数理解析研究所講究録
第2051巻 2017年 137-142

On an unsuccessful construction of semi-galois categories

浦本 武雄
東北大学大学院情報科学研究科

1 はじめに

本稿は *semigalois* 圏 [1, 2] の幾何的な構成の過程で得られた観察についての簡易報告である。semigalois 圏とは形式的には、(essentially small な) 圏 $\mathscr{C}$ と関手 $\mathrm{F}:\mathscr{C}\to\mathbf{sets}$ の組 $\langle\mathscr{C},\mathrm{F}\rangle$ であって：

1. $\mathscr{C}$ は finite limit 及び finite colimit を持つ；
2. F は finite limit 及び finite colimit を保つ (F は exact)；
3. F は同型を反映する[1]；

という条件を満たすものとして定義される。semigalois 圏は著者の以前の研究 [1, 2] において導入され、特に形式言語理論における Eilenberg 理論と呼ばれる理論の公理化の文脈で研究された。これらの研究文脈 (及び galois 圏) については元の論文 [1, 2] を参照してもらうこととし、本稿ではその論文中で掲げた問題についての観察を報告する。

semigalois 圏はその名が示唆するように、galois 圏の拡張である (galois 圏は常に semigalois 圏)。特に galois 圏 $\langle\mathscr{C},\mathrm{F}\rangle$ が常に、ある副有限群 G に対してその有限 G 集合のなす圏 $\mathscr{B}_fG$ と同値であるのと同様に、semigalois 圏 $\langle\mathscr{C},\mathrm{F}\rangle$ は常に、ある副有限モノイド M に対して有限 M 集合のなす圏 $\mathscr{B}_fM$ と同値になることがわかる。ここで現れる副有限モノイド M を、semigalois 圏 $\langle\mathscr{C},\mathrm{F}\rangle$ の基本モノイド (fundamental monoid) と呼び、$\pi_1(\mathscr{C},\mathrm{F})$ と表す；galois 圏の場合の基本モノイドは、古典的な基本群と一致する。基本モノイド $\pi_1(\mathscr{C},\mathrm{F})$ が位相的に有限生成である場合には、ちょうど $\langle\mathscr{C},\mathrm{F}\rangle$ は Eilenberg 理論で現れる正規言語 (ないし有限オートマトン) の local variety と呼ばれるものと等価 (一対一に対応する) であり、semigalois 圏と古典的な形式言語理論との対応はこの等価性に基づく。以前の論文 [2] では、galois 圏が、体 k の上の有限分離的代数や、連結な位相空間 X の有限被覆からなる圏として構成できるように、semigalois 圏も何らかの幾何的な対象からなる圏として構成できるだろうことを、future work で取り組むべき問題として提案していた。(cf. §7, [2])。

本稿で議論する問題は、この文脈に属す。特に「代表的な galois 圏の構成である連結 scheme S の有限étale 被覆からなる圏の構成から、étaleness の仮定を落としたら semigalois 圏になるか」という素朴な (というより安直な) アイデア (というより観察的実験) について、うまくいく部分とうまくいかない部分についてまとめている。まず安直に、連結な scheme S が与えられた時、任意の (étale とは限らない) 有限平坦被覆のなす圏 $\mathscr{C}$ を考え、S の幾何的点 $\xi:\mathrm{Spec}(\bar{k})\to S$ の上のファイバーを取る関手 $\mathrm{F}:\mathscr{C}\to\mathbf{sets}$ によって組 $\langle\mathscr{C},\mathrm{F}\rangle$ を考えても (ξ の上以外の点で任意に動きうるので F が同型を反映しなくなり) うまくいかないだろう；そのため、この方向性の構成として最善なのは (もし可能だとしても)、体 k に対して $S=\mathrm{Spec}(k)$ となる時 (0 次元の場合) であろう。この観点から本稿で実験的に観察するのは、「分離的とは限らない有限 k 代数のなす圏 $\mathbf{Alg}_f(k)$ 上の関手 $\mathrm{F}:\mathbf{Alg}_f(k)^{op}\to\mathbf{sets}$ で、(I) それが分離的代数上の古典的なファイバー関手と一致し、(II) exact であり、かつ (III) 同型を反映するようなものは存在するか (結果的に $\langle\mathbf{Alg}_f(k)^{op},\mathrm{F}\rangle$ は semigalois 圏となるか)」という問題である。本稿ではこれらの要請のうち部分的に (II 以外) 満たすものであれば、確かに存在することを示す。

[1] F が同型を反映するとは、$\mathrm{F}(f)$ が同型であるとき f もまた同型であることをいう。

幾何的に見ると k 上の分離的代数は、Spec(k) の上のétale 被覆で、分離性の仮定を落とすと一般にはファイバー上で重複度を持ったような被覆を含む。上記の問題で言及しているような関手の構成は、この「重複度を持ちうる (にも関わらずファイバー集合が同型を反映するくらい十分な情報を持つように)」という要請に対応できるように与えているが、簡単にいうと (古典的には素イデアルの集合をとっていたところを) 準素イデアルを取ることに置き換えている。結論から言えばこの構成では semigalois 圏にはならない。構成される関手が確かに同型を反映することは初等的な議論でわかるが、残念ながら、この関手は exact ではない。実際、構成した関手 F は例えば積を保たない。しかしこの exactness が成立しない原因を眺めていると、どうも k 代数の線形構造 (和の構造) が原因であるように感じさせるものがあり、(結果的には) それがその後の正しい semigalois 圏の構成に繋がった。そのため本稿ではその正しい構成については扱わないが、この観察自体への興味で、上記の問題を独立した問題として扱う。

2 問題と構成

以下では $\mathbf{Alg}_f(k)$ と書いて、k 上の有限代数と k 代数準同型の成す圏、$\mathbf{Et}_f(k)$ は $\mathbf{Alg}_f(k)$ の忠実充満部分圏であって k 上分離的なものからなるものとする。また、$\mathrm{F} : \mathbf{Et}_f(k)^{op} \to \mathbf{sets}$ を、$\mathrm{F}(A) := |\mathrm{Spec}(\bar{k} \otimes A)|$ で自然に定まる関手とする。ただし $\bar{k}$ は k の代数閉包、$\mathbf{sets}$ は有限集合の圏で、$|\mathrm{Spec}(\bar{k} \otimes A)|$ は $\mathrm{Spec}(\bar{k} \otimes A)$ の台集合を表す。この時、$\langle \mathbf{Et}_f(k)^{op}, \mathrm{F} \rangle$ は galois 圏となることがよく知られている。特に関手 F について：

1. F は exact；そして、
2. F は同型を反映する；

が成り立つ。我々の元々の目標は、このファイバー関手 $\mathrm{F} : \mathbf{Et}_f(k)^{op} \to \mathbf{sets}$ を $\mathbf{Alg}_f(k)^{op}$ に拡張することであった。つまり関手 $\mathrm{F}' : \mathbf{Alg}_f(k)^{op} \to \mathbf{sets}$ であって：

1. F' は $\mathbf{Et}_f(k)$ 上では上記の $\mathrm{F} : \mathbf{Et}_f(k)^{op} \to \mathbf{sets}$ と一致し；
2. F' は exact；かつ
3. F' は同型を反映する；

となるようなものを構成することである。本稿で議論するのは、この問題の部分的解決である。つまり我々は以下を示す：

Theorem 1. 関手 $\mathrm{F}' : \mathbf{Alg}_f(k)^{op} \to \mathbf{Sets}$ であって：

1. F' は $\mathbf{Et}_f(k) \subset \mathbf{Alg}_f(k)$ 上では $\mathrm{F} : \mathbf{Et}_f(k)^{op} \to \mathbf{sets}$ と一致し；

2. F' は同型を反映する；

となるものが存在する。ただし $\mathbf{Sets}$ は *(*有限とは限らない*)* 集合の圏とする。

上述したように、幾何的には $\mathbf{Alg}_f(k)^{op}$ の対象は Spec(k) 上で重複度を持つような空間を含む。したがって拡張されたファイバー関手 $\mathrm{F}' : \mathbf{Alg}_f(k)^{op} \to \mathbf{Sets}$ では、Spec(k) の (唯一の) 幾何的点の上の点の「重複度も込めて数える」ような関手として定義したい。例えば典型的な (分離的でない)k 代数の例として、$A = k[x]/(x^3)$ という代数を考えると、これは幾何的には (つまり $\mathrm{Spec}(k[x]/(x^3))$ は) 重複度 3 を持つような一点からなる Spec(k) 上の空間であるから、願わくば：

$$\mathrm{F}'(k[x]/(x^3)) \quad = \quad \{\ 3\ \text{点集合}\ \}$$

となるようにしたい。

これらの直感的な要請を満たしつつ、上述の定理の主張にあるような性質をみたす関手を作る。そのために「代数 $k[x]/(x^3)$ の準素イデアルの集合は3点集合 $\{(x),(x^2),(0)\}$ となる」ことに注意し、我々は以下のような対応で自然に関手 $\mathrm{F}' : \mathbf{Alg}_f(k)^{op} \to \mathbf{Sets}$ を定義する：

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Alg}_f(k)^{op} & \longrightarrow & \mathbf{Sets} \\ A & \longmapsto & \{\bar{A}\text{の準素イデアル全体}\} \end{array}$$

ただし k 代数 $A \in \mathbf{Alg}_f(k)$ に対し $\bar{A} := \bar{k} \otimes A$ と書く。また射 $f : A \to B$ に対して $f^* := \mathrm{F}'(f) : \mathrm{F}'(B) \to \mathrm{F}'(A)$ は、準素イデアルの自然な ($\bar{f} := \bar{k} \otimes f : \bar{A} \to \bar{B}$ による) 引き戻しで定義する。我々の主張は、この関手 $\mathrm{F}' : \mathbf{Alg}_f(k)^{op} \to \mathbf{Sets}$ が、所望の性質を持つことである。つまり、F' は $\mathbf{Et}_f(k)$ 上では古典的なファイバー関手と一致し、かつ同型を反映する。

3 証明

$\mathbf{Et}_f(k)$ 上で古典的なファイバー関手と一致すること (自然に同型) を見るのは簡単であるため、ここでは F' が同型を反映することを証明する。簡単のため以下では $\mathrm{F}' : \mathbf{Alg}_f(k)^{op} \to \mathbf{Sets}$ を単に F とかき、k-algebra と言えば k 上有限次とする。

Proposition 1. *Let A, B be k-algebras, and $f : A \to B$ be a k-algebra homomorphism such that $f^* : \mathrm{F}(B) \to \mathrm{F}(A)$ is an isomorphism of sets. Then f is an isomorphism of k-algebras.*

この命題を確かめるためまず次のことに注意する：

Lemma 1. *Let A, B and f be as above. If $\bar{f} : \bar{A} \to \bar{B}$ is an isomorphism, so is f itself.*

Proof. 容易。 □

このことから k は初めから代数的閉であると仮定して良い。代数的閉の場合を証明するため、まずは A, B が local である場合に主張を示す：

Lemma 2. *Let k be algebraically closed; $(A, \mathfrak{m}_A)$ and $(B, \mathfrak{m}_B)$ be local k-algebras with maximal ideals $\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}_B$ respectively; and $f : A \to B$ be a k-algebra morphism such that $f^* : \mathrm{F}(B) \to \mathrm{F}(A)$ is an isomorphism of sets. Then f is an isomorphism of k-algebras.*

Proof. まず f が injective であることを示す。$f^* : \mathrm{F}(B) \to \mathrm{F}(A)$ が bijective であり、準素イデアルの包含関係 $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ を保つため、最小の準素イデアル $0 \in \mathrm{F}(B)$ は f^* によって A の最小の準素イデアル 0 に移らなければならない。つまり $f^{-1}(0) = 0$ であるので、これは f が injective であることを示している。

次に f が surjective であることを示す。今 k は代数的閉であるので、$A/\mathfrak{m}_A \simeq k \simeq B/\mathfrak{m}_B$ が得られる。故に分解 $A = k \oplus \mathfrak{m}_A, B = k \oplus \mathfrak{m}_B$ を得る。今 f が injective であることがわかっているので、$A \subseteq B$ とみなし、$\mathfrak{m}_B \subseteq \mathfrak{m}_A$ を示せば良い。$\mathfrak{m}_B$ はべき零であるので、十分大きい自然数 N で $\mathfrak{m}_B^N = 0$ となるものを一つ固定しておく。$\mathfrak{m}_B \subseteq \mathfrak{m}_A$ を示すために、$b \in \mathfrak{m}_B$ を任意に取った時 $b \in \mathfrak{m}_A$ であることを示す。$b = 0$ の時は何も示すことはない。$b \neq 0$ の時、(b) を b が生成する principal ideal とする。B は local かつ artin であるから (b) は準素イデアルで $(b) \in \mathrm{F}(B)$ であり、$f^*(b) = (b) \cap A \in \mathrm{F}(A)$。いま f^* は bijective であるから、$(b) \cap A$ の B における拡大は (b) に等しい。このことから、ある $a \in \mathfrak{m}_A$ および $c, d \in B$ が存在して $a = bc$ かつ $b = ad$。故に $b(1 - cd) = 0$。今 $b \neq 0$ であるから $1 - cd \in \mathfrak{m}_B$ であるが、このことから d は B の単元であることがわかる。$B = k \oplus \mathfrak{m}_B$ より、$d = u_{(1)} + b_{(1)}$ ($u_{(1)} \in k \setminus 0$、$b_{(1)} \in \mathfrak{m}_B$) となる。もし $b_{(1)} = 0$ であれば $b = da = u_{(1)}a \in \mathfrak{m}_A$ であり証明終了。$b_{(1)} \neq 0$ であれば、$b \neq 0$ に対する上述の議論を $b_{(1)}$ に適用して、$b_{(1)} = a_{(1)}d_{(2)}$ なる $a_{(1)} \in \mathfrak{m}_A$ および $d_{(2)} \in B^\times$ が存在するこ

とがわかる。また上と同様にして $d_{(2)} = u_{(2)} + b_{(2)}$ なる $u_{(2)} \in k \setminus 0$ および $b_{(2)} \in \mathfrak{m}_B$ が存在するから：

$$\begin{aligned} b &= ad \\ &= au_{(1)} + ab_{(1)} \\ &= au_{(1)} + aa_{(1)}d_{(2)} \\ &= au_{(1)} + aa_{(1)}u_{(2)} + aa_{(1)}b_{(2)} \end{aligned}$$

となる。ここで最後の項 $aa_{(1)}b_{(2)}$ 以外は全て $\mathfrak{m}_A$ に属すことに注意。この議論を $b_{(i)} \in \mathfrak{m}_B$ に対して続けると：

$$\begin{aligned} b = \; & au_{(1)} + aa_{(1)}u_{(2)} + \cdots \\ & + aa_{(1)}a_{(2)} \cdots a_{(N-2)}u_{(N-1)} + aa_{(1)}a_{(2)} \cdots a_{(N-2)}b_{(N-1)} \end{aligned}$$

となる。しかし $\mathfrak{m}_A \subseteq \mathfrak{m}_B$ であり $\mathfrak{m}_B^N = 0$ だったから、この最後の項は 0 である。それ以外の項は $\mathfrak{m}_A$ の元であるから、結局 $b \in \mathfrak{m}_A$ が得られた。 □

一般の場合は local な場合への還元で得られる：

Lemma 3. *Let k be algebraically closed; A, B be k-algebras; and $f : A \to B$ be a k-algebra morphism such that $f^* : \mathrm{F}(B) \to \mathrm{F}(A)$ is an isomorphism of sets. Then f is an isomorphism of k-algebras.*

Proof. A, B が有限次であるから、local な k 代数 $(A_i, \mathfrak{m}_{A_i})$ および $(B_j, \mathfrak{m}_{B_j})$ $(1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M)$ が存在し：

$$A \simeq \prod_{i=1}^{N} A_i \quad \text{および} \quad B \simeq \prod_{j=1}^{M} B_j$$

となる。今 $f^* : \mathrm{F}(B) \to \mathrm{F}(A)$ は bijective であり包含関係による順序を保つから、B の極大イデアル $\mathfrak{m}_{B_j}$ たちは f^* によって A の極大イデアルたち $\mathfrak{m}_{A_i}$ に bijective に移る。特に $N = M$ であり、一般性を失うことなく $f^*\mathfrak{m}_{B_i} = \mathfrak{m}_{A_i}$ として良い $(1 \leq i \leq N)$。また：

$$\mathrm{F}(A) = \coprod_{i=1}^{N} \mathrm{F}(A_i) \quad \text{および} \quad \mathrm{F}(B) = \coprod_{i=1}^{N} \mathrm{F}(B_i)$$

が成り立ち、$f^* : \mathrm{F}(B) \to \mathrm{F}(A)$ は局所的に $f^* : \mathrm{F}(B_i) \to \mathrm{F}(A_i)$ に制限されるので、上で示した local な場合の Lemma から同型 $A_i \simeq B_i$ を得る。このことから $f : A \to B$ が同型であることが従う。 □

これらの Lemma から所望の命題 1 が従う。

4 観察

ここでは、上記で定義した $\mathrm{F} : \mathbf{Alg}_f(k)^{op} \to \mathbf{Sets}$ やその安直な制限では、(galois 圏でないような)semigalois 圏にはなり得ないことを観察する。まず以下で見るように $\mathrm{F} : \mathbf{Alg}_f(k)^{op} \to \mathbf{Sets}$ は exact ではないため (また $\mathrm{F}(A)$ は一般には有限集合ですらない) ため、残念ながら $\langle \mathbf{Alg}_f(k)^{op}, \mathrm{F} \rangle$ 自身は semigalois 圏にはならない。特に F は直積を保たない (直和は保つ)。この事実は次の簡単な例によってわかる。

Example 1. $A = B = \mathbb{C}[x]/(x^2)$ とおく。この時 $A \otimes B = \mathbb{C}[x,y]/(x^2, y^2)$ である。任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対してイデアル $(\alpha x + \beta y)$ は準素イデアルであり、この形の準素イデアルは原点 $(0,0)$ を通る直線分だけ存在する。よって $\mathrm{F}(A \otimes B)$ は無限集合。一方、$\mathrm{F}(A) = \mathrm{F}(B) = \{(x), 0\}$ であるため、$\mathrm{F}(A) \times \mathrm{F}(B)$ は 4 点からなる有限集合。よって $\mathrm{F}(A \otimes B) \not\simeq \mathrm{F}(A) \times \mathrm{F}(B)$。

この例も示すように、$\mathrm{F}(A)$ は一般には有限集合ですらない。では $\mathrm{F}(A)$ が有限である対象からなるような $\mathbf{Alg}_f(k)^{op}$ の部分圏に制限すれば semigalois 圏になるだろうかと疑問が湧くが、残念ながらそれも不可能である。実際、上の例よりもう少し踏み込んで次のことがわかる。(以下の命題も上で示した命題 1 と同様、それ自体は重要ではなく、「これらの構成が、なぜ semigalois 圏になり損ねているのか」の観察のために、証明とともに記載する。)

Proposition 2. *$\mathrm{F}(A)$ is finite if and only if $\bar{A}$ is of the form $\prod_{i=1}^{n} \bar{k}[x]/(x^{e_i})$ for $e_i \geq 0$.*

Proof. if 部分は明らか。only if 部分を示す。A が local として示せば十分。この時 $\bar{A}$ も local で、$\mathfrak{m}$ を唯一の極大イデアルとする。まず仮に、$\dim_{\bar{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq 2$ として矛盾を導く。この時、一次独立な 2 元 $x, y \in \mathfrak{m}$ が存在して、$\alpha, \beta \in \bar{k}$ に対して $(\alpha x + \beta y)$ なる形のイデアルを考えると無数にあるので、$\mathrm{F}(A)$ が有限という仮定に矛盾。よって $\dim_{\bar{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$ を得る。$\dim_{\bar{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 0$ の時は、$\mathfrak{m} = 0$ であるから $\bar{A} = \bar{k}$。$\dim_{\bar{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ の時、$\bar{A}$ は artin 局所環であるので $\mathfrak{m}$ は単項イデアルで、$\mathfrak{m} = (x)$ とすると、$\bar{A}$ のイデアルは (x^k) の形となる。$\mathfrak{m}$ はべき零であるので $\mathfrak{m}^e = 0$ とするとき、$\bar{A} \simeq \bar{k}[x]/(x^e)$ となることをみる。まず $\bar{A}/\mathfrak{m} \simeq \bar{k}$ は良い。これより $\bar{A} = \bar{k} \oplus \mathfrak{m}$ を得る。$\phi : \bar{k}[x]/(x^e) \to \bar{A}$ の自然な射があり、単射であることは容易にわかる。各 $0 \leq k \leq e-1$ で $\dim_{\bar{k}} \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1} = 1$ 及び $\mathfrak{m}^e = 0$ より、全ての $a \in \bar{A}$ が $a = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_{e-1} x^{e-1}$ $(u_i \in \bar{k})$ と表せることもわかり、ϕ は全射。よって同型 $\bar{k}[x]/(x^e) \simeq \bar{A}$。 □

これらの議論から特に、$\mathrm{F}(A)$ が有限である A だけから成る $\mathbf{Alg}_f(k)^{op}$ の full subcategory を考えて semigalois 圏にしようとしても、そのような full subcategory は、$\mathbf{Et}_f(k)^{op}$ 及びその full subcategory に限ること (上の記号では $e_i = 0$ である場合に限ること) が従う。つまりそれは必然的に galois 圏でしかない：

Corollary 1. *A full subcategory $\mathscr{C} \subseteq \mathbf{Alg}_f(k)^{op}$ forms a semigalois category together with the restriction of $\mathrm{F} : \mathbf{Alg}_f(k)^{op} \to \mathbf{Sets}$ if and only if $\mathscr{C}$ is in fact a semigalois full subcategory of $\mathbf{Et}_f(k)^{op}$. In particular $\langle \mathscr{C}, \mathrm{F} \rangle$ is necessarily a galois category.*

したがって、古典的な galois 圏の構成から安直に (対象の)étaleness を落とすというやり方では、galois 圏でない semigalois 圏は構成できない。

上の命題 2 から $\mathrm{F}(A)$ が有限となるのは、A が一元生成の時 $A = k[x]/(f(x))$ ということになるが、例 1 で見たようにそれらの積を取ると直ちに F の像が有限でなくなる。あくまで informal な感覚に過ぎないが、これはどことなく「k 代数の和の構造 (線形構造)」が原因であるように思わせるものがある：実際、F が積を保たなかった原因はある意味、$(\alpha x + \beta y)$ というような「線形な」情報まで拾ってしまうことに起因している。(一般に $\mathrm{F}(A) \times \mathrm{F}(B)$ よりも $\mathrm{F}(A \otimes B)$ の方が大きい (標準的な射 $\mathrm{F}(A) \times \mathrm{F}(B) \to \mathrm{F}(A \otimes B)$ が存在する) が、$\otimes$ が線形な k 上のテンソル積であるため、$\mathrm{F}(A \otimes B)$ は $(\alpha x + \beta y)$ のような余分な準素イデアルを含んでしまう[2]。) したがって、semigalois 圏の構成にはこの種の線形性を排除したような離散的な対象を考えなくてはならない。

一方、上で観察した命題 1 は、semigalois 圏の構成にこそ使えないものであるが、古典的なファイバー関手と同様の剛性を示すものであることは確かである。この現象を正しく理解するためには、おそらく $\mathrm{F} : \mathbf{Alg}_f(k)^{op} \to \mathbf{Sets}$ は本当は $\mathrm{F} : \mathbf{Alg}_f(k)^{op} \to \mathbf{Posets}$ の関手とみなすべきものなのかもしれない。ただし $\mathbf{Posets}$ は順序集合と順序を保つ写像のなす圏で、$\mathrm{F}(A)$ には準素イデアルの包含関係による順序を込めて $\mathbf{Posets}$ の対象と見る。実際、有限集合 ($\mathbf{sets}$ の対象) は離散順序集合 (順序が自明な順序集合) であるため、$\mathbf{sets}$ は $\mathbf{Posets}$ の full subcategory とみなせるが、$\mathbf{Alg}_f(k)$ のうち $\mathbf{Et}_f(k)$ の対象は、$\mathrm{F}(A)$ が離散順序集合であるものとして自然に特徴付けられる：

Proposition 3. *A k-algebra $A \in \mathbf{Alg}_f(k)$ belongs in $\mathbf{Et}_f(k)$ if and only if $\mathrm{F}(A) \in \mathbf{Posets}$ belongs in $\mathbf{sets}$, i.e. is a discrete poset.*

---

[2]仮に k 代数 A, B の和の構造を忘れて可換モノイドとした時に可換モノイドのテンソル積を考えると、このようなイデアルは現れない。しかしそのような可換モノイドからなるような圏と準素イデアルのモノイド類似による関手の組みとして semigalois 圏を構成しようとすると、今度はその関手が同型を反映することが証明できなくなる。実際、命題 1 ($\mathrm{F} : \mathbf{Alg}_f(k)^{op} \to \mathbf{Sets}$ が同型を反映すること) の証明では、(証明中の記号で) $\mathfrak{m}_B$ の元を $\mathfrak{m}_A$ の元で近似して行く際に和の構造を使わなくてはならない。つまり和の構造を含める (k 代数の) 場合と含めず積構造だけ考える (可換モノイドの) 場合とでは、微妙なトレードオフがある。

したがって上で観察した命題 1 自身は、semigalois 圏 (有限集合 $\mathbf{sets}$/有限離散順序集合) で捉えられる剛性ではなく、別の (より一般の poset 的な) 剛性とみなすべきものなのかもしれない。ただし $\mathrm{F} : \mathbf{Alg}_f(k)^{op} \to \mathbf{Posets}$ は、古典的なファイバー関手 $\mathrm{F} : \mathbf{Et}_f(k)^{op} \to \mathbf{sets}$ とは異なり、faithful ではない (一般には $f, g : A \to B$ に対して $f^* = g^* : \mathrm{F}(B) \to \mathrm{F}(A)$ であっても、f と g の間にはちょっとした誤差がありうる)。

参考文献

[1] T. Uramoto. Semi-galois Categories I: The Classical Eilenberg Variety Theory. In Proc. LICS'16, pp.545–554.

[2] T. Uramoto. Semi-galois Categories I: The Classical Eilenberg Variety Theory (extended version of [1]). arXiv:1512.04389v4.