数理解析研究所講究録
第2050巻 2017年 1-8

集合論で試される構造と構成のいくつか

Tadatoshi Miyamoto

2016年12月28日

はじめに 集合論ZFCやその一部分からなる理論は、一階術語論理の枠組みを使って、形式化されている。これにより、集合、関係、写像、そして、集合論のモデルについて、足元に不安をもつことなく、議論をすることができる。なぜならば、そこには集合しか存在しないからである。登場するのは集合だけということだが、例えば、空集合 $0=\emptyset=\{\}$、$0\in 1=\{\emptyset\}$、あるいは $0\in 1\in 2=\{0,1\}$ はわかりやすいかもしれない。しかし、無限集合を積極的に議論するとき、話は難しくなる。なぜならば、実数の全体のような無限集合やそのうえの構造を想定すると、それらは強力な数学の枠組みとなる。よって、数学の強度のようなものを集合として結晶化し、それらを積極的に取り扱うことになるからである。この種の現象の詳しいことや、本格的な集合論の展開は、本稿では意図せず、集合論と無限が絡む数学の両方に詳しい専門家や専門書 [S] にお願いすることとし、私の話を進める。

推移的小宇宙 H_κ いま、ここに集合 A がある。いったいどれだけの集合 x が A とその要素の関係、つまり、$x\in A$ なる関係、にあるであろうか。さらに、$x\in A$ として、どれだけの集合 y が $y\in x$ であろうか。もちろん、$x\in A$ なる x すべてについて、y を考える。これを A からはじめて、樹形図的に下へ、下へと進める。このとき、正則性の公理から、無限 $\in$-下降列は存在しない。一方、この下降で手の届く集合の全体は集合である。この集合を、A の $\in$-関係に関する推移的閉包と呼び、$\mathrm{TC}(A)$ と記す。

$$\mathrm{TC}(A)=A\cup\bigcup A\cup\bigcup\bigcup A\cup\cdots.$$

次に、κ を非可算正則基数とし、κ を基準として、推移的閉包 $\mathrm{TC}(A)$ のサイズが κ 未満の、ある種、小さい集合 A の全体を考え、H_κ と記す。H_κ は集合であることが示せる。

$$H_\kappa=\{A\mid |\mathrm{TC}(A)|<\kappa\}.$$

では、集合 H_κ の要素に限定し、2項関係 $\in$ を考え、1階術語構造 $(H_\kappa, \in)$ を構成する。この構造は、“ほぼ” 集合論 ZFC の集合モデルになっている。“ほぼ” というのは、べき集合の公理については、κ の大きさに依存し、部分的に成立するからである。そこで、公理系 ZFC からべき集合の公理を除いたものを ZFC^- と記し、安全策として、$(H_\kappa, \in)$ は ZFC^- のモデルであると、穏健なところでおさめておく。

$$(H_\kappa, \in) \models \text{“ZFC}^-\text{”}.$$

これで、出発点となる構造 $(H_\kappa, \in)$ が準備できた。

初等部分構造 構造 $(H_\kappa, \in)$ は集合論の十分良いモデルであるが、その初等部分構造 $(N, \in)$ を考える。N を考えることにより、H_κ と同等にさまざまに閉じており、しかもサイズが小さく絞られたモデルを手にできる。特に、任意の論理式 $\varphi(y, v_1, \cdots, v_n)$ と N の要素の列 $a_1, \cdots, a_n$ について、

$$(H_\kappa, \in) \models \text{“}\exists\, y\, \varphi(y, a_1, \cdots, a_n)\text{”}$$

ならば、ある $y = y(a_1, \cdots, a_n)$ が N にすでに取り込まれていて、

$$(H_\kappa, \in) \models \text{“}\varphi(y, a_1, \cdots, a_n)\text{”}$$

が成立する。これは、方程式 $\varphi(y, x_1, \cdots, x_n)$ を $(H_\kappa, \in)$ で解釈するとき、媒介変数 $x_1, \cdots, x_n$ が N-値であれば、解 y は N にとれる、と見るとよい。

本稿では、N のサイズについては、大方、可算無限であるものに限定する。実は、H_κ に所属する順序数の全体は κ と一致し、H_κ 自身は $\in$-関係について、推移的である。任意の $x \in H_\kappa$ は $x \subset H_\kappa$ である。それゆえ、集合論の実宇宙 V の性質を反射できたのである。一方、N は可算であり、推移的ではない。N の要素列と可算個の方程式を根拠に N の要素をつなわたりしなければならない。慣れがいるが、使い勝手のよいどんぶり勘定である。なぜならば、前もって、方程式の形を特定する必要がないからである。

$(H_\kappa, \in)$ の可算なサイズの初等部分構造 $(N, \in)$ は、可算種類の方程式で閉じさせて作ることができるので、自由に、構成できる。このような N

については、N の特徴を示す指標を考える。例えば、$(N,\in)$ をモストウスキー縮小し、$(N,\in)$ と同型で、$\in$-関係に関して推移的な集合論の可算モデル $(\overline{N},\in)$ を構成できる。この N のタイプ $\overline{N}$ を指標としたり、最小非可算基数 ω_1 が $\overline{N}$ でどのように見えているかを示す $N\cap\omega_1$ を指標としたりする。また、N に所属する順序数の全体の上限 $\sup(N\cap\kappa)$ なども、指標として考える。

まず、古典的な次の結果を、可算初等部分構造を使って、再現してみる。

例（Δ-システム）添え字が付けられた有限集合の族 $\langle a_i \mid i<\omega_1\rangle$ がある。このとき、ある有限集合 Δ と ω_1 の非可算部分集合 I が存在し、各 $i,j\in I$、 $i\neq j$ に対して、一様に、

$$a_i\cap a_j=\Delta$$

が成立する。もちろん、各 a_i の要素の個数は、添え字の値によらず、一定としてよい。

説明を与える。各 a_i は可算順序数から成るとしてよい。つまり、$a_i\subset\omega_1$ とする。ここで、$\langle a_i \mid i<\omega_1\rangle\in N$ である $(H_\kappa,\in)$ の可算な初等部分構造 $(N,\in)$ をとる。$N\cap\omega_1<\omega_1$ であるから、N の有限部分集合

$$\Delta=a_{N\cap\omega_1}\cap(N\cap\omega_1)$$

は N の要素である。今、

$$(N,\in)\models\text{“}\forall i<\omega_1\exists j\ i<j<\omega_1\ a_j\cap j=\Delta\text{”}$$

が成立する。なぜならば、$i<N\cap\omega_1$ としたとき、$i<j=(N\cap\omega_1)<\omega_1$ であるから、

$$(H_\kappa,\in)\models\text{“}\exists j\ i<j<\omega_1\ a_j\cap j=\Delta\text{”}$$

である。よって、

$$(N,\in)\models\text{“}\exists j\ i<j<\omega_1\ a_j\cap j=\Delta\text{”}$$

である。よって、

$$(N,\in)\models\forall i<\omega_1\exists j\ i<j<\omega_1\ a_j\cap j=\Delta\text{”}$$

である。よって、

$$(H_\kappa, \in) \models \forall i < \omega_1 \exists j \; i < j < \omega_1 \; a_j \cap j = \Delta\text{''}$$

である。H_κ は推移的であるから、この事実は実宇宙 V でも成立する。

よって、$i < j$、$a_i \cap i = \Delta$、$a_j \cap j = \Delta$、 $a_i \subset j$ であれば、

$$a_i \cap a_j = a_i \cap (a_j \cap j) = a_i \cap \Delta = \Delta$$

である。

初等部分構造を利用した、いくつかの例を挙げる。ただし、以後、$(H_\kappa, \in)$ を H_κ で、$(N, \in)$ を N などで、適度に、代用する場面があるが、気にしないで頂きたい。

例 (Chang の予想) この予想は、つぎのような N の存在を宣言する。$(H_\kappa, \in)$ の初等部分構造 $(N, \in)$ であって、$|N \cap \omega_2| = \omega_1$ であり、$N \cap \omega_1 < \omega_1$ であるものが存在する。よって、このような N では、ω_2 まで考慮する場合、十分に要素を持つが、ω_1 の下では、集中しており、高々可算無限である。これは巨大基数公理と呼ばれる、実宇宙を強力な秩序で塗り分けようとする公理の一つである。例えば、この予想のもとでは、Kurepa 木は存在しない。特に、ゲーデルの構成的宇宙 L で成立している事柄と対極にある。

例 (有限に交互する初等部分構造の族) H_κ 自身ではないが、それに近い構造、例えば L_κ、の可算初等部分構造の集まり

$$\mathcal{M} = \{\cdots, N, \cdots, M, \cdots\}$$

であり、例えば、任意の $N, M \in \mathcal{M}$ について、N と M が同じ指標 $N \cap \omega_1 = M \cap \omega_1$ を持つならば、すでに、N と M は同型であるようなものを考える場合がある。このような、$\mathcal{M}$ の存在は、Kurepa 木、Jensen の $\Box_{\omega_1}$、より強力に $(\omega_1, 1)$-morass を導出する。これは、Velleman の研究に負うところが多いが、L と親和性が強い方向に位置する。[M]

例 (Shelah の proper forcing) 繰り返し強制法については、かつて、ccc forcing の理論から始まった。例えば、Martin's Axiom の相対的無矛盾性の証明があった。その後、Shelah により、格段に包括的な forcing poset のク

ラスが発見された。そこでは、強制法の回数によらず、各iterand（途中段階で使用されるforcing poset）が十分強力であれば、iteration 自体も良い性質をもつ、ことが示された。特に、proper forcingのクラスはcountable support iteration で閉じている。まず、繰り返しの回数やiterandの大きさをみこした、十分に大きなκを固定し、当面必要な実宇宙の事実を、H_κに反射しておく。そして、その小宇宙 H_κ の可算初等部分構造 N を1つ固定する。そして、この N をふんだんに活用する。

例 (サイドコンディション方法) これは、前もって、状況を整えておき、当該のforcingを行うものとして、捉えたい。この前もっての整った状況をつくることと、当該の本筋のforcingとを同時に行い、強制法の良いコントロールを持とう、という方法である。Todorcevicがはじめたものであるが、より、最近ではAspero-MotaやNeemanの研究がこの範疇に入り、続々と、バリエーションが生まれている。

初等部分構造の同型や拡張の方法を取り上げ、話をすすめる。

同型と拡張 まず、N を H_κ の可算初等部分構造とする。

$$N^{(1)} = \{f(N \cap \omega_1) \mid f \in N\}$$

とおくと、$N^{(1)}$ は H_κ の可算初等部分構造であり、$N \cup \{N \cap \omega_1\} \subset N^{(1)}$ である。特に、$N \cap \omega_1 < N^{(1)} \cap \omega_1$ であり、縦に、伸びている。もちろん、$N^{(1)}$ は、このような性質を持つもので$\subseteq$に関して最小である。今、2つの可算初等部分構造 N と M があり、同型であったとする。$N^{(1)}$ と $M^{(1)}$ は同型になるであろうか。Woodin により、次が知られているが、$2^{\omega_1} = 2^\omega$ であれば、特に、CH (連続体仮説) の否定が成立する。

次は同値

(1) ある集合pが存在し、$p \in H_\kappa$なるすべての正則基数κに対し、拡張された構造$(H_\kappa, \in, p)$の任意の2つの可算初等部分構造$(N, \in, p)$と$(M, \in, p)$をとるとき、もし$\phi : (N, \in, p) \longrightarrow (M, \in, p)$が同型写像であるならば、$\phi$は必ず拡張できて、同型写像 $\phi^{(1)} : (N^{(1)}, \in, N, p) \longrightarrow (M^{(1)}, \in, M, p)$ が構成される。

(2) $2^{\omega_1} = 2^{\omega}$

次に、$P \in H_\kappa$ を forcing poset とし、グラウンドモデル V の拡張 $V[G]$ をつくる。ただし、G は (P, V)-generic である。V において、H_κ の可算初等部分構造 N をとり、$V[G]$ にて、

$$N[G] = \{\tau_G \mid \tau \in N \cap V^P\}$$

とする。ただし、V^P は V における P-name の全体であり、τ_G は P-name τ の G による解釈である。このとき、$N[G] \in V[G]$ は $H_\kappa^{V[G]}$ の可算初等部分構造であり、$N \cup \{G\} \subseteq N[G]$ である。ただし、$H_\kappa^{V[G]}$ は $V[G]$ における H_κ である。もちろん、$N[G]$ は、このような性質を持つもので $\subseteq$ に関して最小である。特に、$N \cap \omega_1^V \subseteq N[G] \cap \omega_1^V$ であるが、等号が成立する状況の方が、コントロールが利く。ただし、ω_1^V は V における ω_1 である。

今、2つの可算初等部分構造 $N \in V$ と $M \in V$ があり、V で同型であったとする。$N[G]$ と $M[G]$ は $V[G]$ にて同型になるであろうか。Aspero-Mota により、次が知られている。特に、V と $V[G]$ の間で、ω_1 と ω_2 を保存する P が新しい実数を V に付け加えるとしても、CH が $V[G]$ で成立する。

正則基数 $\kappa \geq \omega_3$ がある。$P \in H_\kappa$ を forcing poset とする。任意の実数の P-name の列 $\langle \dot{r}_i \mid i < \omega_2 \rangle$、拡張された構造 $(H_\kappa, \in, \langle \dot{r}_i \mid i < \omega_2 \rangle)$ の任意の2つの可算初等部分構造 N と M について、もし $(N, \in, \langle \dot{r}_i \mid i < \omega_2 \rangle)$ と $(M, \in, \langle \dot{r}_i \mid i < \omega_2 \rangle)$ が写像 ϕ で同型であれば、ある拡張 $V[G]$ にて、$(N[G], \in, N, G, \langle (\dot{r}_i)_G \mid i < \omega_2^V \rangle)$ と $(M[G], \in, M, G, \langle (\dot{r}_i)_G \mid i < \omega_2^V \rangle)$ は ϕ を拡張した写像 ϕ^* で同型であるとする。このとき、その拡張 $V[G]$ で、実数の列 $\langle (\dot{r}_i)_G \mid i < \omega_2^V \rangle$ は、決して、単射とならない。

これは、初めに N と M を同型にとる。ただし、ある $i < \omega_2$ において、$\phi(i) \neq i$ とする。すると、

$$(\dot{r}_i)_G = \phi^*((\dot{r}_i)_G) = (\dot{r}_{\phi(i)})_G$$

である。

最後に、可算初等部分構造を使った forcing の議論の例と複数のサイズの初等部分構造を同時に使う構成の可能性についてふれる。

アマルガメイションと今後 (ω_1 における fast function) V を拡張し、次のような写像 $\dot{f}$ を finite conditions で V に付け加える。

$$\dot{f} : \dot{C} \longrightarrow \omega_1^V = \omega_1^{V[G]},$$

$$\forall i, j \in \dot{C},\ (\text{if } i < j,\ \text{then } i \leq \dot{f}(i) < j).$$

ただし、$\dot{C}$ は ω_1^V の部分集合であり、閉であり、共終的である。$\dot{C}$ は、finite conditions によって force されているから、V の同類のものとは似ても似つかない代物である。各 $p \in P$ は $\dot{f}$ の有限情報からなるように forcing poset P をデザインする。特に、p は ω_1^V から ω_1^V への有限部分写像であり、dom(p) は $\dot{C}$ の有限部分を確定的に約束する。今、$p, P \in N$ なる H_κ の可算初等部分構造 N をとるとき、$p \in N$ よりも $\dot{f}$ の情報を多く与える

$$q = p \cup \{(N \cap \omega_1^V, N \cap \omega_1^V)\}$$

を考える。$q \in P$ であるが、q は

$$\dot{f}(N \cap \omega_1^V) = N \cap \omega_1^V$$

を保証しており、q は N の内と外の状況を アマルガメイトすることを可能としている。よって、q は $V[G]$ における次の事実を保証する。

$$N[G] \cap \omega_1^V = N \cap \omega_1^V$$

よって、次も論破できる。

$$\omega_1^V = \omega_1^{V[G]}$$

いささか、早足ではあるが、

$$\dot{f} = \bigcup G,$$

$$\dot{C} = \bigcup \{\mathrm{dom}(p) \mid p \in G\}$$

は、当初の目的を果たす。ただし、G は (P, V)-generic である。

今、M は H_κ の初等部分構造であって、サイズがちょうど ω_1 であるとする。また、$\overline{M}$ を M のモストウスキー縮小とし、$\overline{M} \in N$ であり、N は H_{ω_2} の可算初等部分構造であるとする。つまり、小さい N は大きい M の同型タイプを知っているという状況である。では、何が可能であろうか、同型、拡張、そしてギャップ2のモラスである。さらに、初等部分構造の

族を3種類に増やすことも考えられる。

おわりに 本稿では、集合論の推移的集合モデル $(H_\kappa, \in)$、その初等部分構造、それら初等部分構造の拡張、同型といったことがらについて述べた。繰り返しのあるとき、飛躍が起こる。これは、ある著名な集合論の研究者が、ある著名な映画監督のことばからインスピレーションをえて、体験にもとづき、発信されたものである。

参考文献

[M] T. Miyamoto, Matrices of isomorphic models and morass-like structures, A note, 2014.

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ kyodo/kokyuroku/contents/1895.html

[S] S. Shelah, *Proper and Improper Forcing*, Springer, 1998.

miyamoto@nanzan-u.ac.jp
Mathematics
Nanzan University
18 Yamazato-cho, Showa-ku, Nagoya
466-8673 Japan
南山大学　数学　宮元忠敏