数理解析研究所講究録
第2051巻 2017年 133-136



# 有界可換ＢＣＫ-代数における, BCK-代数としてのイデアルと演算 $\wedge,\vee$ に関する束としてのイデアルの関係について

熊澤　昌明

箕面自由学園高等学校

## 1　はじめに

BCK-代数は、井関清志先生によって普遍代数の研究に導入された。

井関先生は1960年代より、数学を学ぶ市民サークルである「数学基礎論の会」(この会は、初め土曜サークルと呼ばれていた。その後他の研究者から神戸スクールと論文の中で呼ばれている。)を指導された。「数学基礎論の会」のメンバーは主に命題論理について研究をした。彼らは、その研究成果を日本学士院に多数発表し続けた。その中で、1966年に今井泰之と井関清志の両先生は、次の論文 [2] の中で BCK-代数を定義した。 *"On axiom system of propositional calculi XIV"*.

BCK-代数とは、次の２つの概念の一般化を意図して定義したものである。その２つの概念とは、１つは演算として集合差のみを持つ集合算であり、もう１つは含意のみを持つある種の命題計算である。

なお、B、C、K という文字は次の３つの推論規則を意味しており、それぞれ

(B) $CC_{pq}CC_{qr}C_{pr}$　　$((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)))$

(C) $C_pCC_{pqq}$　　$(p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q))$

(K) $C_pC_{qp}$　　$(p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$

である。

ここで、BCK-代数の定義をあらためて述べておく。

<u>定義</u> (Imai, Iséki [2],Iséki,Tanaka [5])

定数 0 と演算 $*$ を持つ代数 $X = < X; *, 0 >$ が *BCK*-代数であるとは、$X$ の任意の元 $x, y, z$ に対して、次の (I) ~(VI) の条件を満たすものとする。

(I)　$(x * y) * (x * z) \leqq z * y$,

(II)　$x * (x * y) \leqq y$ ,

(III)　$x \leqq x$ ,

(IV)　$0 \leqq x$ ,

(V)　$x \leqq y, y \leqq x$　ならば　$x = y$ ,

(VI)　$x \leqq y$　である時, その時に限り　$x * y = 0$.

1974年に、井関先生は論文 [3] において、本格的に BCK-代数の研究を始めた。その後、多くの数学者によって BCK-代数の研究は深められている。

## 2　BCK-代数と束

ここでは、特別な BCK-代数がある種の束となっていることを述べたい。

1975年に、田中昭太郎先生は論文 [6] において、BCK-代数に次の条件 (VII) を加えた代数と同値な代数を研究した。

(VII)　$x \wedge y = y \wedge x$　ただし　$x \wedge y = y * (y * x)$.

この代数は可換 $BCK$-代数と呼ばれている。田中先生は、可換 BCK-代数 $X =< X; *, 0 >$ が演算 $\wedge$ に関して下半束となっていることを示した。つまり、可換 BCK-代数 $X =< X; \wedge, 0 >$ において、$X$ の任意の元 $x, y$ に関して $x \wedge y$ が下限となっていることを示した。

井関先生の論文 [3] には、有界 BCK-代数が定義されている。BCK-代数 $X$ が有界であるとは、$X$ の中に最大元 1 の存在を仮定するものである。すなわち任意の元 $x \in X$ に対して、常に $x \leqq 1$ が成り立っている。この仮定のもと、単項演算を $Nx = 1 * x$ で定義する。

1978 年には、井関、田中両先生は論文 [5] において、有界可換 BCK-代数 $X =< X; *, 0 >=< X; \wedge, \vee, 0, 1 >$ は、演算 $\wedge, \vee$ に関して束であることを示した。ただし、 $x \wedge y = y * (y * x)$, $x \vee y = N(Nx \wedge Ny)$ であり、任意の $x, y$ に関して $x \wedge y$ が下限となり、$x \vee y$ が上限となっている。

さらに、演算 $N$ に関して、次のド・モルガンの法則の類似 $Nx \vee Ny = N(x \wedge y)$, $Nx \wedge Ny = N(x \vee y)$ と 2 重否定の原理 $NNx = x$ が成り立つことを示している。

1979 年、T. トラチェック氏は論文 [7] において、有界可換 BCK-代数 $X$ は束の分配法則を満たすことを示した。すなわち、任意の 3 元 $x, y, z \in X$ に対して、次の等式が成り立つ。

$z \wedge (x \vee y) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y), z \vee (x \wedge y) = (z \vee x) \wedge (z \vee y)$

最小元 0 、最大元 1 を持って、2 重否定の原理を満たし、ド・モルガンの法則をも満たす分配束をド・モルガン代数と呼んでいるが、有界可換 BCK-代数はド・モルガン代数となっている。

## 3 BCK-代数のイデアルと束のイデアル

この節において、次の問題を考える。

<u>問題</u> BCK-代数におけるイデアルは束のイデアルと一致しているのか?

まず、井関先生の論文 [4] より BCK-代数におけるイデアルの定義を与える。

<u>**定義.1**</u> (BCK-代数のイデアル)

BCK-代数 $X$ の空でない部分集合 $A$ が BCK-代数のイデアルであるとは、次の (1),(2) を満たすものとする。

(1) $0 \in A$,
(2) $y * x \in A, x \in A$ ならば $y \in A$.

次に、束におけるイデアルの定義を述べる。

<u>**定義.2**</u> (束のイデアル; Birkhoff [1])

束 $L$ の空集合でない部分集合 $I$ が束のイデアルであるのは、次の①,② を満たすものとする。

① $a \in I, x \in L, x \leqq a$ ならば $x \in I$,
② $a \in I, b \in I$ ならば $a \vee b \in I$.

2 節で述べたことだが、改めて確認する。有界可換 BCK-代数はド・モルガン代数であるので、分配束である。そこで、ここでは有界可換 BCK-代数における井関のイデアルが、束の意味でもイデアルとなっていることを示す。

<u>定理</u>

$X=<X;*,0>$ が有界可換 BCK-代数ならば演算 $*$ に関する井関のイデアル $I$ は、演算 $\wedge,\vee$ に関する束のイデアルでもある。

<u>証明</u>

$X=<X;*,0>$ を有界可換 BCK-代数とし、$I$ を $X$ の井関のイデアルとする。

$X$ が有界可換 BCK-代数であれば 2 節で述べたように $X=<X;\wedge,\vee,0,1>$ は分配束である。目標は、井関のイデアル $I$ が分配束 $X$ のイデアルでもあることを示せばよい。

すなわち、次の①,②の条件を満たすことを示せばよい。

① $x \in I, z \in X, z \leqq x$ ならば $z \in I$,
② $x \in I, y \in I$ ならば $x \vee y \in I$.

まず、①を示す。

$x \in I, z \in X$ のとき、$z \leqq x$ とする。

上の仮定より、$x \in X$ かつ $z * x = 0 \in I$ なので、$I$ が $X$ の井関のイデアルであることから、$z \in I$ である。これにより①は示された。

次に②を示す。

まず、有界可換 BCK-代数 $X$ において、これは後の補題で示すが、任意の 2 元 $x, y \in X$ に対して、等式 $\{(x \vee y) * y\} * x = 0$ が成立する。

ここで、$x, y \in I$ とする。$\{(x \vee y) * y\} * x = 0$ かつ $x \in I$ であり、$I$ は井関のイデアルであるので $(x \vee y) * y \in I$ となる。さらに同様に、$(x \vee y) * y \in I$ かつ $y \in I$ より $x \vee y \in I$ である。これにより②は示された。

よって、定理の証明はできた。

次に、残された補題を示す。

<u>補題</u>

$X$ を有界可換 BCK-代数とすると、$X$ の任意の 2 元 $x, y$ に対し、次の等式
$$\{(x \vee y) * y\} * x = 0$$
が成り立つ。

<u>証明</u>

有界可換 BCK-代数 $X$ において、任意の 2 元 $x, y$ に対して、次の等式が成り立つ。

ⓐ $NNx = x$
ⓑ $x * y = Ny * Nx$

このⓐ,ⓑを用いると、次が得られる。

$$\begin{aligned}(x \vee y) * y &= N(Nx \wedge Ny) * y \\ &= Ny * NN(Nx \wedge Ny) \\ &= Ny * (Nx \wedge Ny) \\ &= Ny * \{Ny * (Ny * Nx)\} \\ &= Ny * \{Ny * (x * y)\} \\ &\leqq x * y\end{aligned}$$

よって、任意の 2 元 $x, y \in X$ に対して、$\{(x \vee y) * y\} * x = 0$ が成り立つ。

### 謝辞

鳴門教育大学、成川公昭教授には、ご専門の分野でないにもかかわらず、内容をお聞きいただき、有意義なご助言を頂きました。これに感謝をし、ここにお礼を申しあげます。

### 参考文献

[1] Birkhoff,G. ,*Lattice Theory (Third edition)*, Amer.Math.Soc.,Providence,R. I.(1967)

[2] Imai, Y. and Iséki, K., On axiom system of propositional calculi XIV, Proc. Japan Acad. 42, (1966), 19-21

[3] Iséki, K., Some Properties of BCK-algebras, Math. Sem. Notes Kobe Univ., vol.2, (1974), 193-201

[4] Iséki, K., On Ideals in BCK-algebras, Math. Sem. Notes Kobe Univ. vol.3, (1975), 1-12

[5] Iséki, K. and Tanaka, S., An Introduction of the theory of BCK-algebras, Math. Japonica, 23, (1978),no.1, 1-26

[6] Tanaka, S., A new class of algebra, Math. Ssm. Notes Kobe Univ., vol.3, (1975), 37-43

[7] Traczyk, T., On the variety of bounded commutative BCK-algebras, Math.Japonica, 24, (1979),no.3, 283-292