dual surface*）と呼ぶ．

$\mathcal{DS}_\gamma$ は $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_1,-\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}_2):I\to SO(4)$ による great circular surface である．このとき，以下の関係式が成り立つ：

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{\nu}}_1(t)\\ -\dot{\boldsymbol{\mu}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{\nu}}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-\alpha(t)&0\\ 0&0&-m(t)&\ell(t)\\ \alpha(t)&m(t)&0&n(t)\\ 0&-\ell(t)&-n(t)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}(t)\\ \boldsymbol{\nu}_1(t)\\ -\boldsymbol{\mu}(t)\\ \boldsymbol{\nu}_2(t)\end{pmatrix}.$$

Extrinsic flat である条件式 (1) より，$\mathcal{DS}_\gamma$ は extrinsic flat great circular surface である．

注意 3.2 Non-cyclic である条件式 (2) より，$\mathcal{DS}_\gamma$ が non-cyclic であるための必要十分条件は $m^2(t)+n^2(t)\neq 0$ が成り立つことである．定義 3.1 より，$\mathcal{DS}_\gamma$ の像は $\{\boldsymbol{\nu}_1(t),\boldsymbol{\nu}_2(t)\}$ の回転に依らないので，non-cyclic な双対曲面を調べるときにはフレネ型の枠が有用である．

以下，$m^2(t)+n^2(t)\neq 0$ を仮定し，フレネ型の枠 $\{\boldsymbol{\gamma}(t),\boldsymbol{n}_1(t),\boldsymbol{n}_2(t),\boldsymbol{\mu}(t)\}$ を考える．計算により，$\mathcal{DS}_\gamma$ の特異点が $(t,0)$ と (t,π) であり，特異値が $\pm\boldsymbol{n}_1(t)$ であることがわかる．

命題 3.3 ([2]) $(\pm\boldsymbol{n}_1, \gamma, \boldsymbol{\mu}) : I \to V_{4,3}$ は球面枠付き曲線である.

命題 3.3 より，$\pm\boldsymbol{n}_1(t)$ の双対曲面は以下で与えられる：

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}}(t,\theta) = \mathcal{DS}_{\boldsymbol{n}_1}(t,\theta) = \cos\theta\gamma(t) + \sin\theta\boldsymbol{\mu}(t).$$

このとき, $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ を *tangent extrinsic flat great circular surface* と呼ぶ. $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ は [4] における tangent extrinsic flat great circular surface の一般化である. Δ-双対性（[4]）より，以下のダイアグラムが成り立つ：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{DS}_\gamma & \xrightarrow{\text{taking singular value}} & \pm\boldsymbol{n}_1 \\ {\scriptstyle \Delta-\text{dual}}\Big\uparrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Delta-\text{dual}} \\ (\pm)\gamma & \xleftarrow[\text{taking singular value}]{} & \mathcal{F}_{\mathcal{T}} \end{array}$$

[4] における extrinsic flat great circular surface の特異点型の判定法を利用することにより, 以下の命題を得る：

命題 3.4 ([2]) (t_0, θ_0) を $\mathcal{DS}_\gamma$ の特異点とする．このとき，以下が成り立つ：

(i) $\mathcal{DS}_\gamma$ が (t_0, θ_0) においてカスプ状曲面 **ce** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\alpha(t_0)\bar{\ell}(t_0) \neq 0$ が成り立つことである.

(ii) $\mathcal{DS}_\gamma$ が (t_0, θ_0) においてツバメの尾 **sw** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\bar{\ell}(t_0) = 0$ 及び $\alpha(t_0)\dot{\bar{\ell}}(t_0) \neq 0$ が成り立つことである.

(iii) $\mathcal{DS}_\gamma$ が (t_0, θ_0) においてカスプ状交叉帽子 **cc** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\alpha(t_0) = 0$ 及び $\dot{\alpha}(t_0)\bar{\ell}(t_0) \neq 0$ が成り立つことである.

ここで, カスプ状曲面 **ce** は $\mathbf{ce}(u,v) = (u, v^2, v^3)$, ツバメの尾 **sw** は $\mathbf{sw}(u,v) = (3u^4+u^2v, 4u^3+2uv, v)$, カスプ状交叉帽子 **cc** は $\mathbf{cc}(u,v) = (u, uv^3, v^2)$ である.

命題 3.5 ([2]) (t_0, θ_0) を $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ の特異点とする．このとき，以下が成り立つ：

(i) $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ が (t_0, θ_0) においてカスプ状曲面 **ce** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\alpha(t_0)\bar{\ell}(t_0) \neq 0$ が成り立つことである.

(ii) $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ が (t_0, θ_0) においてツバメの尾 **sw** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\alpha(t_0) = 0$ 及び $\dot{\alpha}(t_0)\bar{\ell}(t_0) \neq 0$ が成り立つことである.

(iii) $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ が (t_0, θ_0) においてカスプ状交叉帽子 **cc** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\bar{\ell}(t_0) = 0$ 及び $\alpha(t_0)\dot{\bar{\ell}}(t_0) \neq 0$ が成り立つことである.

注意 3.6 正則曲線 $\gamma : I \to S^3$ に対して，命題 3.4-(iii) 及び 3.5-(ii) の状況は起きない.

4 焦曲面と縮閉線

本節では，球面枠付き曲線の焦曲面，縮閉線及び縮閉線の双対曲面を紹介する．以降，フレネ型の枠による球面枠付き曲線 $(\gamma, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) : I \to V_{4,3}$ に対して，$\bar{\ell}(t) \neq 0$ を仮定する．このとき，以下の命題が成り立つ：

命題 4.1 ([2]) $(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{n}_1):I\to V_{4,3}$ は球面枠付き曲線である．ここで，$\boldsymbol{\zeta}(t)$ は

$$\boldsymbol{\zeta}(t)=\frac{\overline{n}(t)\boldsymbol{\gamma}(t)-\alpha(t)\boldsymbol{n}_2(t)}{\sqrt{\alpha^2(t)+\overline{n}^2(t)}}$$

である．

注意 4.2 $\boldsymbol{\mu}(t)$ は正則球面曲線である．

定義 4.3 写像 $\mathcal{FS}_\gamma:I\times[0,2\pi)\to S^3$ を

$$\mathcal{FS}_\gamma(t,\theta)=\mathcal{DS}_{\boldsymbol{\mu}}(t,\theta)=\cos\theta\boldsymbol{\zeta}(t)+\sin\theta\boldsymbol{n}_1(t)$$

と定義する．このとき，$\mathcal{FS}_\gamma$ を γ の焦曲面（*focal surface*）と呼ぶ．

計算により，(t_0,θ_0) が $\mathcal{FS}_\gamma$ の特異点であるための必要十分条件は

$$\frac{\alpha(t_0)\dot{\overline{n}}(t_0)-\dot{\alpha}(t_0)\overline{n}(t_0)}{\sqrt{\alpha^2(t_0)+\overline{n}^2(t_0)}}\cos\theta_0+\overline{\ell}(t_0)\overline{n}(t_0)\sin\theta_0=0$$

が成り立つことである．よって，$\mathcal{FS}_\gamma$ の特異値は

$$\mathcal{E}_\gamma^\pm(t)=\frac{\pm\overline{\ell}(t)\overline{n}^2(t)\boldsymbol{\gamma}(t)\mp\left(\alpha(t)\dot{\overline{n}}(t)-\dot{\alpha}(t)\overline{n}(t)\right)\boldsymbol{n}_1(t)\mp\alpha(t)\overline{\ell}(t)\overline{n}(t)\boldsymbol{n}_2(t)}{\sqrt{\overline{\ell}^2(t)\overline{n}^4(t)+\left(\alpha(t)\dot{\overline{n}}(t)-\dot{\alpha}(t)\overline{n}(t)\right)^2+\alpha^2(t)\overline{\ell}^2(t)\overline{n}^2(t)}}$$

で与えられる．$\mathcal{E}_\gamma^\pm$ を γ の縮閉線（evolute）と呼ぶ．

命題 4.4 ([2]) $(\mathcal{E}_\gamma^\pm,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\mu}):I\to V_{4,3}$ は球面枠付き曲線である．ここで，$\boldsymbol{\eta}(t)$ は

$$\boldsymbol{\eta}(t)=\frac{\alpha(t)\boldsymbol{\gamma}(t)+\overline{n}(t)\boldsymbol{n}_2(t)}{\sqrt{\alpha^2(t)+\overline{n}^2(t)}}$$

である．

命題 4.4 より，$\mathcal{E}_\gamma^\pm(t)$ の双対曲面は以下で与えられる：

$$\mathcal{DS}_{\mathcal{E}_\gamma^\pm}(t,\theta)=\cos\theta\boldsymbol{\eta}(t)+\sin\theta\boldsymbol{\mu}(t).$$

筆者の知る限りでは，$\mathbb{R}^3$ において $\mathcal{DS}_{\mathcal{E}_\gamma^\pm}$ に対応する概念はなく，球面幾何学ならではの対象であると言える．Δ-双対性より，以下のダイアグラムが成り立つ：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{FS}_\gamma \arrow[r, "\text{taking singular value}"] & \mathcal{E}_\gamma^\pm \arrow[d, "\Delta\text{dual}"] \\
(\pm)\boldsymbol{\mu} \arrow[u, "\Delta-\text{dual}"] & \mathcal{DS}_{\mathcal{E}_\gamma^\pm} \arrow[l, "\text{taking singular value}"]
\end{tikzcd}$$

関数 $\theta(t),\sigma(t)$ を

$$\theta(t)=\arctan\left(\frac{\alpha(t)\dot{\overline{n}}(t)-\dot{\alpha}(t)\overline{n}(t)}{\overline{\ell}(t)\overline{n}(t)\sqrt{\alpha^2(t)+\overline{n}^2(t)}}\right)\ \text{and}\ \sigma(t)=-\left(\frac{\alpha(t)\overline{\ell}(t)}{\sqrt{\alpha^2(t)+\overline{n}^2(t)}}+\dot{\theta}(t)\right)$$

と定義する．このとき，以下の定理が成り立つ：

定理 4.5 ([2]) (t_0,θ_0) を $\mathcal{FS}_\gamma$ の特異点とする．このとき，以下が成り立つ：

(i) $\mathcal{FS}_\gamma$ が (t_0,θ_0) においてカスプ状曲面 **ce** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\sigma(t_0)\neq 0$ が成り立つことである．

(ii) $\mathcal{FS}_\gamma$ が (t_0,θ_0) においてツバメの尾 **sw** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\sigma(t_0)=0$ 及び $\dot\sigma(t_0)\neq 0$ が成り立つことである．

(iii) カスプ状交叉帽子は現れない．

定理 4.6 ([2]) (t_0,θ_0) を $\mathcal{DS}_{\mathcal{E}^\pm_\gamma}$ の特異点とする．このとき，以下が成り立つ：

(i) $\mathcal{DS}_{\mathcal{E}^\pm_\gamma}$ が (t_0,θ_0) においてカスプ状曲面 **ce** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\sigma(t_0)\neq 0$ が成り立つことである．

(ii) $\mathcal{DS}_{\mathcal{E}^\pm_\gamma}$ が (t_0,θ_0) においてカスプ状交叉帽子 **cc** に局所微分同相であるための必要十分条件は $\sigma(t_0)=0$ 及び $\dot\sigma(t_0)\neq 0$ が成り立つことである．

(iii) ツバメの尾は現れない．

ビショップ枠 $\{\gamma(t),\boldsymbol{b}_1(t),\boldsymbol{b}_2(t),\boldsymbol{\mu}(t)\}$ に対して，$\gamma(t)$，$\boldsymbol{b}_1(t)$，$\boldsymbol{b}_2(t)$ は全て共通の接ベクトル $\boldsymbol{\mu_b}(t)$ を持つので，以下が成り立つ：

命題 4.7 ビショップ枠 $\{\gamma(t),\boldsymbol{b}_1(t),\boldsymbol{b}_2(t),\boldsymbol{\mu}(t)\}$ に対して以下が成り立つ：

(i) $\mathcal{FS}_\gamma(t,\theta)=\mathcal{FS}_{\boldsymbol{b}_1}(t,\theta)=\mathcal{FS}_{\boldsymbol{b}_2}(t,\theta)$,

(ii) $\mathcal{E}_\gamma(t)=\mathcal{E}_{\boldsymbol{b}_1}(t)=\mathcal{E}_{\boldsymbol{b}_2}(t)$.

付録 Extrinsic flat great circular surface

本付録で [4] による great circular surface と extrinsic flat great circular surface の要点をまとめる．$(\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3):I\to SO(4)$ を C^∞-級写像とする．このとき，以下の関係式が成り立つ：

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{a}}_0(t)\\ \dot{\boldsymbol{a}}_1(t)\\ \dot{\boldsymbol{a}}_2(t)\\ \dot{\boldsymbol{a}}_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & c_1(t) & c_2(t) & c_3(t)\\ -c_1(t) & 0 & c_4(t) & c_5(t)\\ -c_2(t) & -c_4(t) & 0 & c_6(t)\\ -c_3(t) & -c_5(t) & -c_6(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_0(t)\\ \boldsymbol{a}_1(t)\\ \boldsymbol{a}_2(t)\\ \boldsymbol{a}_3(t)\end{pmatrix}.$$

ここで，$c_i(t)\ (i=1,2,...,6)$ は

$$\begin{aligned}
c_1(t)&=\dot{\boldsymbol{a}}_0(t)\cdot\boldsymbol{a}_1(t)=-\boldsymbol{a}_0(t)\cdot\dot{\boldsymbol{a}}_1(t), & c_2(t)&=\dot{\boldsymbol{a}}_0(t)\cdot\boldsymbol{a}_2(t)=-\boldsymbol{a}_0(t)\cdot\dot{\boldsymbol{a}}_2(t),\\
c_3(t)&=\dot{\boldsymbol{a}}_0(t)\cdot\boldsymbol{a}_3(t)=-\boldsymbol{a}_0(t)\cdot\dot{\boldsymbol{a}}_3(t), & c_4(t)&=\dot{\boldsymbol{a}}_1(t)\cdot\boldsymbol{a}_2(t)=-\boldsymbol{a}_1(t)\cdot\dot{\boldsymbol{a}}_2(t),\\
c_5(t)&=\dot{\boldsymbol{a}}_1(t)\cdot\boldsymbol{a}_3(t)=-\boldsymbol{a}_1(t)\cdot\dot{\boldsymbol{a}}_3(t), & c_6(t)&=\dot{\boldsymbol{a}}_2(t)\cdot\boldsymbol{a}_3(t)=-\boldsymbol{a}_2(t)\cdot\dot{\boldsymbol{a}}_3(t)
\end{aligned}$$

である．写像 $F_A:I\times[0,2\pi)\to S^3$ を

$$F_A(t,\theta)=\cos\theta\boldsymbol{a}_1(t)+\sin\theta\boldsymbol{a}_3(t).$$

とする．このとき，F_A を *great circular surface,* $\boldsymbol{a}_1$ を *base curve,* $\boldsymbol{a}_3$ を *directrix* と呼ぶ．また，ある $t_0\in I$ に対して与えられる大円 $\cos\theta\boldsymbol{a}_1(t_0)+\sin\theta\boldsymbol{a}_3(t_0)$ を *generating great circle* と呼ぶ．F_A の extrinsic Gaussian curvature が恒等的に零であるとき，F_A を *extrinsic flat great* *circular surface* もしくは *E-flat great circular surface* と呼ぶ．$F_A(t,\theta)$ が E-flat であるための必要十分条件は

$$c_1(t)c_6(t) + c_3(t)c_4(t) = 0 \tag{1}$$

が成り立つことである．

F_A が任意の $t \in I$ に対して

$$(c_1(t), c_3(t), c_4(t), c_6(t)) \neq (0,0,0,0) \tag{2}$$

をみたすとき，F_A は *non-cyclic* であるという．

参考文献

[1] R. L. Bishop, There is more than one way to frame a curve, *Amer. Math. Monthly* **82** (1975), 246-251.

[2] S. Honda, Spherical framed curves and extrinsic flat great circular surfaces, preprint (2017).

[3] S. Honda and M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space, *Adv. Geom.* **16** (2016), no. 3, 265-276.

[4] S. Izumiya, T. Nagai and K. Saji, Great circular surfaces in the three-sphere, *Differential Geom. Appl.* **29** (2011), no. 3, 409-425.