数理解析研究所講究録
第2053巻 2017年 43-47

Rudvalis graph の幾何性について

中空 大幸
Hiroyuki Nakasora
千葉大学大学院 理学研究科 堀口 直之
Naoyuki Horiguchi
Graduate School of Science,
Chiba University

1 概要

graph の幾何性とは, 与えられた pseudo-geometric graph が geometric かどうかの別を意味する。graph の幾何性に関して一般的な解決は知られておらず, 個々の graph に対しての研究がなされている段階である。散在型単純群 McLaughlin group の rank 3 graph の幾何性については長く未解決問題として知られていたが [4], 2016 年に geometric でないという結果のプレプリントが発表された [3]。これを知り, 他の未解決な graph について調べてみようと思ったのが本稿における研究のきっかけである。

本稿では問題の定義, 幾何性の判定に用いられる基本的な必要条件について述べ, 散在型単純群, およびそれらに関連したいくつかの pseudo-geometric graph の幾何性について知られている情報をまとめた。また, 未解決であった Rudvalis graph の幾何性を計算機を用いて判定した。

2 定義

点集合 $\mathcal{P}$ と直線集合 $\mathcal{L}$ の組 $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ が partial geometry $pg(s,t,\alpha)$ であるとは

(1) $\mathcal{P}$ は有限集合である。

(2) $\mathcal{L}$ は $\mathcal{P}$ の $s+1$ 点部分集合の族である。

(3) 任意の点はちょうど $t+1$ 個の直線に含まれる。

(4) 任意の 2 個の直線が共通に含む点の個数は 0 か 1 である。

(5) 任意の $l \in \mathcal{L}$ と任意の $p \in \mathcal{P} \setminus l$ に対して p を含み l と共通に含む点の個数が 1 である直線はちょうど α 個である。

がすべて成り立つことをいう。

Remark 2.1. このとき

$$|\mathcal{P}| = \frac{(s+1)(st+\alpha)}{\alpha}, |\mathcal{L}| = \frac{(t+1)(st+\alpha)}{\alpha}$$

が成り立つ。

組 $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ が partial geometry $pg(s,t,\alpha)$ であるとき, graph Γ の頂点集合を $\mathcal{P}$ とし, 異なる 2 点 $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ に対してこれらをともに含む直線が存在するときに p_1, p_2 は adjacent であると定めると, Γ はパラメータ

$$\left(\frac{(s+1)(st+\alpha)}{\alpha}, (t+1)s, s-1+t(\alpha-1), (t+1)\alpha\right)$$

をもつ strongly regular graph である。この graph を partial geometry $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ の point graph という。

上のパラメータをもつ strongly regular graph を pseudo-geometric graph といい, また, partial geometry の point graph となっている pseudo-geometric graph を geometric graph という。

与えられた pseudo-geometric graph が geometric かどうか, すなわち, その graph が point graph になるような partial geometry が存在するかどうかの判定が本稿で扱う問題である。

3 必要条件

pseudo-geometric graph が geometric であるための基本的な必要条件について述べる。以降, この節では $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ を partial geometry $pg(s,t,\alpha)$ とし, Γ を $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ の point graph とする。次の命題は定義より明らかである。

Proposition 3.1. (1) $s+1>\alpha$ かつ $t+1>\alpha$

(2) $|\mathcal{L}| \in \mathbb{Z}$

point graph の clique について考える。clique とは graph の頂点集合の部分集合で, そのうちのどの 2 頂点も adjacent なもののことである。ある graph の clique のうち最大の大きさのものを maximum clique と呼ぶ。strongly regular graph のパラメータと maximum clique の大きさの関係として次が知られている。

Theorem 3.2. *(Hoffman bound)* $\Gamma = (V,E)$ をパラメータ (v,a,c,d) を持つ *strongly regular graph,* C を Γ の *maximum clique,* μ を Γ の最小の固有値とする。このとき,

$$|C| \leq 1 - \frac{a}{\mu}$$

が成り立つ。

Table 1: Geometricity of the sporadic rank 3 graphs

Groups	(v,a,c,d)	(s,t,α)	Geometricity
$L_3(4)$	$(56,45,36,36)$	$(15,2,12)$	No(3.1(1))
M_{22}	$(77,60,47,45)$	$(20,2,15)$	No(3.1(1))
$U_3(5)$	$(50,42,35,36)$	$(14,2,12)$	No(3.1(1))
$U_3(5)$	$(175,72,20,36)$	$(4,17,2)$	Yes[1]
J_2	$(100,63,38,42)$	$(9,6,6)$	No(3.4(2))
McL	$(275,112,30,56)$	$(4,27,2)$	No[3]
$G_2(4)$	$(416,315,234,252)$	$(15,20,12)$	?
Suz	$(1782,1365,1044,1050)$	$(65,20,50)$	No(3.1(1))
Fi_{23}	$(31671,28160,25000,25344)$	$(80,351,72)$	?
$2^{11}:M_{24}$	$(2048,1288,792,840)$	$(23,55,15)$	No(3.1(2))
M_{24}	$(1288,792,476,504)$	$(22,35,14)$	?
Ru	$(4060,1755,730,780)$	$(27,64,12)$	?
$2^{11}:M_{24}$	$(2048,276,44,36)$	$(23,11,3)$	No(3.4(2))
Fi_{22}	$(14080,10920,8408,8680)$	$(39,279,31)$	?
Fi_{23}	$(137632,28431,6030,5832)$	$(351,80,72)$	?
Fi_{23}	$(137632,109200,86600,86800)$	$(390,279,310)$	No(3.1(1))

この定理を partial geometry $pg(s,t,\alpha)$ の point graph に適用すると clique の大きさは $s+1$ 以下であることがわかるが, partial geometry の直線は定義から明らかにその point graph の大きさ $s+1$ の clique である。よって次の命題を得る。

Proposition 3.3. $\mathcal{C}$ を Γ の大きさ $s+1$ の *clique* 全体の集合とすると $\mathcal{L}\subset\mathcal{C}$ である。

ただちに次の系を得る。

Corollary 3.4. (1) $\mathcal{C}\neq\phi$ である。

(2) $|C_1\cap C_2|=1$ となる $C_1,\ C_2\in\mathcal{C}$ が存在する。

以上より Proposition 3.1 (1), (2), Corollary 3.4 (1), (2) のいずれかを満たさない graph は geometric でないことがわかる。

Table 1 はいくつかの散在型単純群, およびそれらに関連した群の rank 3 graph の幾何性についてまとめたものである [2, Appendix]。(v,a,c,d) は strongly regular graph のパラメータ, (s,t,α) は graph が geometric であるときの partial geometry のパラメータを表わす。Geometricity の '?' は幾何性が判明していない graph であることを表わしている。

Table 2: Orbits of the action of Ru_{C_1} on $\mathcal{C}$

Length	1	28	672	896	2688	3584	4096	10752	14336
Intersection	28	12	4	0	0	0	0	2	0

Length	14336	28672	43008	43008	57344	86016	114688
Intersection	0	0	0	0	1	0	0

4 Rudvalis graph の幾何性

この節では Rudvalis graph が geometric でないことを計算機を用いて maximum clique を観察することによって証明する。

Rudvalis graph とは, 散在型単純群の一つである Rudvalis group Ru を全自己同型群の指数 2 の部分群として含む strongly regular graph である。そのパラメータは $(4060, 1755, 730, 780)$ であるので, Rudvalis graph は pseudo-geometric graph であり, これが geometric ならば partial geometry $pg(27, 64, 12)$ の point graph である。以降, この節では Λ を Rudvalis graph とする。また, Λ は geometric であり, partial geometry $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ の point graph であると仮定する。

Theorem 3.2 より Λ の clique の大きさは 28 以下であることがわかる。$\mathcal{C}$ を Λ の大きさ 28 の clique 全体の集合とすると, 命題 3.3 より $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$ である。$\mathcal{C}$ に関して次が成り立つことが知られている。

Lemma 4.1. Λ の大きさ 28 の *clique* は Ru での移りあいを除いて一意的に存在する。

よって, $C_1 \in \mathcal{C}$ を任意にとり固定して $C_1 \in \mathcal{L}$ としてよい。

Table 2 は $\mathcal{C}$ を固定部分群 Ru_{C_1} で軌道分解した結果である。Length は各軌道の長さ, Intersection は各軌道に含まれる clique と C_1 の共通部分の大きさを表わす。共通部分の大きさが 1 である軌道が一つしかないことから次の Lemma を得る。

Lemma 4.2. Λ の大きさ 28 の *clique* で C_1 との共通部分が 1 点であるものは Ru_{C_1} での移りあいを除いて一意的に存在する。

よって, $|C_1 \cap C_2| = 1$ となる $C_2 \in \mathcal{C}$ を任意にとり固定して $C_2 \in \mathcal{L}$ としてよい。$C_1 \cap C_2 = \{x_0\}$ とおき $\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C} : C_1 \cap C = C_2 \cap C = \{x_0\}\}$ とおく。

Lemma 4.3. $x_1 \in C_1 \setminus \{x_0\}$, $x_2 \in C_2 \setminus \{x_0\}$ が *graph* Λ において *adjacent* であるとき次が成り立つ。

(1) $C_1 \cap C' = \{x_1\}$ かつ $C_2 \cap C' = \{x_2\}$ であるような $C' \in \mathcal{L}$ が存在する。

(2) どの 2 個も共通部分は $\{x_0\}$ であり, $C_3, C_4, \ldots, C_{12}$ のいずれも C' との共通部分は 1 点であり, $C_{13}, C_{14}, \ldots, C_{65}$ のいずれも C' との共通部分は ϕ であるような 63 個の *clique* $C_3, C_4, \ldots, C_{65} \in \mathcal{C}_0$ が存在する。

Proof. (1) point graph の定義から明らかである。

(2) partial geometry の定義から $\{x_0\}$ を含む直線が 65 本あること, そのうち 12 本が C' と 1 点の共通部分をもつこと, それ以外の 53 本は C' と共通部分をもたないことがわかる。これらを $C_1, C_2, \ldots, C_{65}$ とおけばよい。

□

adjacent である $x_1 \in C_1 \backslash \{x_0\}$, $x_2 \in C_2 \backslash \{x_0\}$ のとり方は一意的ではないが, Lemma 4.3 (1), (2) をともに満たす C', $C_3, C_4, \ldots, C_{65}$ が存在しないような x_1, x_2 が存在することを計算機を用いて確かめた。よって, 次の結果を得た。

Theorem 4.4. *Rudvalis graph は geometric ではない*。

References

[1] W. Haemers, A new partial geometry constructed from the Hoffman-Singleton graph, in "*Finite geometries and designs (Proc. Conf., Chelwood Gate, 1980)*", pp 119–127, Cambridge, 1981.

[2] N. Horiguchi, M. Kitazume and H. Nakasora, On the maximum cocliques of the rank 3 graph of $2^{11}:M_{24}$, *J. Combin. Designs*, **17** (2009), 323–332.

[3] P. R. J. Östergård and L. H. Soicher, Threr is no McLaughlin geometry, arXiv:1607.03372, Jul 2016.

[4] L. H. Soicher, Is there McLaughlin geometry?, *J. Algebra*, **300** (2006), 248–255.