数理解析研究所講究録
第2049巻 2017年 176-184

一般化ハミルトン系の部分多様体上の smooth solvability とサブリーマン多様体の特異曲線について

北海道大学大学院理学院　土田　旭
Asahi Tsuchida
Graduate School of Science, Department of Mathematics,
Hokkaido University

本稿では論文 [12] の概説を行う.

1 はじめに

多様体上の一階常微分方程式は接束の切断として与えられる. そのグラフは接束の中の部分多様体となるが, この意味で implicit な微分方程式が次のように定義される ([4]).

定義 1.1. 接束 TM の部分多様体 S を M 上の *implicit differential system* とよぶ.

Implicit differential system S の解とは, S に標準的に持ち上げ可能な M 上の曲線のことをいい, S の点を通る持ち上げられた解が存在するときにその点を solvable point という. S の点の周りで初期条件に関して滑らかに依存する解の族が取れるとき, その点を smoothly solvable point と呼ぶ. S が smoothly solvable な点のみを持つときに S を smoothly solvable と呼び, その十分条件が論文 [4] で考察されている. (これらの定義について詳しくは定義 2.1 を参照.) P.A.M. Dirac によって 1950 年に数学的に導入された generalized Hamiltonian system は, implicit Hamiltonian system の一つとして [4] で扱われている.

本稿 2 節において, 部分多様体上の smooth solvability を定義し, 一般化ハミルトン系のアイソトロピック部分多様体の smooth solvability over submanifolds についての結果を紹介する. 3 節ではサブリーマン幾何学への応用を述べる. これについて簡単に説明する. 多様体 M, 接分布 $\mathcal{D}$ とその上の双線形正定値形式 g の三つ組 $(M, \mathcal{D}, g)$ をサブリーマン多様体と呼ぶ. ここで接分布とは, 接束 TM の部分束を指す. 接分布 $\mathcal{D}$ がヘルマンダー (Hörmander) 条件を満たす時, 水平曲線の長さの下限を用いて, サブリーマン多様体にカルノー・カラテオドリ (Carnot–Carathéodory) 距離が定義される. カルノー・カラテオドリ距離を実現する絶対連続な水平曲線を最短線と呼ぶが, サブリーマン多様体の最短線が滑らかさについては知られていない. サブリーマン多様体上の測地線方程式の解とならない局所最短線が存在することが一つの理由である. このような局所最短線の候補は拘束条件つきハミルトン系で定義されることが知られている. 拘束条件つきハミルトン系は一般化ハミルトン系であることから, 2 節の solvability に関する結果を応用し, 次の定理を得た.

定理 1.2 ([12]). $(M,\mathcal{D},g)$ を階数 2 の接分布 $\mathcal{D}$ を持つサブリーマン多様体とし, $\mathcal{D}_1 := \mathcal{D}+[\mathcal{D},\mathcal{D}]$ は階数 3 の, $\mathcal{D}_2 := \mathcal{D}_1+[\mathcal{D},\mathcal{D}_1]$ は階数 4 の TM の部分束であるとする. このとき任意の点 $q\in M$ に対し, q の M の中の開近傍 U_q が存在して, U_q に C^∞ 級にはめ込まれた特異曲線 $x(t)$ で, 測地線方程式を満たさないようなものが存在する.

なお, 定理 1.2 に現れる特異曲線が局所最短線であるかどうかはわかっていない.

2 Implicit differential systems とその solvability

基本的な用語を導入する. 接束の標準的射影を $\pi\colon TM\to M$ とし, N を M の部分多様体とする. Implicit differential system の solvability を次のように定義する.

定義 2.1 ([12]). C^1 曲線 $\gamma\colon (a,b)\to N$ が S の N 上の解 *(solution of S over N)* であるとは $(\gamma(t),\dot\gamma(t))\in S\cap\pi^{-1}(N)$ が任意の $t\in(a,b)$ でなりたつ時をいう.

S の点 $(x_0,\dot x_0)$ が S の N 上の *solvable point (solvable point of S over N)* であるとは, 正定値 $\varepsilon>0$ と S の N 上の解 $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to N$ が存在して $(\gamma(0),\dot\gamma(0))=(x_0,\dot x_0)$ となる時をいう. S の点 $(x_0,\dot x_0)$ が S の N 上の *smoothly solvable point (smoothly solvable point of S over N)* であるとは, $(x_0,\dot x_0,0)$ の $S\times\mathbb{R}$ での開近傍 $W\subset$ と C^∞ 写像 $\bar\gamma\colon W\to N$ が存在して, $\gamma_{(x,\dot x)}(t):=\bar\gamma(x,\dot x,t)$ が S の N 上の解となり, $(\gamma(0),\dot\gamma(0))=(x,\dot x)$ for all $(x,\dot x)\in\pi_1(W)$ を満たす時にいう. ただし $\pi_1\colon S\times\mathbb{R}\to S$ は自然な射影とする. Implicit differential system S が N 上 *smoothly solvable (smoothly solvable over N)* であるとは S が N 上 smoothly solvable な点からなる時にいう.

部分多様体 N が M そのものの場合, 上記の定義は福田と Janeczko の論文 [4] で与えられている.

2.1 Implicit Hamiltonian systems

(M,ω) をシンプレクティック多様体とする. シンプレクティック構造 ω の非退化性から, 内部積による束同型 $\flat\colon TM\to T^*M, \flat_x(v_q)=\iota_{v_q}\omega_q, q\in M$ がある. T^*M の Liouville 形式 θ に対して, TM 上にシンプレクティック構造 $\dot\omega:=\flat^*d\theta$ が誘導される. 今後, $M=\mathbb{R}^{2n}$ とし, 標準的シンプレクティック形式を備えているものとする.

定義 2.2 ([4, 6]). $(T\mathbb{R}^{2n},\dot\omega)$ のラグランジュ部分多様体 L (すなわち, $\dim L=2n$ かつ $\omega|_L=0$) を, *implicit Hamiltonian system* と呼ぶ.

よく知られているように, ラグランジュ部分多様体は局所的にモース関数族で生成される. モース関数族 $F\colon\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ に対し, F のカタストロフ集合

$$C(F)=\left\{(x,p,u)\in\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^k \mid \frac{\partial F}{\partial u_i}(x,p,u)=0, i=1,\dots,k\right\}$$

が定まり, C^∞ 級写像 $\phi_F\colon\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^k\to T\mathbb{R}^{2n}$

$$\phi(x,p,u)=(x,p,\frac{\partial F}{\partial p_i}(x,p,u),-\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,p,u))$$

に対して, $L_F=\phi_F(C(F))$ を F で生成されるラグランジュ部分多様体と呼ぶ.

次の命題は L_F が定義 2.1 の意味で smoothly solvable となる必要条件と十分条件である ([4][6]).

命題 2.3 ([4]). 点 $(x,p,\dot{x},\dot{p})$ を L_F の solvable point とする. 点 $(x,p,u)\in\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^k$ を $\phi_F(x,p,u)=(x,p,\dot{x},\dot{p})$ で定める. この時実ベクトル $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_k)$ が存在して, 次の線形方程式を満たす.

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 F}{\partial u_1\partial u_1}(x,p,u) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial u_1\partial u_k}(x,p,u)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u_k\partial u_1}(x,p,u) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial u_k\partial u_k}(x,p,u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\{\frac{\partial F}{\partial u_1},F\}(x,p,u)\\ \vdots\\ \{\frac{\partial F}{\partial u_k},F\}(x,p,u)\end{pmatrix}.$$

ここで括弧 $\{,\}$ はシンプレクティック形式 ω から誘導された Poisson 括弧である.

命題 2.4 ([4]). 線形方程式

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 F}{\partial u_1\partial u_1}(x,p,u) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial u_1\partial u_k}(x,p,u)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u_k\partial u_1}(x,p,u) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial u_k\partial u_k}(x,p,u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1(x,p,u)\\ \vdots\\ \mu_k(x,p,u)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\{\frac{\partial F}{\partial u_1},F\}(x,p,u)\\ \vdots\\ \{\frac{\partial F}{\partial u_k},F\}(x,p,u)\end{pmatrix}$$

が $C(F)$ の中の $(x,p,u)=\phi_F(x,p,\dot{x},\dot{p})$ の開近傍で smooth な解を持つとすると, L_F の点 $(x,p,\dot{x},\dot{p})$ は smoothly solvable である.

線形関数のモース関数族

$$F\colon\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R},\quad F(x,p,u)=\sum_{j=1}^k a_j(x,p)u_j+b(x,p).$$

によって生成される implicit Hamiltonian system を一般化ハミルトン系 (generalized Hamiltonian system) とよぶ. このときカタストロフ集合 $C(F)$ は $\mathbb{R}^{2n}$ の部分多様体

$$K:=\{(x,p)\in\mathbb{R}^{2n}\mid a_i(x,p)=0,i=1,\dots,k\}$$

を用いて $C(F)=K\times\mathbb{R}^k$ と書ける.

命題 2.3, 2.4 から, L_F が smoothly solvable となる必要十分条件は K 上で $\{a_i,a_j\}(x,p)=0$, $\{b,a_i\}(x,p)=0$ $(1\leq i,j\leq k)$ となることである ([6]). 命題の条件を考慮して

$$\widetilde{S_F}:=\{(x,p,u)\in C(F)\mid\sum_{j=1}^k\{a_i,a_j\}(x,p)u_j=\{b,a_i\}(x,p),1\leq i\leq k\},$$
$$S_F:=\phi_F(\widetilde{S_F}),$$

とおく. L_F の全ての smoothly submanifold は S_F に含まれる ([6]). さらに S_F それ自身が smoothly solvable となる条件は以下のものである.

定理 2.5 ([6]). 任意の点 $(x,p)\in K=\{(x,p)\in\mathbb{R}^{2n}\mid\frac{\partial F}{\partial u_i}(x,p,u)=0,1\leq i\leq k\}$ について

$$\operatorname{rank}\left(\{a_i,a_j\}(x,p)\right)_{1\leq i,j\leq k}=r\,(constant)\quad\text{及び}$$
$$\begin{pmatrix}\{b,a_1\}(x,p)\\ \vdots\\ \{b,a_k\}(x,p)\end{pmatrix}\in\operatorname{Im}\left(\{a_i,a_j\}(x,p)\right)_{1\leq i,j\leq k},$$

が成り立つとき, S_F は L_F の smoothly solvable な部分多様体である.

この命題を受けて, 次の問題を考える. 一般化ハミルトン系 L_F のどんな部分多様体 S に対して K の部分多様体 A が存在して S が A 上 smoothly solvable となるか. そしてそのような A はどんなものか. ここでは $k=2$ の場合について述べる.

$\mathbb{R}^{2n}$ 上のベクトル場の u パラメータ族 $X_u\colon K \to T(\mathbb{R}^{2n})$ を

$$X_u(x,p) = (x, p, \frac{\partial F}{\partial p}(x,p,u), -\frac{\partial F}{\partial x}(x,p,u)),$$

で定義する. X_u が接するような K の部分多様体上に X_u の積分曲線から定まる L_F の部分多様体の解を構成し, smooth solvability を示すことを基本的方針とする.

部分多様体として K 自身を考えると, ベクトル場 X_u が K に接する必要十分条件は

$$X_u(a_1) = X_u(a_2) = 0 \quad i.e.\ u_1\{a_1, a_2\} = u_2\{a_1, a_2\} = 0$$

である. したがって $\phi_F(A_0 \times \mathbb{R}^2)$ が smoothly solvable となる必要十分条件は $\{a_1, a_2\} = 0$ が K 上成立することである. この条件を鑑み, K の部分多様体 A_1 を次のように定義する.

$$A_1 := \{(x,p) \mid a_1(x,p) = a_2(x,p) = \{a_1, a_2\}(x,p) = 0\}.$$

関数 $a_1, a_2, \{a_1, a_2\}$ は独立であると仮定する. ベクトル場 X_u が A_1 に接する必要十分条件は

$$X_u(\{a_1, a_2\}) = 0 \quad i.e.\ u_1\{a_1, \{a_1, a_2\}\}(x,p) + u_2\{a_2, \{a_1, a_2\}\}(x,p) = 0$$

が A_1 上成り立つことである.

いま, A_1 及び A_1 の部分多様体上の smooth solvability について考えよう. ここに $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n}, q_0}$ を $\mathbb{R}^{2n}$ の点 q_0 における C^∞ 関数芽がなす $\mathbb{R}$-代数とし, $\langle a_1, a_2, \{a_1, a_2\}\rangle_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n}, q_0}}$ を a_1, a_2 と $\{a_1, a_2\}$ で生成される $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n}, q_0}$-加群とする. 記述の簡単のため,

$$\xi_1 := \{a_1, \{a_1, a_2\}\},\ \xi_2 := \{a_2, \{a_1, a_2\}\}$$

とおく. 次の命題は直ちに得られる.

命題 2.6 ([12]). 関数 a_1, a_2 と $\{a_1, a_2\}$ は独立であると仮定する. このとき $\phi_F(A_1 \times \mathbb{R}^2)$ が A_1 上 smoothly solvable であるような L_F の部分多様体であることの必要十分条件は A_1 の各点 q_0 において $\xi_1, \xi_2 \in \langle a_1, a_2, \{a_1, a_2\}\rangle_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n}, q_0}}$ となることである.

L_F の部分多様体 S で, A_1 の部分多様体上 smoothly solvable なものを構成するため, 次のようなファイバー束をつくる. K の点 (x,p) に対して $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $C_{(x,p)}$ を

$$C_{(x,p)} := \{(u_1, u_2) \mid u_1\{a_1, \{a_1, a_2\}\}(x,p) + u_2\{a_2, \{a_1, a_2\}\}(x,p) = 0\}$$

と定義し，これに対して直線束を

$$\begin{aligned}
\overline{A_2^1}^1 &:= \{(x,p,u) \mid u \in C^1_{(x,p)}, (x,p) \in A_2^1\},\\
\overline{A_2^1}^2 &:= \{(x,p,u) \mid u \in C^2_{(x,p)}, (x,p) \in A_2^1\},\\
\overline{A_2^2}^1 &:= \{(x,p,u) \mid u \in C^1_{(x,p)}, (x,p) \in A_2^2\},\\
\overline{A_2^2}^2 &:= \{(x,p,u) \mid u \in C^2_{(x,p)}, (x,p) \in A_2^2\},\\
\overline{A_{1,1}}^2 &:= \{(x,p,u) \mid u \in C^2_{(x,p)}, (x,p) \in A_{1,1}\},\\
\overline{A_{1,2}}^1 &:= \{(x,p,u) \mid u \in C^1_{(x,p)}, (x,p) \in A_{1,2}\},\\
\overline{A_{1,(1,2)}}^{1,2} &:= \{(x,p,u) \mid u \in C^{1,2}_{(x,p)}, (x,p) \in A_{1,(1,2)}\},
\end{aligned}$$

のように定義する．ただし

$$\begin{aligned}
A_2^1 &:= A_1 \cap \{(x,p) \mid \xi_1 = 0\}, & C^1_{(x,p)} &= \{(u_1, 0) \in C_{(x,p)}\},\\
A_2^2 &:= A_1 \cap \{(x,p) \mid \xi_2 = 0\}, & C^2_{(x,p)} &= \{(0, u_2) \in C_{(x,p)}\},\\
A_{1,1} &:= A_1 \cap \{(x,p) \mid \xi_1 \neq 0\}, & C^{1,2}_{(x,p)} &= C_{(x,p)} \setminus \{0\},\\
A_{1,2} &:= A_1 \cap \{(x,p) \mid \xi_2 \neq 0\}, & &\\
A_{1,(1,2)} &:= A_1 \cap \{(x,p) \mid \xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0\}, & &
\end{aligned}$$

である．

さて，ξ_1 と ξ_2 の一方だけが $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n},q_0}$-加群 $\langle a_1, a_2, \{a_1,a_2\}\rangle_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n},q_0}}$ に属している状況で，次の二つの命題を得る．

命題 2.7 ([12])**.** 関数 a_1, a_2 と $\{a_1,a_2\}$ は独立であると仮定する．さらに

$$\xi_2 \in \langle a_1, a_2, \{a_1,a_2\}\rangle_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n},q_0}},\ \xi_1 \notin \langle a_1, a_2, \{a_1,a_2\}\rangle_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n},q_0}}$$

が A_1 の任意の点 q_0 において成立すると仮定する．このとき次が成り立つ．

1. $\phi_F(\overline{A_{1,1}}^2)$ は L_F の $A_{1,1}$ 上 smoothly solvable な部分多様体である．
2. さらに $\xi_1, a_1, a_2, \{a_1,a_2\}$ は独立であると仮定する．
   (a) $\phi_F(\overline{A_2^1}^2)$ は L_F の A_2^1 上 smoothly solvable な部分多様体である．
   (b) A_2^1 の任意の q_0 について $\{a_1,\xi_1\} \in \langle a_1, a_2, \{a_1,a_2\}, \xi_1\rangle_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n},q_0}}$ が成り立つとすると，$\phi_F(A_2^1 \times \mathbb{R}^2)$ は A_2^1 上 smoothly solvable な L_F の部分多様体である．

命題 2.8 ([12])**.** 関数 a_1, a_2 と $\{a_1,a_2\}$ は独立であると仮定する．さらに

$$\xi_2 \in \langle a_1, a_2, \{a_1,a_2\}\rangle_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n},q_0}} \text{and } \xi_1 \notin \langle a_1, a_2, \{a_1,a_2\}\rangle_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n},q_0}}$$

が A_1 の任意の点 q_0 において成立すると仮定する．このとき次が成り立つ．

1. $\phi_F(\overline{A_{1,2}}^1)$ は L_F の $A_{1,2}$ 上 smoothly solvable な部分多様体である．
2. さらに $\xi_2, a_1, a_2, \{a_1,a_2\}$ は独立であると仮定する．
   (a) $\phi_F(\overline{A_2^2}^1)$ は L_F の A_2^2 上 smoothly solvable な部分多様体である．

(b) A_2^2 の任意の q_0 について $\{a_2, \xi_2\} \in \langle a_1, a_2, \{a_1, a_2\}, \xi_2\rangle_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n}, q_0}}$ が成り立つとすると, $\phi_F(A_2^2 \times \mathbb{R}^2)$ は A_2^2 上 smoothly solvable な L_F の部分多様体である.

関数 ξ_1, ξ_2 について $\xi_1, \xi_2 \notin \langle a_1, a_2, \{a_1, a_2\}\rangle_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n}, q_0}}$ の場合には次の命題が成り立つ.

命題 2.9 ([12]). 関数 a_1, a_2 と $\{a_1, a_2\}$ は独立であると仮定する. この時 $A_{1,(1,2)}$ の任意の点 q_0 で $\xi_1, \xi_2 \notin \langle a_1, a_2, \{a_1, a_2\}\rangle_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n}, q_0}}$ が成り立つならば $\phi_F(\overline{A_{1,(1,2)}}^{1,2})$ は $A_{1,(1,2)}$ 上 smoothly solvable な L_F の部分多様体である.

次の二つの命題は上記の3つとは異なるタイプの十分条件である. A_2^1 と A_2^2 上 smoothly solvable な L_F の部分多様体の例を与える.

命題 2.10 ([12]). 関数 a_1, a_2, $\{a_1, a_2\}$ と ξ_1 は独立であると仮定する. この時 A_2^1 の任意の点 q_0 で $\{a_1, \xi_1\} \in \langle a_1, a_2, \{a_1, a_2\}, \xi_1\rangle_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n}, q_0}}$ が成り立つならば, $\phi_F(\overline{A_2^1}^1)$ は A_2^1 上 smoothly solvable な L_F の部分多様体である.

命題 2.11 ([12]). 関数 a_1, a_2, $\{a_1, a_2\}$ と ξ_2 は独立であると仮定する. この時 A_2^2 の任意の点 q_0 で $\{a_2, \xi_2\} \in \langle a_1, a_2, \{a_1, a_2\}, \xi_2\rangle_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n}, q_0}}$ が成り立つならば, $\phi_F(\overline{A_2^2}^2)$ は A_2^2 上 smoothly solvable な L_F の部分多様体である.

3 サブリーマン幾何への応用

前節で得られた結果を, サブリーマン多様体の特異曲線の研究に応用する. はじめに基本的な事項を述べる. 接分布 $\mathcal{D}$ に対し, M 上の絶対連続な曲線 $\gamma\colon I \to M$ が水平曲線であるとは, $\dot{\gamma}(t)$ が有界可測であり, 殆ど全ての $t \in I$ について $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$ となるときをいう. 接分布 $\mathcal{D}$ がヘルマンダー (Hörmander) 条件を満たすとは, ある自然数 $d \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $q_0 \in M$ の開近傍 U_{q_0} で定義された $\mathcal{D}$ の局所枠 $\{X_1, \ldots, X_k\}$ が $q \in U_{q_0}$ で

$$span\{X_1, \ldots, X_k, [X_i, X_j], \ldots, [X_{i_1}, [X_{i_2}, [\cdots, [X_{i_{d-1}}, X_{i_d}], \cdots,]]]\} = T_qM$$

を満たすときにいう. Chow–Rashevsky の定理により, 連結な多様体 M 上の接分布 $\mathcal{D}$ がヘルマンダー条件を満たすとき, 任意の二点を結ぶ水平曲線が存在するため, 連結なサブリーマン多様体に対し, カルノー・カラテオドリ (Carnot–Carathéodory) 距離を次のように定義することができる.

$$d_{CC}(p,q) := \inf_{\gamma}\Big\{L(\gamma) := \int_{[a,b]} \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}dt \mid \gamma\colon [a,b] \to M : \text{水平曲線}, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\Big\}.$$

二点 p, q を結ぶ水平曲線 γ が $d_{CC}(p,q) = L(\gamma)$ を満たす時, γ は最短線とよばれる. 水平曲線 $\gamma\colon I \to M$ が局所最短線であるとは, 任意の $t_0 \in I$ に対して $\varepsilon > 0$ が存在して, $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ の全ての部分閉区間 J について $\gamma\,|_{J \cap I}$ が両端点を結ぶ最短線であるときにいう.

サブリーマン幾何学においても測地線方程式が定式化される. 余接束 T^*M 上の関数を

$$H_E(x,p) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij}(x)\langle p, X_i(x)\rangle\langle p, X_j(x)\rangle$$

で定義する．ここで $g_{ij}=g(X_i,X_j)$ であり，$(g^{ij})_{i,j}$ は $(g_{ij})_{i,j}$ の逆行列である．余接束 T^*M の上の標準的シンプレクティック構造に関して，H_E のハミルトンベクトル場を考えることができる．T^*M のダルブー座標系 (x,p) について，このハミルトンベクトル場に対応する1階常微分方程式は

$$\dot{x}(t)=\frac{\partial H_E}{\partial p}(x(t),p(t)),\quad \dot{p}(t)=-\frac{\partial H_E}{\partial x}(x(t),p(t))$$

と表され，測地線方程式と呼ばれる．測地線方程式の解を正規陪極値曲線 (normal bi-extremal) と呼び，その M への射影を正規極値曲線 (normal extremal) または正規測地線 (normal geodesic) と呼ぶ．局所最短な通常水平曲線は正規測地線になることが知られており，したがって滑らかな曲線であることがわかる．R. Montgomery は 1994 年に，Martinet 接分布に対して正規測地線でない最短線の例を構成した [9]．滑らかさが問題になっているのは，正規測地線でない最短線である．そのような最短線の候補は終点写像の特異点によって定義されている．

有界可測曲線 $c\colon [0,T]\to\mathcal{D}$ に対して，曲線 $\gamma:=\pi_{\mathcal{D}}\circ c\colon [0,T]\to M$ が $[0,T]$ 上殆ど至るところ $\dot{\gamma}(t)=c(t)$ を満たすとき，γ は水平曲線であり，c は（許容速度）*admissible velocity* と呼ばれる．ここで $\pi_{\mathcal{D}}\colon\mathcal{D}\to M$ は標準的射影である．M 上の任意の点 q_0 について，許容速度の集合

$$\mathcal{V}_{q_0}:=\{c\mid c\colon[0,T]\to\mathcal{D}: \textit{admissible velocity},\ \gamma(0)=q_0\}$$

は Banach 多様体をなす．終点写像

$$\mathrm{End}(q_0)\colon \mathcal{V}_{q_0}\to M, c\mapsto\gamma(T)$$

は Fréchet 微分可能な写像である．終点写像の特異点は特異速度と呼ばれ，対応する曲線は特異曲線 (singular curve) と呼ばれる．正則点は通常速度と呼ばれ，対応する曲線は通常曲線 (regular curve) と呼ばれる．

特異曲線には拘束条件つきハミルトン系による特徴づけがある．関数 $H\colon T^*M\times_M\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ を $x\in M, p\in T^*M$ と $u\in\mathcal{D}_x$ に対して $H(x,p,u):=\langle p,u\rangle$ と定義する．次の命題によって，特異曲線が拘束条件つきハミルトン系で表される．

命題 3.1 ([7], p.567). 階数 k の接分布 $\mathcal{D}$ に対する M 上の水平曲線 $x(t)$ が特異曲線であるための必要十分条件は，$x(t)$ に対して正定数 $\varepsilon>0$，曲線 $p(t)\in T^*_{x(t)}M\setminus\{0\}$ と $u(t)\in\mathcal{D}_{x(t)}$ が存在して，曲線 $(x(t),p(t),u(t))$ が $t\in[0,\varepsilon)$ 上殆ど至る所で次の方程式を満たすことである．

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\dfrac{\partial H}{\partial p}(x(t),p(t),u(t)),\\ \dot{p}(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x}(x(t),p(t),u(t)),\\ \dfrac{\partial H}{\partial u_i}(x(t),p(t),u(t))=0\ (1\le i\le k).\end{cases}$$

命題 3.1 の拘束条件つきハミルトン系の T^*M 上の解曲線 $(x(t),p(t))$ は異常陪極値曲線 (abnormal bi-extremal) と呼ばれ，その M への射影は異常極値曲線 (abnormal extremal) または特異曲線 (singular curve) と呼ばれる．局所最短線は正規極値曲線かまたは異常極値曲線であることが知られている．この二つの可能性は排他的ではなく，異常極値曲線は一般には局所最短線にならないことが

わかっている．どんな接分布に対しても拘束条件つきハミルトン系を考えることができるが，その解の存在については一般に保証されない．

接分布に関する事項をもう一つ述べる．接分布 $\mathcal{D}$ の Lie flag とは次のように帰納的にあたえられる列 $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_1 \subset \cdots$ のことである．

$$\mathcal{D}_0 := \mathcal{D}, \quad \mathcal{D}_{i+1} := \mathcal{D}_i + [\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_i], \quad i \geq 0.$$

接分布 $\mathcal{D}$ の $q \in M$ における small growth vector とは Lie flag の各 flag の次元を並べたものをいう；

$$(\dim \mathcal{D}_0(q), \dim \mathcal{D}_1(q), \dim \mathcal{D}_2(q), \ldots).$$

次の補題はこの節で基本的である．

補題 3.2. $\mathcal{D}$ を階数 2 の接分布であって，任意の $q \in M$ の開近傍で small growth vector $(2,3,4,\ldots)$ をもつものとする．また g を $\mathcal{D}$ の双線形正定値形式とする．この時，開近傍 U_q とその上の $\mathcal{D}$ の正規直交局所枠 X_1, X_2 が存在して

$$X_1, X_2, [X_1, X_2], [X_1, [X_1, X_2]]$$

は q で線形独立となり，$[X_2, [X_1, X_2]]$ は U_q 上で X_1, X_2 と $[X_1, X_2]$ に関する関数係数の線形和で書ける．

任意の $q \in M$ における開近傍 U_q 上の $\mathcal{D}$ の局所枠を $\{X_1, X_2\}$ とし，補題 3.2 の性質を持つものとする．いま接分布 $\mathcal{D}$ 対して関数 $H\colon T^*U_q \times_{U_q} \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ を局所的に

$$H(x,p,u) = u_1\langle p, X_1(x)\rangle + u_2\langle p, X_2(x)\rangle$$

と定義する．関数 $a_1(x,p) := \langle p, X_1(x)\rangle$ と $a_2(x,p) := \langle p, X_2(x)\rangle$ に対して命題 2.7-(2)-(a) が適用でき，次の命題を得る．

命題 3.3 ([12]). M の任意の q で small growth vector $(2,3,4,\ldots)$ を持つ階数 2 の接分布 $\mathcal{D}$ に対して，q の開近傍 U_q とその上の $\mathcal{D}$ の局所枠 $\{X_1, X_2\}$，そして異常陪極値曲線 $(x(t), p(t)) \in T^*U_q \setminus \{o\}$ が存在して

$$\dot{x}(t) = X_2(x(t)), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial\langle p, X_2(x)\rangle}{\partial x}(x(t), p(t))$$

及び

$$\langle p(t), X_1(x(t))\rangle = 0, \quad \langle p(t), X_2(x(t))\rangle = 0,$$
$$\langle p(t), [X_1, X_2](x(t))\rangle = 0, \ \langle p(t), [X_1, [X_1, X_2]](x(t))\rangle = 0.$$

がなりたつ．

補題 3.2 からこの命題はサブリーマン構造 $(\mathcal{D}, g)$ についても成立する．またそこに現れる異常極値曲線は通常測地線でないことも証明される．

定理 1.2 (再掲). $(M, \mathcal{D}, g)$ を階数 2 の接分布 $\mathcal{D}$ を持つサブリーマン多様体とし，$\mathcal{D}_1 := \mathcal{D} + [\mathcal{D}, \mathcal{D}]$ は階数 3 の，$\mathcal{D}_2 := \mathcal{D}_1 + [\mathcal{D}, \mathcal{D}_1]$ は階数 4 の TM の部分束であるとする．このとき任意の点 $q \in M$ に対し，q の M の中の開近傍 U_q が存在して，U_q に C^∞ 級にはめ込まれた特異曲線 $x(t)$ で，測地線方程式を満たさないようなものが存在する．

備考 3.4 ([2], Theorem 2.8). 階数が 3 以上のジェネリックなサブリーマン構造に対しては, 特異最短線が存在しないことが知られている.

参考文献

[1] Arnold. V. I, Varchenko. A, Gusein-Zade. S.M, *Singularities of Differentiable Maps, Vol. I*, Springer, (1985).

[2] Chitour. Y, Jean. F, Trélat. E, Genericity results for singular curves, *J. differential geometry*, **73** (2006), 45-73.

[3] Bonnard. B, Chyba. M, *Singular trajectories and their role in control theory*, Springer, (2003).

[4] Fukuda. T, Janeczko. S, Singularities of implicit differential systems and their integrability, *Banach center publications*, **65** (2004), 23-47.

[5] Fukuda. T, Janeczko. S, Symplectic singularities and solvable Hamiltonian mappings, *Demondtratio Mathematica*, **48** no.2 (2015), 118-146.

[6] Fukuda. T, Janeczko. S, *A résumé on Workshop on singularities, geometry, topology and related topics (2014, September 1st – 3rd)*, personal communication.

[7] Hsu. L, Calculus of variations via the Griffiths formalism, *J. Diff. Geom*, **36** (1992), 551-589.

[8] Liu. W, Sussman.H. J, *Shortest Paths for sub-Riemannian metrics on rank-two distributions*, American Mathematical Society, Memoirs of the AMS, vol. **118**, no. 564 (1995).

[9] Montgomery. R, Abnormal minimizers, SIAM, *J. Control Optim.* **32** 6, (1994) 1605-1620.

[10] Montgomery. R, A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications, *American Mathematical Society* Mathematical surveys and Monographs vol. **91** (2002).

[11] Tsuchida. A, Smooth solvability of implicit Hamiltonian systems and existence of singular control for affine control systems (in Japanese), *RIMS Kôkyûroku* **1948** (2015), 153- 159.

[12] Tsuchida. A, Implicit Hamiltonian systems and singular curves of Distributions, primary accepted.