数理解析研究所講究録
第2051巻 2017年 25-29

Cellular automata and groups

東洋大学　総合情報学部 佐藤　忠一

Tadakazu Sato

Department of Information Science and Arts

Toyo University

1. まえがき

セルオートマトンは局所的に相互作用を有する並列変換であるが、この立場からすると行列は相互作用の無いスコープ幅１のベクトル空間上の線形セルオートマトンとみなすことができる。２次元ユークリッド空間における直交行列をセルオートマトンの立場から拡張すると新たにパラメータが存在し、このパラメータに関して１スコープから３スコープへと連続的に移る。この変換は各セルのノルムの総和を保存するので回転群を真部分群として含む。同様に２次元ミンコフスキー空間における回転であるローレンツ変換も１スコープから３スコープへと連続的に拡張できる。

２．諸定義と基本的性質

セルオートマトンは同一構造のセルを空間に規則的に配置し、相互接続し、各セルはローカルなルールで同期して並列動作する。すなわちローカルなルール（局所関数）を各セルに一斉に作用させる。この作用は各セルの状態の分布を新しい状態の分布に変換する並列写像と呼ばれる写像を誘導する。セルオートマトンでは普通各セルの状態集合として有限集合を扱うので、局所関数が１スコープの場合は明らかに並列写像の単射性、全射性、可逆性の性質はすべて等価になる。しかし局所関数が２スコープ以上では単射性と可逆性の性質のみが等価になる。

セルの状態集合が無限集合になると並列写像の性質についてはあまり知られていない。しかし線形セルオートマトンに限ると以下のことが成り立つ。

(1) 可換なアルティン環上の線形セルオートマトンの並列写像については局所関数が１スコープの場合並列写像の単射性、全射性、可逆性の性質はすべて等価になるが局所関数が２スコープ以上では並列写像の単射性と可逆性のみが等価になる。

(2) 行列環上の線形セルオートマトンの並列写像については局所関数が１スコープの場合、すなわち行列の単射性、全射性、正則性（可逆性）の性質はすべて等価になることが線形代数でよく知られている。局所関数が２スコープ以上では並列写像の単射性と可逆性のみが等価になる。行列環は非可換なアルティン環である。

本論文ではベクトル空間上の線形セルオートマトンを考え、それが直交変換になる場合すなわち、その並列写像が直交変換になる場合を考え、直交行列をセルオートマトンの立場から拡張する。

Zを整数の集合とする。スコープ幅３のベクトル空間V上の線形セルオートマトンは各セルの状態集合としてベクトル空間をとり、３変数の線形局所関数$f:V\times V\times V\to V$はV上の３つの正方行列A_{-1},A_0,A_1を与えると定まり、それぞれの行列は左側のセル、自分自身のセル、右側のセルに作用する。

並列写像$f_\infty:V^Z\to V^Z$ は$\cdots V\times V\times V\cdots$から自分自身への線形写像で次式のように定義される。

$$f_\infty(u)=u',\quad u,u'\in V^Z \quad\Leftrightarrow\quad {}^\forall i\in Z \quad u_i'=A_{-1}u_{i-1}+A_0u_i+A_1u_{i+1}$$

ここで、u,u' は各セルの状態の分布で$u_i,u_i'\in V$はi番目のセルの状態を表す。

したがって、線形セルオートマトンの理論から並列写像は次式のような行列上の多項式で表される。

$$f_\infty \quad\Leftrightarrow\quad F_X=A_{-1}X^{-1}+A_0+A_1X$$

で表される。ここでXはシフトオペレータである。

なお ${}^tF_X={}^tA_{-1}X+{}^tA_0+{}^tA_1X^{-1}$ である。

３．ユークリッド空間V上の直交変換

定義１．V上の線形セルオートマトンが直交変換であるとはその並列写像が各セルのベクトルのノルムの総和を保存するとき、すなわち次式が成り立つときである。

$$\sum_{i\in Z} < u'_i, u'_i > = \sum_{i\in Z} < u_i, u_i >$$

ここで　$f_\infty(u) = u', \quad u, u' \in V^Z, \; < u_i, u_i > = {}^t u_i u_i$

このときF_Xは ${}^t F_X F_X = I$ を満たし、直交行列の自然な拡張となっている。

$A(b) = \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ b & 1 \end{pmatrix}$ は２次元ユークリッド空間上の回転を表し、これによって生成される回転群はアーベル群である。

$A_X(r) = \dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}} \begin{pmatrix} 1 & -rX^{-1} \\ rX & 1 \end{pmatrix}$ は２次元ユークリッド空間における３スコープの直交変換でこれによって生成される群はやはりアーベル群である。しかしこれら２つの元によって生成される群、すなわち、これら２つの元とそれらの逆元の有限積として書ける直交変換の群は非アーベル群で１スコープの回転群を真に含み行列式が１の直交群をなす。

４．ミンコフスキー空間M上の直交変換

定義２．M上の線形セルオートマトンが直交変換であるとはその並列写像が各セルのベクトルのノルムの総和を保存するとき、すなわち次式が成り立つときである。

$$\sum_{i\in Z} < u'_i, u'_i >_M = \sum_{i\in Z} < u_i, u_i >_M$$

ここで $f_\infty(u) = u', \quad u, u' \in M^Z, \quad < u_i, u_i >_M = {}^t u_i \Lambda u_i, \; \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

このとき F_X は ${}^tF_X\Lambda F_X=\Lambda$ を満たし、ローレンツ変換の自然な拡張となる。

$L(\beta)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix}1 & -\beta\\ -\beta & 1\end{pmatrix}$ は２次元空間ンコフスキー空間上の回転を表し、

これによって生成される回転群はアーベル群である。

$L_X(\gamma)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\begin{pmatrix}1 & -\gamma X^{-1}\\ -\gamma X & 1\end{pmatrix}$ は２次元ミンコフスキー空間における３スコープの直交変換でこれによって生成される群はアーベル群である。しかしこれら２つの元によって生成される群、すなわち、これら２つの元とそれらの逆元の有限積として書ける直交変換の群は非アーベル群で１スコープの回転群を真に含み行列式が１の直交群をなす。この群の元は $\gamma=0$ のとき $L(\beta)$ で $\gamma\to 1$ になるにつれて $L(\beta)$ からずれる。$L(\beta)$ はローレンツ変換と呼ばれ

$\beta=\dfrac{v}{c}$ で分子の v は２つの慣性系の相対速度を表し、分母の c は光の速度

である。$L_X(\gamma)$ は $\gamma=1$ で極を持ち、γ が次元をもたないことから γ はある物

理量の比を表す。したがって、γ は分子に最小値を持ち、$\gamma=\dfrac{\ell_{\min}}{\ell}$ であるか、

または分母に最大値を持ち、$\gamma=\dfrac{\ell}{\ell_{\max}}$ であるかのいずれかである。

$L_X(\gamma)$ の代わりに $L_X(\gamma,\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\begin{pmatrix}1 & -\gamma e^{-i\theta}X^{-1}\\ -\gamma e^{i\theta}X & 1\end{pmatrix}$ をとると例えば

$$F_X\equiv L(\beta)L_X(\gamma,\theta)=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}}\left[\gamma e^{-i\theta}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & \beta\end{pmatrix}X^{-1}+\begin{pmatrix}1 & -\beta\\ -\beta & 1\end{pmatrix}+\gamma e^{i\theta}\begin{pmatrix}\beta & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}X\right]$$

は ${}^t\overline{F}_X\Lambda F_X=\Lambda$ を満たす。

5．参考文献

[1] S. Amoroso and Y. N. Patt, Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures. J.Comput.Systems Sci.6(1972),448-464.

[2] G. A. Hedlund, Endomorphisms and automorphisms of shift dynamical systems. Mathematical systems Theory 3 (1969), 320-375.

[3] M. Ito, N. Osato and M. Nasu, Linear cellular automata over Zm, J.Comput. System Sci.27 No.2 (1983), 125 – 140.

[4] D. Richardson, Tessellation with local translations, J. Comput.System Sci 6 (12) (1972), 373-388.

[5] T. Sato, Cellular Automata, p402—p406, ACRI2006, Springer, 2006