

# On umbilics on newly born surfaces

岩手医科大学教養教育センター 長谷川大

Masaru HASEGAWA

Center for Liberal Arts and Sciences,

Iwate Medical University

## 1 序

$\varepsilon$  を十分小さな実数とし, 関数  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  が原点でモース特異点を持つとする. 指数が 1 または 2 のとき, 局所的に  $f^{-1}(0)$  は錘面,  $f^{-1}(\varepsilon)$  は一葉双曲面または二葉双曲面となり, 指数が 0 または 3 のときは, 局所的に  $f^{-1}(0)$  は孤立点,  $f^{-1}(\varepsilon)$  は凸閉曲面となる. 筆者は最近  $f^{-1}(0)$  や  $f^{-1}(\varepsilon)$  の幾何的性質に興味があり, [5] において, 指数が 1 または 2 のときの  $f^{-1}(0)$  上の放物的曲線 (parabolic curve), 峰 (ridge curve), 劣放物的曲線 (sub-parabolic curve) について解析した. 本稿では, 指数が 0 または 3 の場合の  $f^{-1}(\varepsilon)$  上の臍点 (umbilic) の個数とタイプを調べることを目標である.

3次元ユークリッド空間内の曲面の臍点の近くでの曲率線のジェネリックな形状は図1のように3つのタイプに分類されることが知られている ([1], [3], [4]). 図1の左のような曲率線の形状の臍点はレモンまたは  $D_1$ , 図1の中央のような曲率線の形状の臍点はモンスターまたは  $D_2$ , 図1の右のような曲率線の形状の臍点はスターまたは  $D_3$  と呼ばれる. レモンとモンスタースターの指数は  $+1/2$ , スターの指数は  $-1/2$  である.

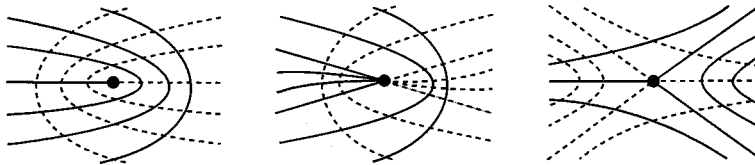


図1 臍点の近くの曲率線のジェネリックな形状の3つのタイプ. 左から順にレモン, モンスター, スター.

第2節では、3次元ユークリッド空間内の  $f^{-1}(\varepsilon)$  の臍点について、 $f$  のヘッセ行列の固有値がすべて異なる場合と、2つが等しい場合について述べる。第3節では、3次元ミンコフスキー空間内の  $f^{-1}(\varepsilon)$  の臍点について、 $f$  のヘッセ行列の空間的固有ベクトルに対応する2つの固有値が異なる場合と、その固有値が等しい場合について述べる。

本稿の内容は Farid Tari 氏との共同研究 [6] に基づく。証明等の詳細は [6] を参照されたい。

## 2 3次元ユークリッド空間内の曲面

可微分関数  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  の正則値の逆像で与えられる正則な曲面を  $S$  とする。与えられた曲面上の点の近傍で  $f_z \neq 0$  と仮定しても一般性を失わない。このとき、 $S$  は局所的にある可微分関数  $g: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  のグラフとして表され、局所的なパラメータ表示  $\varphi(x, y) = (x, y, g(x, y))$  を持つ。したがって、 $f(x, y, g(x, y)) \equiv 0$  を微分することで、 $S$  の  $\varphi$  に関する第一基本形式の係数  $E, F, G$  および第二基本形式の係数  $l, m, n$  に関する次の関係式を得る:

$$(f_z^2)E = f_x^2 + f_y^2, \quad (2.1)$$

$$(f_z^2)F = f_x f_y, \quad (2.2)$$

$$(f_z^2)G = f_y^2 + f_z^2, \quad (2.3)$$

$$-(f_z^3)l = f_{xx}f_z^2 - 2f_x f_z f_{xz} + f_x^2 f_{zz}, \quad (2.4)$$

$$-(f_z^3)m = f_{xy}f_z^2 - (f_y f_{xz} + f_x f_{yz})f_z + f_x f_y f_{zz}, \quad (2.5)$$

$$-(f_z^3)n = f_{yy}f_z^2 - 2f_y f_z f_{yz} + f_y^2 f_{zz}. \quad (2.6)$$

臍点には次のような同値な定義がある:

- 型作用素が単位行列の定数倍になる点,
- 主曲率が等しくなる点,
- 第一基本量と第二基本量が比例する点,
- 曲率線の微分方程式が特異点を持つ点.

したがって、臍点は

$$\begin{pmatrix} E & F & G \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

の小行列式が 0 となる点といえる。その小行列式を

$$U = Em - Fl, \quad V = Fn - Gm, \quad W = En - Gl$$

とする。これらは、(2.1) から (2.6) の関係式を用いると  $f$  の偏微分で記述できる。曲面  $S$  上の臍点は  $f^{-1}(\varepsilon)$ ,  $U = 0$ ,  $V = 0$ ,  $W = 0$  の交点であるから、 $U = 0$ ,  $V = 0$ ,  $W = 0$  の交線を考えればよい。(実際には、 $U = 0$ ,  $V = 0$ ,  $W = 0$  のうちの 2 つの交線で十分である。)

$S$  上の臍点  $\varphi(x_0, y_0)$  において

$$\begin{aligned} Fn - Gl &= A_1(x - x_0) + A_2(y - y_0) + O(2), \\ En - Gl &= B_1(x - x_0) + B_2(y - y_0) + O(2), \\ Em - Fl &= C_1(x - x_0) + C_2(y - y_0) + O(2) \end{aligned}$$

とし、

$$\psi(p) = A_2 p^3 + (2B_2 + A_1)p^2 + (2B_1 + C_2)p + C_1 \quad (2.7)$$

とおくと、 $\psi$  の判別式の符号が負であるとき、臍点  $\varphi(x_0, y_0)$  のタイプはレモンである ([2]).

今われわれの考えている曲面  $S$  は、 $\varepsilon$  を十分小さな実数としたとき、原点で指数 0 または 3 のモース特異点を持ちヘッセ行列の固有値がすべて異なる関数  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  のファイバー  $f^{-1}(\varepsilon)$  で与えられている。よって、 $f$  として

$$f = \frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} + \frac{z^2}{\lambda_3^2} + O(3) \quad (0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3) \quad (2.8)$$

を考えても一般性を失わない。

$f$  が (2.8) で与えられているとき、(2.1) から (2.6) を用いると、

$$U = \frac{2(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)}{\lambda_1^4 \lambda_2^2 \lambda_3^4} xyz + O(4), \quad (2.9)$$

$$W = \frac{2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^4} z \left( \frac{\lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\lambda_1^2} x^2 + \frac{\lambda_3^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2^2} y^2 + \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_3^2} z^2 \right) + O(4) \quad (2.10)$$

を得る. ただし,  $f_z^4 U$  を  $U$  としている.  $W$  に関しても同様である.

(2.9) と (2.10) の交線と, (2.7) の判別式の符号を調べることにより, 次の定理を得る.

**定理 2.1** ([6]).  $f: \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$  を原点で指数 0 または 3 のモース特異点を持つ可微分写像芽とする. また,  $f$  の原点でのヘッセ行列の固有値はすべて異なるとする. このとき, 十分小さな実数  $\varepsilon$  (指数が 0 のときは  $\varepsilon > 0$ , 指数が 3 の場合は  $\varepsilon < 0$ ) に対するファイバー  $f^{-1}(\varepsilon)$  はちょうど 4 つの臍点を持ち, それらのタイプはレモンである.

ヘッセ行列の固有値の 2 つが等しい場合は, (2.8) において  $\lambda_1 = \lambda_2$  として (2.9) と (2.10) の交線を調べることにより, 次の定理を得る.

**定理 2.2** ([6]).  $f: \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$  を原点で指数 0 または 3 のモース特異点を持つ可微分写像芽とする. また,  $f$  の原点でのヘッセ行列の固有値のちょうど 2 つが等しいとする. このとき, 十分小さな実数  $\varepsilon$  (指数が 0 のときは  $\varepsilon > 0$ , 指数が 3 の場合は  $\varepsilon < 0$ ) に対するファイバー  $f^{-1}(\varepsilon)$  は 2 個, 4 個, 6 個または 8 個の臍点を持つ.

**注意 2.3.** 定理 2.1 と定理 2.2 は 2-jet が非球面的な *newly born surface* について Carathéodory 予想が正しいことを示している. また,  $f$  のヘッセ行列の固有値がすべて等しい場合, すなわち 2-jet が球面的な *bumpy sphere* の臍点の個数は  $f$  の 3 次の項によって決まり, 少なくとも 2 個あることが知られている ([8], [9]).

### 3 3次元ミンコフスキー空間内の曲面

3次元の数ベクトル空間  $\mathbb{R}^3$  の任意のベクトル  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  に対して擬内積を  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$  と定義する. 3次元の数ベクトル空間  $\mathbb{R}^3$  と擬内積  $\langle, \rangle_1$  の対  $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle_1)$  を3次元ミンコフスキー空間  $\mathbb{R}_1^3$  と呼ぶ. ベクトル  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$  はそれぞれ  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 > 0$ ,  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 = 0$ ,

$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 < 0$  を満たすとき空間的ベクトル, 光的ベクトル, 時間的ベクトルと呼ばれる. また,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_1^3$  のノルムを  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1|}$  と定義する. ここで, ベクトル  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$  と実数  $c$  に対して, 擬法線ベクトルが  $\mathbf{v}$  となるような平面を  $P(\mathbf{v}, c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^3 | \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle_1 = c\}$  と定義する. 平面  $P(\mathbf{v}, c)$  はそれぞれ  $\mathbf{v}$  が空間的ベクトル, 光的ベクトル, 時間的ベクトルであるとき空間的平面, 光的平面, 時間的平面と呼ばれる. さらに,  $\mathbb{R}_1^3$  には次の 3 つの擬球面が存在する:

$$\begin{aligned} H^2(-1) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^3 | \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_1 = -1\} : \text{双曲平面,} \\ S_1^2 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^3 | \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_1 = 1\} : \text{ド・ジッター空間,} \\ LC^* &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\} | \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_1 = 0\} : \text{光錘.} \end{aligned}$$

$S$  を  $\mathbb{R}_1^3$  内の曲面とする.  $\mathbb{R}_1^3$  の擬内積はある計量または擬計量を誘導する. 擬計量は  $S$  上の接平面が光的である点で退化する. このような点の軌跡を Locus of Degeneracy ( $LD$ ) と呼ぶ.  $S$  が閉曲面のとき, その  $LD$  は少なくとも 2 つの互いに素な空でない  $S$  の閉部分集合の和集合である ([10]).

$\varphi = \varphi(u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  を  $S$  の局所的なパラメータ表示とする. このとき,  $S$  の第一基本形式の係数を

$$E_1 = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_1, \quad F_1 = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_1, \quad G_1 = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_1$$

とする.  $U$  内の  $LD$  の  $\varphi$  による逆像は, 集合  $\{(u, v) \in U | (E_1 G_1 - F_1^2)(u, v) = 0\}$  である. 今後,  $LD$  とその逆像を同一視して考える.

$U$  を  $U = U_1 \cup U_2 \cup LD$  と書く. ここで,  $\varphi(U_1)$  は Riemannian part,  $\varphi(U_2)$  は Lorentzian part である. このとき, 次のような  $\varphi(U_1) \cap \varphi(U_2)$  上の 2 つのガウス写像がある: 1 つは  $S$  の Riemannian part 上で定義されるド・ジッターガウス写像  $\varphi(U_1) \rightarrow S_1^2$ . もう 1 つは  $S$  の Lorentzian part 上で定義される双曲的ガウス写像  $\varphi(U_2) \rightarrow H_1^2(-1)$  である. どちらの写像も  $\mathbf{N}_1 = \varphi_u \wedge \varphi_v / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$  で与えられる. ここで,  $\wedge$  は

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

で与えられる擬外積である。ただし,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  は  $\mathbb{R}_1^3$  の標準的な基底である。型作用素  $A_p = -(d\mathbf{N}_1)_p : T_p S \rightarrow T_p S$  は任意の点  $p \in \varphi(U) \setminus LD$  において自己随伴作用素である。  $\varphi(U) \setminus LD$  における第二基本形式の係数を

$$l_1 = \langle \mathbf{N}_1, \varphi_{uu} \rangle_1, \quad m_1 = \langle \mathbf{N}_1, \varphi_{uv} \rangle_1, \quad n_1 = \langle \mathbf{N}_1, \varphi_{vv} \rangle_1$$

とする。  $A_p$  が実数の固有値をもつとき, その固有値と対応する固有ベクトルをそれぞれ  $S$  の  $p$  における主曲率, 主方向と呼ぶ。 ( $S$  の Riemannian part では常に2つの主曲率が存在するが, Lorentzian part ではそうとは限らない。) 曲率線の微分方程式は

$$(E_1 m_1 - F_1 l_1) du^2 + (E_1 n_1 - G_1 l_1) dudv + (F_1 n_1 - G_1 m_1) dv^2 = 0 \quad (3.11)$$

で与えられる。

(3.11) のすべての係数が0となる Riemannian part と Lorentzian part の点をそれぞれ空間的臍点, 時間的臍点と呼ぶ。空間的臍点の近くでの曲率線の形状はレモン, モンスター, スターのいずれかであるが, 時間的臍点の近くでの曲率線の形状は図2のようになる ([7]).

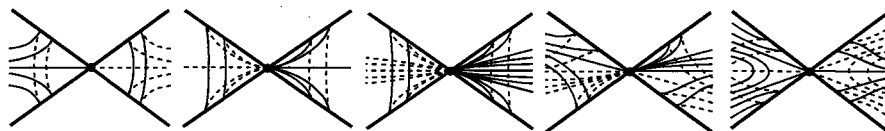


図2 時間的臍点の近くにおける曲率線の5つの形状。

$LD$  上の点では,  $\varphi_u \wedge \varphi_v$  は光的ベクトルとなり, そのような点では  $A_p$  は定義されない。しかし, (3.11) は  $l_1, m_1, n_1$  について homogeneous であるから,  $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$  をかけて,

$$\bar{l}_1 = \langle \varphi_u \wedge \varphi_v, \varphi_{uu} \rangle_1, \quad \bar{m}_1 = \langle \varphi_u \wedge \varphi_v, \varphi_{uv} \rangle_1, \quad \bar{n}_1 = \langle \varphi_u \wedge \varphi_v, \varphi_{vv} \rangle_1$$

と置き換えることができる。この置き換えは (3.11) で定まる foliation の組を保存するので, 新しい微分方程式

$$(E_1 \bar{m}_1 - F_1 \bar{l}_1) du^2 + (E_1 \bar{n}_1 - G_1 \bar{l}_1) dudv + (F_1 \bar{n}_1 - G_1 \bar{m}_1) dv^2 = 0 \quad (3.12)$$

は  $LD$  上で定義でき, その解は  $LD$  を通る曲率線の拡張と考えることができる.  $LD$  上の点で (3.12) の係数がすべて 0 となる点を光的臍点と呼ぶ.

$\mathbb{R}_1^3$  内の凸閉曲面の臍点については次の結果がある.

**定理 3.1** ([10]).  $S$  を  $\mathbb{R}_1^3$  内の  $C^k$  ( $k \geq 3$ ) 級の凸閉曲面とする. このとき,  $S$  は少なくとも 2 つの臍点を持つ.

3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の曲面で任意の点でガウス曲率が正であるものを卵形面 (ovaloid) という. 言い換えると, 卵形面は任意の点で接平面と  $A_1^+$ -接触をする, すなわち任意の点で法線ベクトル方向に沿った高さ関数が  $A_1^+$  特異点を持つ曲面といえる.

**命題 3.2** ([6]).  $f: \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$  を原点で指数 0 または 3 のモース特異点を持つ可微分写像芽とすると, 十分小さな実数  $\varepsilon$  (指数が 0 のときは  $\varepsilon > 0$ , 指数が 3 の場合は  $\varepsilon < 0$ ) に対するファイバー  $f^{-1}(\varepsilon)$  は  $\mathbb{R}^3$  内の卵形面である.

上記のように  $\mathbb{R}^3$  内の卵形面のコンセプトは接平面との接触で記述できる. したがって, そのコンセプトは  $\mathbb{R}_1^3$  内の曲面においても有効である. ( $LD$  上ではガウス曲率は定義できないが, 卵形面であることの必要十分条件は  $\bar{l}_1 \bar{n}_1 - \bar{m}^2 > 0$  である.)  $\mathbb{R}_1^3$  内の卵形面の臍点については次の結果がある.

**定理 3.3** ([10]).  $\mathbb{R}_1^3$  内の  $C^k$  ( $k \geq 3$ ) 級の卵形面は少なくとも 2 つの臍点を持ち, それらはすべて空間的臍点である.

**例 3.4** ([6]). 楕円面

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 \mid \frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} + \frac{z^2}{\lambda_3^2} = 1 \right\} \quad (0 < \lambda_1 < \lambda_2, 0 < \lambda_3)$$

は卵形面である.  $LD$  は 2 つの滑らかな閉曲線の和集合で, 楕円面を 3 つの領域 (中央は Lorentzian part, 残りの 2 つは Riemannian part) に分ける. また, 4 つの異なる空間的臍点を持ち (2 つずつ異なる Riemannian part 上にある), タイプはすべてレモンである.

$\lambda_1 = \lambda_2$  の場合は, それぞれの Riemannian part にある 2 つの臍点は一致

し、2つの Reimannian part に1つずつの臍点がある。

**注意 3.5.** 命題 3.2 より、 $f: \mathbb{R}_1^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$  を原点で指数 0 または 3 のモース特異点を持つ可微分写像芽とする。また、 $f$  の原点でのヘッセ行列の空間的固有ベクトルに対応する固有値が異なるとする。このとき、十分小さな実数  $\varepsilon$  (指数が 0 のときは  $\varepsilon > 0$ , 指数が 3 の場合は  $\varepsilon < 0$ ) に対するファイバー  $f^{-1}(\varepsilon)$  は  $\mathbb{R}_1^3$  内の卵形面である。

$\mathbb{R}^3$  の場合と同様に局所的なパラメータ表示を考え、そのパラメータ表示に関して、

$$U_1 = E_1 \bar{m}_1 - F_1 \bar{l}_1, \quad V_1 = F_1 \bar{n}_1 - G_1 \bar{m}_1, \quad W_1 = E_1 \bar{n}_1 - G_1 \bar{l}_1$$

を考えることで、次の定理を得る。

**定理 3.6 ([6]).**  $f: \mathbb{R}_1^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$  を原点で指数 0 または 3 のモース特異点を持つ可微分写像芽とする。また、 $f$  の原点でのヘッセ行列の空間的固有ベクトルに対応する固有値が異なるとする。このとき、十分小さな実数  $\varepsilon$  (指数が 0 のときは  $\varepsilon > 0$ , 指数が 3 の場合は  $\varepsilon < 0$ ) に対するファイバー  $f^{-1}(\varepsilon)$  はちょうど 4 つの臍点を持ち、それらは空間的でタイプはレモンである。

**定理 3.7 ([6]).**  $f: \mathbb{R}_1^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$  を原点で指数 0 または 3 のモース特異点を持つ可微分写像芽とする。また、 $f$  の原点でのヘッセ行列の空間的固有ベクトルに対応する固有値が等しいとする。このとき、十分小さな実数  $\varepsilon$  (指数が 0 のときは  $\varepsilon > 0$ , 指数が 3 の場合は  $\varepsilon < 0$ ) に対するファイバー  $f^{-1}(\varepsilon)$  は 2 個、4 個、6 個または 8 個の空間的臍点を持つ。

## 参考文献

- [1] J. W. Bruce and D. Fidal, On binary differential equations and umbilics. Proc. Royal Soc. Edinburgh 111A (1989), 147–168.



- [2] J. W. Bruce and F. Tari, On binary differential equations, *Nonlinearity*, **82** (1995), 255–271.
- [3] G. Darboux, Sur la forme des lignes de courbure dans la voisinage d'un ombilic, *Leçons sur la Theorie des Surfaces*, IV, Note 7, Gauthier Villars, Paris (1896).
- [4] C. Gutierrez and J. Sotomayor, Structurally stable configurations of lines of principal curvature, *Bifurcation, ergodic theory and applications* (Dijon, 1981), 195–215, *Astérisque*, 98-99, Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [5] M. Hasegawa, Parabolic, ridge and sub-parabolic curves of implicit surfaces with singularities, to appear in *Osaka J. Math.*
- [6] M. Hasegawa and F. Tari, On umbilics on newly born surfaces, preprint.
- [7] S. Izumiya and F. Tari, Self-adjoint operators on surfaces with a singular metric, *J. Dyn. Control Syst.*, **16** (2010), 329–353.
- [8] S. Markatis, Some generic phenomena in families of surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , PhD thesis, University of Liverpool 1980.
- [9] I. R. Porteous, The normal singularities of surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , *Singularities*, Part 2 (Arcata, Calif., 1981), 379–393, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **40**, Amer. Math. Soc., 1983.
- [10] F. Tari, Umbilics of surfaces in the Minkowski 3-space. *J. Math. Soc. Japan*, **65** (2013), 723–731.