数理解析研究所講究録
第2050巻 2017年 168-181

Genericな集合のチューリング次数について

放送大学教養学部　隈部正博
Masahiro Kumabe
The Open University of Japan

1 はじめに

自然数論における Generic な集合のチューリングの意味での決定不能次数（以下単に次数という）について考える．自然数の部分集合 $A\subseteq\omega$ が n-generic とは，Σ_{n}^{0} 論理式において Cohen-generic であるときをいう．次数 $\boldsymbol{a}$ が n-generic であるとは，n-generic な集合となる代表元があるときをいう．次数 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ において，$\boldsymbol{a}\leq\boldsymbol{b}$ とは，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の要素 A,B が $A\leq_{T}B$ を満たすときをいう．ここで，$A\leq_{T}B$ は A が B-recursive であることを意味する．$D(\leq\boldsymbol{a})$ は $\boldsymbol{b}\leq\boldsymbol{a}$ となる $\boldsymbol{b}$ の集合とする．以下主として $\boldsymbol{a}$ が n-generic なときに $D(\leq\boldsymbol{a})$ の構造について考える．

本論文における記号の用い方は標準的である．集合 A,B において，$A\bigoplus B=\{2n\mid n\in A\}\bigcup\{2n+1\mid n\in B\}$ とする．$0,1$ の有限列を string という．ω 以外の小文字のギリシャ文字は string を表すのに使う．全ての string を帰納的（computable）に一列に並べこれを固定する．

String σ と ν において，$\sigma\geq\nu$ は，σ が ν の拡張 (extension) になっていることを示し，このとき ν は σ の substring という．さらに σ と ν は両立する（comparable, compatible）とは，一方が他方を拡張しているときをいう．もし σ と ν が両立しないときは，$\sigma\mid\nu$ で表す．集合 $A\subseteq\omega$ はその特性関数と同一視することにする．したがって $\sigma\leq A$ は A の特性関数が string σ を拡張していることを示し，σ は A の始切片という．$\sigma*\nu$ は σ の後に ν をつなげた string を表す．自然数 $0,1$ は対応する長さ 1 の string $0,1$ と同一視する．$i=0,1$ に対し $[i]=1-i$ と定義する．$\emptyset$ は空列を表す．自然数 n に対し，$i^{(n)}$ は長さ n の string σ で，各 $m<n$ において $\sigma(m)=i$ となるものを表す．String σ の長さを $|\sigma|$ で表す．String σ と ν において，$\sigma\cap\nu$ は，σ の substring λ で，全ての $m<|\lambda|$ において $\sigma(m)=\nu(m)$ となり，さらに $\sigma(|\lambda|)\neq\nu(|\lambda|)$ となるか，2つのうち少なくとも一つの値が定義されないときをいう．$n<|\sigma|$ となるとき，$\sigma[n]$ を，長さ n の σ の substring を表す．全ての（チューリングの意味での）還元オペレーター（reduction operator, Turing functional）を一列にならべ固定し，Φ_{n} を n 番目の還元オペレーターとする．$\Phi_{n}(\sigma)(x)=y$ は次のことを意味する．オラクル σ 付きの n 番目の還元オペレーターに $x<|\sigma|$ をインプットしたとき，$|\sigma|$ ステップ以内に計算が終了し，計算結果 y を出力し，さらに全ての $u<x$ において $\Phi_{n}(\sigma)(u)$ は定義されるものとする．従って，B が A に還元可能（recursive in A, A-recursive）とは，ある e が存在して，$\Phi_{e}(A)=B$ となるときをいう．

2 Generic な集合

$\mathcal{L}$ を一階の自然数論の言語で, さらに (各自然数 n に対応する) 定数記号 $\tilde{n}$, 集合を表す定数記号 X, そして要素を表す述語記号 $\in$ を含むものとする. ψ を $\mathcal{L}$ における文 (sentence) とし, A を ω の部分集合とする. このとき, $A \models \psi$ は, 自然数論の標準モデルで, X を A で解釈することによって, ψ が成り立つことと定義する.

String σ に対して, "σ が ψ を強制する ($\sigma \Vdash \psi$ と書く) とは, 文の長さによる帰納法により以下のように定義される.

If ψ が原始的な文 (atomic sentennce) で X を含まないときは, $\sigma \Vdash \psi$ とは, ψ が自然数の標準モデルで成り立つときをいう.

If ψ が $\tilde{n} \in X$ の形のときは, $\sigma \Vdash \psi$ とは, $\sigma(n) = 1$ となるときをいう.

If ψ が $\neg\phi$ のときは, $\sigma \Vdash \psi$ とは, σ のどんな拡張 ν においても, $\nu \not\Vdash \psi$ となるときをいう.

If ψ が $\phi_0 \vee \phi_1$ のかたちのときは, $\sigma \Vdash \psi$ とは, $\sigma \Vdash \phi_0$ か $\sigma \Vdash \phi_1$ が成り立つときをいう.

If ψ が $\exists x\phi$ のときは, $\sigma \Vdash \psi$ とは, ある n が存在して $\sigma \Vdash \phi(\tilde{n})$ となるときをいう.

そして $A \Vdash \psi$ とは, $\sigma < A$ が存在して $\sigma \Vdash \psi$ となるときと定義する. このとき次のように generic な集合を定義する.

定義 2.1 集合 A が generic とは, 任意の $\mathcal{L}$ の文 ψ において, $A \Vdash \psi$ か $A \Vdash \neg\psi$ のどちらかが成り立つときをいう.

Jockusch [11] は generic な集合の特徴づけを以下のように行った.

補題 2.1 Jockusch [11]. 集合 A において以下は同値である.

i. A は generic
ii. どんな算術的な string の集合 S においても, ある $\sigma < A$ が存在して, $\sigma \in S$ か, あるいは, どんな σ の拡張も S の要素とならない
iii. どんな comeager な算術的な $P(\omega)$ の部分集合 $\mathcal{A}$ においても, $A \in \mathcal{A}$.

証明. $(ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii)$ の順に証明する. $(ii) \Rightarrow (i)$. 言語 $\mathcal{L}$ の文 ϕ において, $S = \{\sigma \mid \sigma \Vdash \phi\}$ とする. すると S は算術的. 従ってある $\sigma < A$ が存在して, $\sigma \in S$ か, あるいは, どんな σ の拡張も S の要素とならない. もし $\sigma \in S$ ならば $\sigma \Vdash \phi$. もし σ のどんな拡張も S の要素とならないならば, $\sigma \Vdash \neg\phi$.

次に $(i) \Rightarrow (iii)$. 算術的な論理式 ϕ とそれによって定義される comeager な $\mathcal{A} \subseteq P(\omega)$ が与えられたとする. すべての generic な集合の集まりは $P(\omega)$ において comeager である. 2つの comeager な $P(\omega)$ の部分集合の共通部分は再び comeager となるから, どんな σ もその拡張で generic な集合 $A \in \mathcal{A}$ が存在する. このとき, $A \models \phi$ iff $A \Vdash \phi$ が成り立つ. よって $\sigma \Vdash \neg\phi$ となる σ は存在しない. したがって全ての generic な集合 A は ϕ を強制し, よって、再び $A \models \phi$ iff$A \Vdash \phi$ より、$A \in \mathcal{A}$.

次に $(iii) \Rightarrow (ii)$ を証明する. S を算術的な string の集合とする. $\mathcal{A}$ を, 次を満たすような A の集合とする: ある $\sigma < A$ が存在して, $\sigma \in S$ か, あるいは, どんな σ の拡張も S の要素とならない. すると $\mathcal{A}$ は算術的な $P(\omega)$ の部分集合で comeager となる. S に (iii) を適用することで, (ii) が成り立つ.

集合 A において, A' (the completion of A) は, $\{e \mid \Phi_e(A)(e)\downarrow\}$ と定義される. この completion オペレー

タを繰り返し適用することで, $A^{(0)} = A$ そして $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$ と定義する. この completion オペレータはチューリング次数に関し不変であるため, ジャンプオペレータが定義できる. 従って, 集合 A の次数を a としたとき, $a^{(n)}$ は $A^{(n)}$ の次数を示す. 特に空集合 $\emptyset$ の次数 0 から始め, ジャンプオペレータを用い, 次数の上昇列 $\{0^{(n)} \mid n \in w\}$ を生成することができる. ポストの定理は, B が Δ^A_{n+1} iff B が $A^{(n)}$ にチューリング還元可能である. 算術的な次数とは, ある n が存在して $0^{(n)}$ より小さい次数となるものである. レベル ω において, $\emptyset^{(\omega)} = \{\langle n, e\rangle \mid e \in \emptyset^{(n)}\}$ と定義し, この次数を $0^{(\omega)}$ とする.

次に ω 上の関数の集合 $S \subseteq \omega^\omega$ が与えられたとする. a は S の上界であるとは, S の要素の次数はすべて $\leq a$ のときとする. a は S の極小上界であるとは, 上記に加え, $< a$ なる次数は S の上界になりえないときとする. また a は S の一様上界であるとは, ある関数 f が存在し, その次数は $\leq a$ で, さらに, $S = \{f^{[i]} \mid i \in \omega\}$ となるときと定義する, ここで $f^{[i]}$ は $f^{[i]}(x) = f(\langle i, x\rangle)$ によって定義する. AR を算術的な関数の集合とする.

定義に立ち戻って構成すれば, $0^{(\omega)}$ 以下の generic な次数が存在する. ここで算術的な次数の上界について考える. a は AR の一様上界であることと, 全ての算術的な関数を dominate する関数 f でその次数が $\leq a$ なるものが存在すること, は同値である (Jockusch). Kumabe [20] は, 全ての算術的な関数を dominate する関数 f は, generic な集合を計算できることを示した. 従って, a は AR の一様上界ならば, a は generic な次数をその下にもつ.

補題 2.2 i. $0^{(\omega)}$ 以下の generic な次数が存在する.

ii. Kumabe [20]. a は AR の一様上界ならば, a は generic な次数をその下にもつ.

一方, Kumabe [20] は増加関数の集合 $\{g_n\}_{n\in\omega}$ に対し, AR の極小上界 $a \leq deg((\oplus_n g_n) \oplus \emptyset^{(\omega)})$ で以下の性質を持つものが存在することを示した : (i) a は generic な次数をその下にもたない, また (ii) ある f が存在し, その次数は $\leq a$ でさらに, f は g_n のどの関数によっても dominate されない.

もし A についての算術的な性質で, A の要素の有限個の変化で変わらないものを考えると, 全ての generic な集合は, その性質を満たすか, あるいは全ての generic な集合は, その性質の否定を満たす. しかし A のもつ genericity 全てを仮定する必要はない. そこで制限された弱い genericity を考える.

定義 2.2 集合 A が n-generic とは, $\mathcal{L}$ の全ての Σ^0_n な文 ψ に対し, $A \Vdash \psi$ あるいは $A \Vdash \neg\psi$ が成り立つときをいう.

Jockusch [11] による n-genericity の特徴づけが次である.

補題 2.3 Jockusch [11]. 次は同値である.

i. A が n-generic.
ii. どんな Σ^0_n な string の集合 S に対しても, ある $\sigma < A$ が存在して, $\sigma \in S$ かあるいは, どんな σ の拡張も S の要素とならない.

証明. 最初に (ii) を仮定し (i) を示す. Σ^0_n な文 ψ に対し, $S = \{\sigma \mid \sigma \Vdash \psi\}$ とする. すると S は Σ^0_n な string の集合となる. 従ってある $\sigma < A$ が存在して, $\sigma \in S$ かあるいは, どんな σ の拡張も S の要素とならない. もし $\sigma \in S$ ならば $A \Vdash \psi$. もしどんな σ の拡張も S の要素とならないならば, $A \Vdash \neg\psi$.

次に (i) を仮定し (ii) を証明する. Σ^0_n な string の集合 S に対し, ψ を, $\psi(X)$ iff $\exists\sigma(\sigma \in S \;\&\; \sigma < X)$ とな

るようなものとする．すると ψ は Σ^0_n. 従って $A\|\!\vdash \psi$ かあるいは $A\|\!\vdash \neg\psi$. そしてある $\sigma < A$ が存在し, $\sigma\|\!\vdash \psi$ かるいは $\sigma\|\!\vdash \neg\psi$. もし $\sigma\|\!\vdash \psi$ ならば $\sigma \in S$. もし $\sigma\|\!\vdash \neg\psi$ ならば, どんな σ の拡張も S の要素とならない.

$n \geq 1$ とし, GL_n を, 次数 a で $a^{(n)} = (a \cup 0')^{(n-1)}$ となるものの集合とする．また GH_n を, 次数 a で $a^{(n)} = (a \cup 0')^{(n)}$ となるものの集合とする．明らかに全ての n で, $GL_n \subseteq GL_{n+1}$, $GH_n \subseteq GH_{n+1}$, そして全ての i, j で $GL_i \cap GH_j = \emptyset$. 相対化すると $n \geq 1$ において, $GL_n(a)$ を, 次数 $b \geq a$ で $b^{(n)} = (b \cup a')^{(n-1)}$ となるものの集合とする．また $GH_n(a)$ を, 次数 $b \geq a$ で $b^{(n)} = (b \cup a')^{(n)}$ となるものの集合とする．Sacks [30] は全ての n において, $GL_{n+1} - GL_n \neq \emptyset$ また $GH_{n+1} - GH_n \neq \emptyset$ を示した.

補題 2.4　i. $n \geq 1$ において, $0^{(n)}$ 以下で n-generic な次数が存在する.

ii. A が n-generic ならば, $A^{(n)} \equiv_T A \oplus \emptyset^{(n)}$, 従って A の次数は GL_n となる.

証明. (i) string の増加列 σ_n を定義していく．最初に $\sigma_0 = \emptyset$ とする．全ての Σ^0_n 文を帰納的に一列に並べ, ψ_s を s 番目の Σ^0_n 文とする．与えられた σ_s において, もし $\sigma_s\|\!\vdash \neg\psi_s$ ならば $\sigma_{s+1} = \sigma_s * 0$ とせよ．そうでなければ σ_{s+1} を σ_s の拡張で $\sigma_{s+1}\|\!\vdash \psi_s$ を満たすものとする．そして $A = \cup_s \sigma_s$ とする．もし ψ が Σ^0_s 文ならば, 関係 $\sigma\|\!\vdash \psi$ もまた Σ^0_n となる．従って A は $\emptyset^{(n)}$-帰納的となる.

(ii) 関係 $x \in A^{(n)}$ は A 上相対化して $\Sigma^0_n(A)$. 従って $\psi(x, A)$ を Σ^0_n 論理式で, $x \in A^{(n)}$ を定義するものとする．$A \models \psi$ iff $A\|\!\vdash \psi$ だから,

$$k \in A^{(n)} \text{ iff } \exists\sigma(\sigma < A \ \&\ \sigma\|\!\vdash \psi(\tilde{k}, X)).$$

よって $A^{(n)}$ が $A \oplus \emptyset^{(n)}$-帰納的可算．同様に,

$$k \notin A^{(n)} \text{ iff } \exists\sigma(\sigma < A \ \&\ \sigma\|\!\vdash \neg\psi(\tilde{k}, X)).$$

よって $A^{(n)}$ の補集合も $A \oplus \emptyset^{(n)}$-帰納的可算．従って $A^{(n)}$ は $A \oplus \emptyset^{(n)}$-帰納的である．　$A^{(n)} \geq_T A \oplus \emptyset^{(n)}$ はつねに成り立つから, $A^{(n)} \equiv_T A \oplus \emptyset^{(n)}$ となる.

次の定理は Friedberg の Completeness Criterion の一般化である.

定理 2.1　i. Friedberg [5] and Selman [32]. 各 n において, もし $a \geq 0^{(n)}$ ならば, ある n-generic な b が存在して $b^{(n)} = b \cup 0^{(n)} = a$ となる.

ii. Macintyre [26]. もし $a \geq 0^{(\omega)}$ ならば, ある generic な b が存在して $b^{(\omega)} = b \cup 0^{(\omega)} = a$ となる.

証明. (i) A を $a \geq 0^{(n)}$ なる a の要素とする．S_k を k 番目の Σ^0_n な string の集合とする．これから string の拡大列 σ_k を一様に A-帰納的に定義する．そして $B = \cup_k \sigma_k$ が求める b に属する集合であることを示す.

最初に $\sigma_0 = \emptyset$ とする．与えられた σ_k において, σ'_{k+1} を σ_k の拡張で, σ'_{k+1} が S_{k+1} の要素かあるいは, σ'_{k+1} のどんな拡張も S_{k+1} の要素とならない, そういうものとする．そして $\sigma_{k+1} = \sigma'_{k+1} * A(k+1)$ で $B = \cup_k \sigma_k$ とする．　B は n-generic で $A \geq_T \emptyset^{(n)}$ であるから, $B^{(n)} \leq_T B \oplus \emptyset^{(n)} \leq_T A$ となる．$B \oplus \emptyset^{(n)} \geq_T A$ については, $A(k+1)$ を計算するには, まず帰納法の仮定で σ_n は $B \oplus \emptyset^{(n)}$ を使って計算できているとする．$\emptyset^{(n)}$ をオラクルに用い, $\sigma'_{k+1} \geq \sigma_k$ なるもので, σ'_{k+1} が S_{k+1} の要素となるか, あるいは σ'_{k+1} のどんな拡張も S_{k+1} の要素とならない, そのような σ'_{k+1} を探す．すると上記構成によって $A(k+1) = \sigma_{k+1}(|\sigma'_{k+1}|)$ となる．従って帰納法により $B \oplus \emptyset^{(n)} \geq_T A$ となる.

(ii) は (i) と同様である.

次の命題と定理は 1-generic な次数を計算できる（その下にもつ）次数に関するものである.

命題 2.1 0 でない帰納的可算な次数は, 1-generic な次数を計算できる.

証明. R. Shore による証明を述べる. E を帰納的でない帰納的可算な集合とする. E の要素の帰納的な列挙（recursive enumeration）を $E^s(s \in \omega)$ とする. $f(s)$ の値を, $E^t(s) = E(s)$ となる最小の t とする. このとき $f \equiv_T E$ となる. Σ_1^0 な string の集合を帰納的に一列に並べる方法を固定し, S_n を n 番目の Σ_1^0 な string の集合とする. そして S_n^t をステージ t までに S_n に並べられた要素の有限集合とする.

これより 1-generic な集合 A を string の増加列 $\{\sigma_s\}_{s\in\omega}$ の和として定義する. まず $\sigma_0 = \emptyset$ とする. 与えられた σ_s において, e_{s+1} を (もし存在すれば) 次を満たす最小の $n \leq s$ とする：σ_s は $S_n^{f(s+1)}$ のどの要素の拡張となっていない, さらに $S_n^{f(s+1)}$ は σ_s を拡張する string σ を要素にもつ. もし e_{s+1} が定義されないなら, $\sigma_{s+1} = \sigma_s * 0$ とする. もし e_{s+1} が定義されれば, $\sigma_{s+1} = \sigma * 0$ とする. そして $A = \cup_s \sigma_s$ とする. 明らかに A は E-帰納的である. 以降 A が 1-generic であることを証明する.

背理法により A は 1-generic でないと仮定しよう. そして k を次を満たす最小の数とする：全ての A の切片は S_k の要素とならない, しかし全ての A の切片に対してその拡張で S_k の要素となるものが存在する. $k_0 \geq k$ を次を満たす最小の数とする：各 $k' < k$ において, $\sigma_{k_0} \in S_{k'}$ かあるいは σ_{k_0} のどんな拡張も $S_{k'}$ の要素とならない. このとき全ての $s > k_0$ で, $e_s \not\leq k$ である. これより帰納的に σ_s と $f(s)$ を $s > k_0$ に関する帰納法で構成する. そうすれば f は帰納的となり矛盾を導く. $s > k_0$ に対し, σ_s と $f(s)$ を計算したとする. この後, 次を満たす t を探す：S_k^t の要素で σ_s を拡張するものが存在する. $e_{s+1} \not\leq k$ なので, $f(s+1) < t$ である. 従って $f(s+1)$ は次を満たす最小の $t' < t$ として定義される： $E^{t'}$ の $s+1$ までの制限が E^t の $s+1$ までの制限に等しい. すると $f(s+1)$ を使って, e_{s+1} と σ_{s+1} を上記のように計算できる. 従って帰納法により $\{\sigma_s\}_s$ と f は帰納的である. これは矛盾となる.

Jockusch [10] は次のことを示した：GH_1 に属する全ての次数は, その下に 1-generic な次数を持ち, また極小次数も持つ. この前半の結果はさらに, Jockusch and Posner [12] によって次のように改良されている；GL_2 に含まれない全ての次数は, その下に 1-generic な次数を持つ. これを示すためには, 次の補題が必要となる.

補題 2.5 Martin [26]. $a \leq b$ とする. このとき次が成り立つ：$b' \geq a^{(2)}$ iff ある関数が存在し, その次数は $\leq b$ でさらに a に含まれる全ての関数を dominate する.

$a \in GL_2$ iff $(a \cup 0')' = a^{(2)}$ であるから, 次の系が成り立つ.

系 2.1 $a \notin GL_2$ iff　$a \cup 0' \geq$ なる次数に含まれる関数で, 次数 $\leq a$ の全ての関数を dominate する, そのようなものは存在しない.

定理 2.2 Jockusch and Posner [12]. GL_2 に含まれない任意の次数は, その下に 1-generic な次数を持つ.

証明. a を GL_2 に含まれない次数とする. 最初に, $f_0(\sigma, e)$ を, もしあれば, 次を満たす最小の数 k, とする：ある $\nu \geq \sigma$ でその長さが $\leq k$ 存在して, $\nu \in S_e^k$ となる. このとき f_0 は部分帰納的関数となる. f を次で定義する：

$$f(n) = \max(\{0\} \bigcup \{f_0(\sigma, e) \mid e \leq n \ \& \ |\sigma| \leq n \ \& \ f_0(\sigma, e) \downarrow\}).$$

このとき f の次数は $\leq 0'$ となる. $a \notin GL_2$ であるから, 系 2.1 により, 次数 $\leq a$ のある関数 g で, f によって dominate されない, そのようなものが存在する. これより 1-generic な集合 B を g-帰納的に, 長さ n の staring の増大列 β_n の和として構成する. 最初に $\beta_0 = \emptyset$ とする. 帰納法によりステージ n において β_n を定義したとする. ステージ $n+1$ では, e_{n+1} を, 次を満たす (もしあれば) 最小の e とする:

1. e は, ステージ n の終わりまでには, 満足されていない,
2. 長さ $\leq g(n+1)$ のある $\nu_{n+1} > \beta_n$ が存在して, $\nu_{n+1} \in S_e^{g(n+1)}$ となる.

もし e_{n+1} が定義されれば, β_{n+1} を長さ $n+1$ となる ν_{n+1} の部分 string とする. もし $\beta_{n+1} = \nu_{n+1}$ ならば, e_{n+1} はステージ $n+1$ で満足されたという. もし e_{n+1} が定義されないときは, $\beta_{n+1} = \beta_n * 0$ とする. 最後に $B = \bigcup_n \beta_n$. とし, 構成が終わる.

B が 1-generic となることを証明するために, 各々の e に対し $s(e)$ で次を満たすものが存在することを証明する : e はあるステージ $\leq s(e)$ において満足される (従って $\beta_{s(e)}$ は S_e の要素となる string を拡張する), かあるいは, どんな $\beta_{s(e)}$ の拡張も S_e の要素とならない (従って e はどんなステージ $> s(e)$ においても満足されない). 帰納法により各 $e' < e$ において, $s(e')$ が存在するとせよ. まず $s_0 = \max\{s(e') \mid e' < e\}$ とする. s_1 を $> s_0$ なる最小の数で $g(s_1) \geq f(s_1)$ なるものとする. もし e がステージ $s_1 - 1$ の終わりまでに満足されるか (従って β_{s_1-1} は S_e のある要素を拡張する), あるいはもし β_{s_1} のどんな拡張も S_e の要素とならないならば, そのときは $s(e) = s_1 - 1$ とする. もし e がステージ $s_1 - 1$ の終わりまでに満足されないで, またもし β_{s_1-1} の拡張で S_e の要素となるものが存在すれば, そのときは $g(s_1) \geq f(s_1)$ だから, ある長さ $\leq g(s_1)$ の $\nu_{s_1} > \beta_{s_1-1}$ が存在して, $\nu_{s_1} \in S_e^{g(s_1)}$ となる. よって e は上記 (1) and (2) をステージ s_1 で満足する. ここで $s_1 > s_0$ だから, どんな数 $< e$ も (1) and (2) はステージ $\geq s_1$ では満足されない. よって e_{s_1} は定義され e に等しい. すると, $s_1 \leq t \leq |\nu_{s_1}|$ なる各 t において, $e_t = e$ で β_t は長さ t の $\nu_{s_1} = \nu_t$ の部分 string となる. 従ってステージ $|\nu_{s_1}|$ において, $\beta_{|\nu_{s_1}|} = \nu_{s_1}$ となり, よって e は満足される. $s(e) = |\nu_{s_1}|$ とせよ. よって次が証明された : 各 e に対し, ある $s(e)$ が存在し次を満たす : e はあるステージ $\leq s(e)$ において満足されるか, あるいはどんな $\beta_{s(e)}$ の拡張も S_e の要素とならない. 従って B は 1-generic となる.

3 Generic な次数の構造

以下 generic な次数の構造について考える. 次の命題は, $D(\leq a)$ の理論は generic な a の選び方に依存しないことを示している.

命題 3.1 a と b が generic ならば, $D(\leq a)$ と $D(\leq b)$ は初等同値である.

証明. ψ を半順序の言語における文とする. このとき $\mathcal{L}$ の文 ϕ が存在して, ψ が $D(\leq a)$ において真である iff $A \models \phi$, が成り立つ. Generic な次数 a が与えられたとし, A を次数 a の generic な集合とする. このときある string σ が存在して, $\sigma \Vdash \phi$ が $\sigma \Vdash \neg\phi$ が成り立つ. もし $\sigma \Vdash \phi$ が成り立つならば, A^* を次のように定義する : σ は A^* の始切片で, 全ての $n \geq |\sigma|$ において, $A^*(n) = A(n)$. すると A^* は generic で, A と同じ次数となる. もし $\sigma \Vdash \phi$ ならば $A^* \Vdash \phi$, 従って $A^* \models \phi$. よって ψ は $D(\leq a)$ において真となる. もし $\sigma \Vdash \neg\phi$ ならば, $A^* \Vdash \neg\phi$, 従って $A^* \models \neg\phi$ となる. よって $\neg\psi$ が $D(\leq a)$ において真となる. a は任意の generic な次数であったから, 任意の generic な a において, ψ が $D(\leq a)$ において真となるか, あるいは任意の generic な a において, ψ は $D(\leq a)$ において偽となる.

a と b が generic なとき, $D(\leq a)$ と $D(\leq b)$ が同型になるかどうかは知られていない.

定義 3.1 集合の集まり $\{A_i\}_{i\in I}$ が独立であるとは, 任意の有限部分集合 $F\subseteq I$ と任意の $i\in I-F$ において, $A_i \not\leq_T \oplus\{A_j \mid j\in F\}$ となるときをいう.

与えられた A において, $A_i=\{k \mid \langle i,k\rangle\in A\}$ とする. もし A が 1-generic ならば, $\{A_i\}_{i\in\omega}$ は独立となる.

定理 3.1 Jockusch [11]. 1-generic な次数 a において, $D(\leq a)$ は束ではない.

証明. A を次数 a の 1-generic な集合とする.

$$F_i(A)=\{j \mid \langle 3i+1,j\rangle\in A \ \&\ (\forall k\leq j)[\langle 3i+2,k\rangle\in A]\}.$$

とすると, A は 1-generic なので, A は無限の帰納的可算な部分集合をもたない. 従って各 i において, F_i は有限である. $B=\Gamma(A)$, $C=\Theta(A)$ を

$$(\Gamma(A))_i=(A)_{3i},$$
$$(\Theta(A))_i=(A)_{3i}\triangle F_i(A),$$

で定義する, ここで $X\triangle Y$ は X と Y の対称差を表す. string σ において, $\Gamma(\sigma)$, また $\Theta(\sigma)$ を上記同様の形で定義する. 我々は以下のことを証明する：もし $\Phi_b(B)$ と $\Phi_c(C)$ が全関数で等しいならば, それは $(A)_{3i}$ という形の有限個の和をオラクルに使うことで, 計算できる. まず各 i において, $(A)_{3i}$ は B-帰納的であり, また C-帰納的でもあることに注意する. 各 $\{(A)_{3i}\}_{i\in\omega}$ は独立であるから, B と C の次数は下限をもたない.

さて $\Phi_b(B)$ と $\Phi_c(C)$ は全関数で等しいとしよう. S を次を満たす string σ の集合とする：$\Phi_b(\Gamma(\sigma))$ と $\Phi_c(\Theta(\sigma))$ は両立しない. すると S は帰納的である. $\Phi_b(\Gamma(A))$ と $\Phi_c(\Theta(A))$ は全関数で等しいので, A が 1-generic であることから, ある $\sigma<A$ が存在して, σ のどんな拡張も S の要素とならない. ここで $\Phi_b(\Gamma(A))$ は $\{(A)_{3i}\}_{i\leq|\sigma|}$-帰納的となることを示す. k が与えられたとき, $\Phi_b(\Gamma(A))$ を計算するためには, まず次を満たす $\nu\geq\sigma$ を探す：

1. $\Phi_b(\Gamma(\nu))(k)$ は定義され, そして
2. ν は, A の特性関数の $\{\langle 3i,j\rangle \mid i\leq|\sigma| \ \&\ j\in\omega\}$ への制限と両立する.

すると $\Phi_b(\Gamma(\nu))(k)=\Phi_b(\Gamma(A))(k)$ となる. (もしそうでなければ, A の始切片 $\mu\geq\sigma$ で, $\Phi_c(\Theta(\mu))(k)\neq\Phi_b(\Gamma(\nu))(k)$ となるものが存在する. $\Gamma(A)$ と $\Theta(A)$ の定義そして, 上記 (2) より, 明らかに, ある $\delta\geq\sigma$ が存在して , $\Gamma(\delta)=\Gamma(\nu)$ また $\Theta(\delta)=\Theta(\mu)$ となる. よって $\Phi_b(\Gamma(\delta))$ と $\Phi_c(\Theta(\delta))$ は両立せず, 従って矛盾となる.)

極小次数の構成において, 与えられた σ において, σ を ν に拡張し, しかも ν が与えられた木の (splitting かあるいは nonsplitting となるような) 部分木上にあるようにする. しかし generic な集合の構成では, 与えられた σ において, σ を ν に拡張し, 与えられた帰納的可算な稠密 (dense) な string の集合の要素となるようにする. これらの構成は異なる方向性を持っている. そこで我々は, 与えられた generic (あるいは n-generic) な次数 a において, a はその下に極小次数をもつか, このことを知りたい. 次の Jockusch [11] の結果は, Martin の結果に基づくもので, generic な次数の分布に関するある種の等質性を表している.

定理 3.2 Jockusch [11]. 各 $n\geq 2$, 各 n-generic な次数 a, そして任意の $b\leq a$ において, n-generic な次数

$c \le b$ が存在する.

$D(\le a)$ の鎖とは, $\le a$ なる次数の集合 C で, どんな 2 つの C のどんな 2 つの要素も比較可能であるものをいう. $D(\le a)$ の極大鎖 C とは, C を含む $D(\le a)$ の鎖が存在しないときをいう. 上記定理より, $D(\le a)$ の全ての極大鎖は無限である. どんな 1-generic な次数も極小とはならないので, どんな 2-generic な次数も, その下に極小次数をもたない. $0'$ より下の 1-generic な次数に関しては, Chong and Jockusch [2] は定理 3.2 と同じ結果を示した. しかし Chong and Downey [1] と Kumabe [16] は独立に異なる方法で, ある 1-generic な次数で, その下に極小次数をもつものが存在することを示した.

定理 3.3 i. Chong and Jockusch [2]. 各 1-generic な次数 $a < 0'$, 各 0 でない $b < a$ において, ある 1-generic な次数 $c \le b$ が存在する.

ii. Chong and Downey [1] and Kumabe [16]. ある 1-generic な次数 $< 0''$ が存在し, その下に極小次数をもつ. (Chong and Downey [1] では次のことが示されている：ある 1-generic 次数 $a < 0''$ と極小次数 $m < 0'$ で $m < a$ となるものが存在する.)

従って 1-generic な次数 a において, $D(\le a)$ は同型ではない. Haught [7] は定理 3.3-(i) を次のように強めた結果を得ている.

定理 3.4 Haught [7]. もし $0 < a < b < 0'$ で b が 1-generic ならば, a もまた 1-generic となる.

次に示すように, 1-generic な次数は帰納的可算ではないだけでなく, その下にも帰納的可算な次数をもたない.

命題 3.2 どんな 1-generic な次数も, その下に 0 でない帰納的可算な次数をもつことはない.

証明. A を 1-generic な集合とする. 仮に, ある帰納的可算な E において, $E \le_T A$ となったとする. 還元オペレータ Φ を $\Phi(A) = E$ となるものとする. E は帰納的可算であるから, 次を仮定できる：各 σ と k において, もし $\Phi(\sigma)(k) = 1$ ならば k は E のなかに, ステージ $|\sigma|$ 以内に並べられる. S を, ある k が存在して, $\Phi(\sigma)(k) = 0$ だが $E(k) = 1$ となる, そのような string σ の集合とする. すると S は Σ_1^0 となる. $\Phi(A) = E$ であるから, ある $\sigma < A$ が存在して, σ のどんな拡張も S の要素とはならない. ここで E 帰納的となることを証明する. E を計算するには, 与えられた k において, string $\nu \ge \sigma$ で $\Phi(\nu)(k)$ が定義されるようなものを探す. すると $\Phi(\nu)(k) = 1$ iff $E(k) = 1$ が成り立つ. すると E は帰納的となる.

n-generic な次数は帰納的可算とはならないので, n-generic な次数の相対的な帰納的可算性について調べる.

定義 3.2 集合 A が immune とは, A が無限でさらに, 帰納的な無限集合を部分集合としてもらないことをいう.

もし A が 1-generic ならば A とその補集合はともに immune となる.

定理 3.5 Jockusch [11]. もし a が 1-generic ならば, ある $c < a$ で, a は c-帰納的可算となるものが存在する.

証明. A を 1-generic な集合とする. まず $p(i,j) = 2^i 3^j$ と定義する. どんな σ についても, $\Phi(\sigma)$ を, σ と同じ長さの string ν で,

$$\nu^{-1}(1) = \{p(i,j) \mid \sigma(i) = 1 \ \&\ \sigma(p(i,j)) = 0\}.$$

となるものとする．$\Phi(A)$ も同様に定義する．A は immune であるから，各 i に対し，ある j が存在して，$p(i,j) \notin A$ となる．よって A は $\Phi(A)$-帰納的可算となる．ここで A は $\Phi(A)$-帰納的とはならないことを示す．

補題 3.1 σ と τ を $\tau \leq \sigma$ で，さらに p の値域に含まれないようなある $n \geq |\tau|$ に対し，$\sigma(n)=0$ となる，そのようなものとする．このときある string $\nu \geq \tau$ が存在して，$\nu(n)=1$ と $\Phi(\nu) \geq \Phi(\sigma)$ が成り立つ．

証明．T を包含関係に関して最小の集合で次を満たすものとする：$n \in T$ さらに，もし $i \in T$, $\sigma(i)=0$ さらに $p(i,j) < |\sigma|$ ならば，$p(i,j) \in T$ となる．ν を σ と同じ長さの string で，$\nu^{-1}(1)=\sigma^{-1}(1) \bigcup T$ となるものとする．すると T の各要素は $|\tau|$ 以上であるから，$\nu \geq \tau$. $n \in T$ であるから，$\nu(n)=1$. 最後に $\Phi(\nu) \geq \Phi(\sigma)$ を示す．$k < |\Phi(\sigma)| = |\sigma|$ が与えられたとする．もし k が $p(i,j)$ の形でなければ，$\Phi(\nu)(k)=\Phi(\sigma)(k)=0$ となる．次にある i,j に対して $k=p(i,j)$ となると仮定する．

もし $\Phi(\sigma)(k)=0$ ならば，$\sigma(i)=0$ かあるいは $\sigma(p(i,j))=1$ が成り立つ．最初に $\sigma(i)=0$ を仮定する．もし $i \in T$ ならば，T の定義により，$p(i,j) \in T$ となる．よって $\nu(p(i,j))=1$. 従って $\Phi(\nu)(p(i,j))=0$. もし $i \notin T$ ならば $\nu(i)=0$ となる．よって $\Phi(\nu)(p(i,j))=0$. 次に $\sigma(p(i,j))=1$ を仮定する．このとき明らかに $\nu(p(i,j))=1$. よって $\Phi(\nu)(p(i,j))=0$. 従ってもし $\Phi(\sigma)(k)=0$ ならば $\Phi(\nu)(p(i,j))=0$ となる．

もし $\Phi(\sigma)(k)=1$ ならば，$\sigma(i)=1$ また $\sigma(p(i,j))=0$ が成り立つ．$\sigma(i)=1$ であるから，$\nu(i)=1$ である．また T の定義より，$p(i,j) \notin T$ となる．従って $\nu(p(i,j))=0$. $\nu(i)=1$ また $\nu(p(i,j))=0$ であるから，$\Phi(\nu)(k)=1$ が成り立つ．従ってもし $\Phi(\sigma)(k)=1$ ならば $\Phi(\nu)(p(i,j))=1$ となる．これで補題の証明が終わる．

次に定理の証明を終える．背理法により，ある Ψ に対し，$\Psi(\Phi(A))=A$ となったとする．S を string μ の集合で，μ と $\Psi(\Phi(\mu))$ は両立不可能となるものとする．明らかに S は帰納的である．A は 1-generic であるから，ある A の始切片 α が存在して，α のどんな拡張も S の要素とならない．$n \geq |\alpha|$ を $n \notin A$ でまた n は（どんな i,j に対しても）$p(i,j)$ の形とはならないものとする．$\Psi(\Phi(A))=A$ であるから，β を $\Psi(\Phi(\beta))(n)=0$ となるものとする．上の補題により，ある $\gamma \geq \alpha$ が存在して，$\gamma(n)=1$ また $\Phi(\gamma) \geq \Phi(\beta)$ となる．すると $\Psi(\Phi(\gamma))(n)=0$ また $\gamma(n)=1$ となる．これは矛盾である．

系 3.1 a が 1-generic ならば，$D(\leq a)$ は稠密ではない．実際 $D(\leq a)$ において，どの始切片も稠密でない．

証明．a を 1-generic とする．$b<a$ を，a が b-帰納的可算となるようにとる．Yates [40] による定理，任意の 0 でない帰納的可算な次数はその下に極小次数を持つ，の証明を b に相対化することにより，ある次数 c が存在して，c は $>b$ における極小次数（minimal cover）となる．従って $D(\leq a)$ は稠密ではない．2 番目の主張は定理 3.2 より得られる．

A が B-n-generic とは，B 上に相対化した任意の Σ^0_n な string の集合に対し，ある string $\sigma < A$ が存在して，$\sigma \in S$ かあるは，どんな σ の拡張も S の要素とはならないときをいう．Post の階層定理により，A が $n+1$-generic iff A が 1- $\emptyset^{(n)}$-generic. もし A が n-generic で B が A-n-generic ならば $A \oplus B$ が n-generic となる．

系 3.2 a が 2-generic ならば，ある $b<a$ が存在して $b \in GL_2 - GL_1$ となる．

証明．もし a が 2-generic ならば，a は $\emptyset'$-1-generic である．定理 3.5 を相対化することで，ある $b<a$ が存在して，a は b-帰納的可算で $a \not\leq b \cup 0'$ また $a \leq b'$ となる．a は 2-generic だから，補題 2.4 により $a''=a \cup 0''$.

よって $b'' \leq a'' = a \cup 0'' \leq b' \cup 0'' \leq (b \cup 0')'$. 従って $b'' \leq (b \cup 0')'$ となり $b \in GL_2$. $a \not\leq b \cup 0'$ また $a \leq b'$ だから, $b' \not\leq b \cup 0'$ となる. よって $b \in GL_2 - GL_1$ となる.

どんな 1-generic な次数も GL_1 であるから, 次の系が得られる.

系 3.3 もし a が 2-generic ならば, ある 0 でない $b < a$ で 1-generic でないものが存在する.

命題 3.1 により, もし a と b が generic ならば, 構造 $D(\leq a)$ と $D(\leq b)$ は初等同値. 従って上記系より次の疑問が生ずる:

問題 (Jokusch): もし a が generic ならば, 任意の 0 でない $b \leq a$ に対し, $D(\leq a)$ と $D(\leq b)$ は初等同値になるか?

Martin は次のことを証明した：もし $\mathcal{A}$ が meager な次数の集合（0 を含まない）とし, また $\mathcal{A} \cup \{0\}$ が始切片（initial segment）ならば, $\mathcal{A}$ の upward closure は再び meager となる. 次の系はこれと対照的である.

系 3.4 (Martin) 0 を含まない次数の meager な集合 $\mathcal{A}$ で, $\mathcal{A}$ の upward closure は meager とはならないものが存在する.

証明. $\mathcal{A}$ を GL_1 には含まれない次数の集合とする. $\mathcal{A}$ は 1-generic な次数の集合とは共通部分をもたないから, $\mathcal{A}$ は meager である. しかし系 3.2 により $\mathcal{A}$ の upward closure は, comeager な集合である, 2-generic な次数の集合を含むので, $\mathcal{A}$ の upward closure は meager ではない.

隈部は Theorem 3.5 を次のように発展させた.

定理 3.6 Kumabe[17]. 各 $n \geq 1$ そして各 n-generic な a に対し, ある n-generic な $c < a$ で, a が c-帰納的可算となるものが存在する.

a は g の strong minimal cover とは, $a > g$ で, 任意の次数 $< a$ は g 以下となるときをいう. 隈部 [21] は次のことを証明した.

定理 3.7 Kumabe [21]. ある $a < 0'$ と 1-generic な次数 $g < a$ で, a が g の strong minimal cover となるものが存在する. 従って g は cupping property をもたない.

次数 a に対し, $D(\leq a)$ が相補的（complemented）とは, 任意の $b < a$ に対しある c で, $b \cap c = 0$ and $b \cup c = a$ となるものが存在するときをいう. Posner [28] は, $D(\leq 0')$ が相補的であることを, 一様でない方法で示した. すなわち与えられた $a < 0'$ に対し, $a \bigcup b = 0'$ また $a \bigcap b = 0$ となる $b < 0'$ を, a が $a'' = 0''$ を満たすかどうかによって, 異なる方法を用いて証明した. Slaman and Steel [35] は一様な方法で, 与えられた $a < 0'$ に対し, ある 1-generic な $b < 0'$ で, $a \bigcup b = 0'$ また $a \bigcap b = 0$ となるものが存在することを示した. さらに Seetapun と Slaman [31] は, 任意の $a < 0'$ に対し, 極小次数 $b < 0'$ で $a \bigcup b = 0'$ となるものを示した. 2-generic な次数 a については, 隈部 [19] は, $D(\leq a)$ は相補的であることを示した.

定理 3.8 隈部 [19]. 各 $n \geq 2$ また各 n-generic な a, そして 0 でない各 $b < a$ に対し, ある n-generic な c と n-generic な $d < b$ が存在して, 任意の 0 でない $e \leq c$ と $d \leq f < a$ なる f に対し, $e \cup f = a$ and $e \cap f = 0$ となる.

系 3.5　2-generic な a に対し, $D(\leq a)$ は相補的である.

上記定理が 1-generic な次数についてもいえるかどうかは知られていない. Haught [7] の結果からみると, 1-generic な $a, b < 0'$ に対し, 2つの構造 $D(\leq a)$ と $D(\leq b)$ は同じ構造にみえる. ある 1-generic な $a, b < 0'$ で, $D(\leq a)$ と $D(\leq b)$ は同型でないものが存在するかどうかは知られていない.

次数 a が minimal cover とは, ある $b < a$ が存在して, a が b の minimal cover であるときをいう. 隈部 [18] はどんな 2-generic な次数も minimal cover であることを証明した.

定理 3.9　隈部 [18]. 各 $n \geq 2$ において,　任意の n-generic (generic) な次数 は, ある n-generic (generic) な次数の minimal cover である.

上記定理が 1-generic な次数についてもいえるかどうかは知られていない. この結果は他の結果と比べ対照的である. 一つは定理 [29] である：任意の帰納的可算な $a < b$ に対し, ある帰納的可算な c で $a < c < b$ となるものが存在する. この結果を用い Jockusch と Soare [15] は, 各 $n \geq 1$ において, $0^{(n)}$ は minimal cover でないことを示した. 次数の集合 A が cone とは, ある b が存在して $A = \{a \mid a \geq b\}$ となるときをいうことにする. Harrington と Kechris [6] は Σ^0_1 なゲームで, これより minimal cover からなる cone の存在が導ける, そのようなものを示し, その con の頂点が Kleen の O, Π^1_1 完全集合, となることを示した. Jockusch と Shore [14] はその後, 次数 $\geq 0^{(\omega)}$ の集合は minimal cover からなる cone であることを示した.

$A \in a$ が 1-generic とする. $\{A_i\}_{i \in \omega}$ は（チューリング還元性に関し）独立であるから, 有限の束は $D(\leq a)$ に埋め込める. 従って $D(\leq a)$ の Σ^0_1 理論は決定可能である. Spector [39] による極小次数の構成法は, 様々な形の埋め込み定理へと応用された. 例えば, Lerman [22] は, どんな有限束も D に始切片（initial segment）として埋め込めることを証明した. これを用い, Lerman と Shore [34] は独立に D の Σ_2 理論は決定可能であることを示した. 上記 minimal cover に関する定理を考えると, a が 2-generic の場合には, 任意の有限束はフルターとして $D(\leq a)$ に埋めこめるのではないかと予想する. これにより a が 2-generic の場合には, $D(\leq a)$ の Σ_2 理論は決定可能ではないかと予想する. またこの Σ_2 理論は 2-generic な a の取り方に依存しないと思われる.

Lerman [23] は次のことを証明した：任意の帰納的可算な $a > 0$ に対し, 任意の有限分配束は $D(\leq a)$ に始切片として埋め込める. これを用い彼は $D(\leq a)$ の理論は決定不能であることを証明した. 定理 2.1 により, 任意の 1-generic a に対し, ある $b < a$ で, a は b-帰納的可算となるものが存在する. 相対化することで, 任意の 1-geneic a に対し, $D(\leq a)$ の理論は決定不能であることがわかる. Slaman と Woodin [37] の方法を用いると, 自然数の標準モデルを $D(\leq a)$ 内にコード化することが可能である. 従って, 算術的な 1-generic な a において, $D(\leq a)$ の一階理論 $Th(D(\leq a))$ は $\emptyset^{(\omega)}$ と同じ次数を持つことがわかる.

次の系により, もし a が 1-generic ならば, 与えられた $b < a$ に対し, 以下が成り立つ $c \geq b$ が存在するとは限らない：a は c の minimal cover となる.

系 3.6　Jockusch [11] もし a が 1-generic ならば, ある $b < a$ で, 任意の $b \leq c < a$ となる c に対し, ある d で $c < d < a$ となるものが存在する.

証明. a を 1-generic とする. $b < a$ を, a が b-帰納的可算となるものとする. すると $b \leq c < a$ なる任意の c において, a は c-帰納的可算となる. 0 でない帰納的可算な次数は極小となりない, という事実を相対化することで, 系がいえる.

参考文献

[1] Chong, C. T. , and Downey, R. G. *On degrees bounding minimal degrees* Annals of Pure and Applied Logic 48, 1990, pp 215-225.

[2] Chong, C. T. , and Jockusch, C. G. *Minimal degrees and* 1-*generic degrees below* $0'$, Computation and Proof Theory, Lecture Notes in Mathematics 1104, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983, pp 63-77.

[3] Cooper, S. B. *The strong anticupping property for recursively enumerable degrees*, Journal of Symbolic Logic 54, 1989, pp 527-539.

[4] Feferman, S. *Some application of the notion of forcing and generic sets*, Fundamenta Mathematicae 55, 1965, pp 325-345.

[5] Friedberg, R. M. *A criterion for completeness of degrees of unsolvability*, Journal of Symbolic Logic 22, 1957, pp 159-160.

[6] Harrington, L. , and Kechris, A. *A basis result for* Σ^0_3 *sets of reals with an application to minimal covers*, Proc. Amer. Math. Soc. 53, 1975, pp 445-448.

[7] Haught, C. *The degrees below* 1-*generic degrees* $< 0'$, Journal of Symbolic Logic 51, 1986, pp 770-777.

[8] Hinman, P. G. *Some applications of forcing to hierarchy problems in arithmetic*, Z. Math. Logik Grundlagen Math 15, 1969, pp 341-352.

[9] Hinman, P. G. *Recursion-Theoretic Hierarchies*, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, New York, 1977.

[10] Jockusch, C. G. *Simple proofs of some theorems on high degrees of unsolvability*, Canadian Journal of Math. 29, 1977, pp 1072-1080.

[11] Jockusch, C. G. *Degrees of generic sets*, Recursion Theory-Its Generalizations and Applications-, London Mathematical Society Lecture Notes, Cambridge University Press, Cambridge, 1980, pp 110-139.

[12] Jockusch, C. G. and Posner, D. *Double jumps of minimal degrees*, Journal of Symbolic Logic 43, 1978, pp 715-724.

[13] Jockusch, C. G. and Posner, D. *Automorphism bases for degrees of unsolvability*, Journal of Symbolic Logic 40, 1981, pp 150-164.

[14] Jockusch, C. G. , and Shore, R. A. *REA operators, R. E. degrees and minimal covers*, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics 42, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1985, pp 3-11.

[15] Jockusch, C. G. and Soare, R. I. *Minimal covers and arithmetical sets*, Proceedings of the American Mathematical Society 25, 1970, pp 856-859.

[16] Kumabe, M. *A* 1-*generic degree which bounds a minimal degree*, Journal of Symbolic Logic 55, 1990, pp 733-743.

[17] Kumabe, M. *Relative recursive enumerability of generic degrees*, Journal of Symbolic Logic 56, 1991, pp 1075-1084.

[18] Kumabe, M. *Every n-generic degree is a minimal cover of an n-generic degree*, Journal of Symbolic Logic 58, 1993, pp 219-231.

[19] Kumabe, M. *Generic degrees are complemented*, Annals of Pure and Applied Logic 59, 1993, pp 257-272.

[20] Kumabe, M. *Minimal upper bounds for the arithmetical degrees*, Journal of Symbolic Logic 59, 1994, pp 516-528.

[21] Kumabe, M. *A 1-generic degree with a strong minimal cover*, Journal of Symbolic Logic 65, 2000, pp 1395-1442.

[22] Lerman, M. *Initial segments of degrees of unsolvability*, Annals of Mathematics 93, 1971, pp 365-389.

[23] Lerman, M. *Degrees of Unsolvability*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[24] Lerman, M. *Degrees which do not bound minimal degrees*, Annals of Pure and Applied Logic 30, 1986, pp 249-276.

[25] Macintyre, J. M. *Transfinite extensions of Friedberg's completeness criterion*, Journal of Symbolic Logic 42, 1977, pp 1-10.

[26] Martin D. A. *Classes of recursively enumerable sets and degrees of unsolvability*, Z. Math. Logik Grundlagen Math. 12, 1966, pp 295-310.

[27] Odifreddi, P. *Forcing and reducibilities. I. Forcing in Arithmetic*, Journal of Symbolic Logic 48, 1983, pp 288-310.

[28] Posner, D. *The upper semilattice of degrees $\leq 0'$ is complemented*, Journal of Symbolic Logic 46, 1981, pp 705-713.

[29] Sacks, G. E. *The recursively enumerable degrees are dense*, Annals of Mathematics 80, 1964, pp 300-312.

[30] Sacks, G. E. *Recursive enumerability and the jump operator*, Trans. Amer. Math. Soc. 108, 1963, pp 223-239.

[31] Seetapun, D. and Slaman, T. *Minimal complements*, to appear.

[32] Selman, A. L. *Applications of forcing to the degree-theory of the arithmetical hierarchy*, Proc. London Math. Soc. 25, 1972, pp 586-602.

[33] Shoenfield, J. R. *A theorem on minimal degrees*, Journal of Symbolic Logic 31, 1966, pp 539-544.

[34] Shore, R. *On the $\forall\exists$-sentences of α-recursion theory*, Generalized recursion theory II, Studies in Logic and the foundation of mathematics 94, North-Holland, Amsterdam, 1978, pp 331-354.

[35] Slaman, T. A. and Steel, J. R. *Complementation in the Turing degrees*, Journal of Symbolic Logic 54, 1989, pp 160-176.

[36] Slaman, T. A. and Woodin, H. *Definability in the Turing degrees*, Illinois Journal of Mathematics 30, 1986, pp 320-334.

[37] Slaman, T. A. and Woodin, H. *Definability in degrees structures*, to appear.

[38] Soare, R. I. Recursively Enumerable Sets and Degrees, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1987.

[39] Spector, C. *On degrees of recursive unsolvability*, Annals of Mathematics 64, 1956, pp 581-592.

[40] Yates, C. E. *Initial segments of degrees of unsolvability, Part II, Minimal Degrees*, Journal of Symbolic Logic 35, 1970, pp 243-266.

[41] Yates, C. E. *Banach-Mazur games, comeager sets, and degrees of unsolvability*, Mathematical Proceeding of the Cambridge Philosophical Society 79, 1976, pp 195-220.