数理解析研究所講究録
第2053巻 2017年 80-84

Centers and defect groups of blocks of finite groups

千葉大学大学院理学研究科　　音喜多 純拓
Yoshihiro Otokita
Graduate School of Science,
Chiba University

序論

本稿は RIMS 研究集会「有限群・代数的組合せ論・頂点作用素代数の研究」(2016 年 12 月) における講演内容の解説，要約である．

本研究では群環の中心の代数的構造について，その Loewy 構造を用いて考察する．以下では G を有限群，F を素数標数 $p>0$ を持つ代数的閉体とする．このとき群環 FG の両側イデアルとしての直既約因子を"FG のブロック"という．各ブロック B に対し，その"不足群"と呼ばれる p-群が定義される．有限群のモジュラー表現論において「ブロック B の代数的構造と不足群 δ_B の群論的性質の関係を解明する」という問題が考えられている．例えば δ_B が自明なときや巡回群の場合などは B の構造がよく知られている．本研究では上の問題から派生する「ブロックの中心 ZB と δ_B の関係」について考える．例えば Brauer 予想は G の通常既約指標の個数に関する予想だが，これは「$\dim_F ZB \leq |\delta_B|$ だろうか？」という ZB の次元と δ_B の位数に関する予想に言い換えることができる．本稿では ZB を考察する手段として，その Loewy length，すなわち ZB の Jacobson 根基 JZB のべき零指数 $\mathrm{ll}ZB$ を用いる．Okuyama [11] は $\mathrm{ll}ZB$ の上限が $|\delta_B|$ で与えられることを述べた．一般に $\mathrm{ll}ZB \leq \dim_F ZB$ であるから，Brauer 予想が正しければ，Okuyama の結果はこの系として得られる．本研究の目的はこの不等式の精密化である．不足群 δ_B が巡回群，および可換群のときは，それぞれ Koshitani-Külshammer-Sambale [6], Külshammer-Sambale [8] によって良い上限が与えられているので，本稿では非巡回群，および非可換群の場合について述べる．

ここで本稿で用いる記号，表記を述べる．G の共役類全体の集合を $\mathrm{Cl}(G)$ とする．各 $C \in \mathrm{Cl}(G)$ に対し，その class sum $C^+ := \sum_{g\in C} g$ が FG の元として定義される．また $g \in C$ の中心化群 $C_G(g)$ の Sylow p-部分群の 1 つ δ_C を固定し，"C の不足群"と呼ぶ (これは $g \in C$ の選び方に依らない)．整数 $m, n \geq 1$ に対し，位数 m の巡回群を $\mathbb{Z}_m$，2 つの巡回群の直積を $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ とする．

1 有限群のブロック

本章ではまず有限群のブロックの定義を示す．序論で述べた通り，G を有限群，F を素数標数 $p>0$ を持つ代数的閉体とし，それらから構成される群環を FG とする．

定義 1.1. 群環 FG は以下のように分解できる:

$$FG = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m.$$

ここで各 $B_1, \ldots, B_m$ は両側イデアルとして直既約である．このとき各直和因子 $B_1, \ldots, B_m$ を FG のブロッ

クという．この分解には FG の単位元 e の中心的原始べき等元への分解

$$e = e_1 + \cdots + e_m$$

が対応し，$B_i = FGe_i$ を満たす．

次に各ブロックに対して，その不足群を定義する．FG の中心 ZFG は class sum 全体を F 上の基底に持つことが知られている:

$$ZFG = \bigoplus_{C \in \mathrm{Cl}(G)} FC^+.$$

FG のブロック B に対し，対応する中心的原始べき等元を e_B とすると，これは ZFG の元であるから

$$e_B = \sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} \beta_C \cdot C^+ \tag{1.1}$$

となる $\beta_C \in F$ が存在する．このとき次を満たす $C \in \mathrm{Cl}(G)$ が存在する．

補題 1.2 ([10, V, Lemma 1.7])**.** (1.1) の表示に対し，次の 2 条件を満たす $C \in \mathrm{Cl}(G)$ が存在する．

(1) $\beta_C \neq 0$.
(2) $\beta_{C'} \neq 0$ となる任意の $C' \in \mathrm{Cl}(G)$ に対して，δ_C は $\delta_{C'}$ のある G-共役を含む．

（2）より上の条件を満たす δ_C は G-共役を除いて一意的に定まる．その 1 つを δ_B と書き，"B の不足群" という．序論で述べたようにブロック B とその不足群 δ_B には代数的な関係性があると考えられている．例えば次が成り立つ．

定理 1.3 ([10, III, Theorem 6.37])**.** 以下は同値である．

(1) $\delta_B = 1$.
(2) B は単純環である．

不足群が巡回群の場合には次が成り立つ．

定理 1.4 (Rickard [15])**.** 不足群 δ_B が巡回群ならば，ある $\mathrm{Aut}(\delta_B)$ の p'-部分群 $\mathbb{Z}_l$（すなわち $\mathbb{Z}_{p-1}$ の部分群）が存在し，B と $F[\delta_B \rtimes \mathbb{Z}_l]$ が導来同値となる．

この他，$\delta_B \simeq \mathbb{Z}_{2^m} \times \mathbb{Z}_{2^n}$ の場合も B の構造が決定されている (Erdmann [3], Eaton-Kessar-Külshammer-Sambale [2])．

2 ブロックの中心

本研究の目的はブロック B の中心 ZB を考察することである．まず次の基本的な性質を確認する．

命題 2.1. ブロックの中心 ZB は局所環である．

上の命題から Jacobson 根基 JZB は ZB のただ 1 つの極大イデアルである．ここで ZB の Loewy length を定義する．

定義 2.2. JZB のべき零指数を $\mathrm{ll}ZB$ とする．すなわち，

$$\mathrm{ll}ZB := \min\{n \geq 1 \mid JZB^n = 0\}.$$

この定義を用いると定理 1.3 を ZB に関する条件で表せる．

定理 2.3. 以下は同値である.

(1) $\delta_B = 1$.
(2) $ZB \simeq F$.
(3) $\mathrm{ll}ZB = 1$.

本研究の動機は Okuyama [11] による次の結果であった.

定理 2.4 (Okuyama [11]). B を FG のブロック，δ_B をその不足群とすると，$\mathrm{ll}ZB \le |\delta_B|$.
また以下は同値である.

(1) $\mathrm{ll}ZB = |\delta_B|$.
(2) B はべき零ブロックで δ_B は巡回群.

ここでは"べき零ブロック"の定義には言及しないが，上の（1），（2）は「B は位数 $|\delta_B|$ の巡回群の群環と森田同値である」という条件と同値となる（Broué-Puig [1], Puig [14] 参照). このとき $n = |\delta_B|$ とすると ZB は $F[X]/(X^n)$ と同型になる.

本研究では「不足群 δ_B の群論的性質を用いて，不等式 $\mathrm{ll}ZB \le |\delta_B|$ を精密化できるか？」という問題を考えた. 例えば δ_B が巡回群，可換群の場合は次の結果がある.

定理 2.5 (Koshitani-Külshammer-Sambale [6]). δ_B が巡回群のとき，

$$\mathrm{ll}ZB = \frac{|\delta_B| - 1}{l} + 1 \le |\delta_B|.$$

ここで l は定理 1.4 によって定まる整数 $1 \le l \le p-1$ である.

定理 2.6 (Külshammer-Sambale [8]). δ_B が $(p^{a_1}, \ldots, p^{a_r})$ 型の可換群のとき，

$$\mathrm{ll}ZB \le p^{a_1} + \cdots + p^{a_r} - r + 1 \le |\delta_B|.$$

ここで $\mathrm{ll}ZB$ に関する 1 つの予想を述べたい. そのために有限 p-群 P の群環 FP の Loewy length を考える. このとき FP は局所環であり，したがって ZB と同様ただ 1 つの極大イデアル JFP を持つ. FP の Loewy length，すなわち JFP のべき零指数を Wallace[16] に従って $t(P)$ と書くことにする:

$$t(P) := \min\{n \ge 1 \mid JFP^n = 0\}.$$

P の構造を用いて $t(P)$ を計算する方法が Jennings[4] によって与えられているが，準備を要するのでここでは省略する. $t(P)$ の基本的な性質は次の命題である.

命題 2.7 (Wallace [16]). $|P| = p^n$ のとき，$n(p-1)+1 \le t(P) \le p^n$.

ここで P が $(p^{a_1}, \ldots, p^{a_r})$ 型の可換群の場合を考える. すると Motose[9] より，

$$\begin{aligned} t(P) &= t(\mathbb{Z}_{p^{a_1}}) + \cdots + t(\mathbb{Z}_{p^{a_r}}) - r + 1 \\ &= p^{a_1} + \cdots + p^{a_r} - r + 1. \end{aligned}$$

よって定理 2.6 に基づいて次を予想できる. この予想は Külshammer-Sambale[8] でも言及されている.

予想 2.8. 任意のブロック B に対して，$\mathrm{ll}ZB \le t(\delta_B)$ だろうか？

上の予想はすでにいくつかの場合で確かめられている（Külshammer-Sambale[8], Otokita[12]).

3 主結果

前章の定理 2.5, 2.6 より，不足群 δ_B が非巡回群，および非可換群の場合が次の研究対象となる．本研究ではその主結果として次を得た．

定理 3.1 (Otokita [13]). B を FG のブロックとし，その不足群 δ_B の位数を p^d とする．このとき次が成り立つ．

(1) δ_B が非巡回群のとき，

$$\mathrm{ll}ZB \leq p^{d-1} + p - 1.$$

(2) δ_B が非可換群のとき，

$$\mathrm{ll}ZB < p^{d-1}.$$

予想 2.8 が正しければ上の（1）はその系として導くことができる (Koshitani[5] 参照).

さて，講演で述べた主結果は以上であるが，最近新たな結果を得たので最後にそれについて述べたい．

定理 3.2 (Külshammer-Otokita-Sambale [7]). 用いる記号は定理 3.1 と同様とする．δ_B が非可換群のとき，次のいずれかが成り立つ．

(1) $\mathrm{ll}ZB < 3p^{d-2}$.

(2) $p \geq 5$,

$$\delta_B \simeq < x, y, z \mid x^{p^{d-2}} = y^p = z^p = [x, y] = [x, z] = 1, [y, z] = x^{p^{d-3}} >$$

で $\mathrm{ll}ZB < 4p^{d-2}$.

上の（1），（2）いずれの場合も $\mathrm{ll}ZB < \min\{p^{d-1}, 4p^{d-2}\}$ を満たす．

参考文献

[1] M. Broué, L. Puig, *A Frobenius theorem for blocks*, Invent. Math. **56** (1980), 117–128.

[2] C. Eaton, R. Kessar, B. Külshammer, B. Sambale, *2-blocks with abelian defect groups*, Adv. Math. **254** (2014), 706–735.

[3] K. Erdmann, *Blocks whose defect groups are Klein four groups: a correction*, J. Algebra **76** (1982), 505–518.

[4] S. A. Jennings, *The structure of the group ring of a p-group over a modular field*, Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 175–185.

[5] S. Koshitani, *On the nilpotency indices of the radicals of group algebras of p-groups which have cyclic subgroups of index p*, Tsukuba J. Math. 1 (1977), 137–148.

[6] S. Koshitani, B. Külshammer, B. Sambale, *On Loewy lengths of blocks*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **156** (2014), 555–570.

[7] B. Külshammer, Y. Otokita, B. Sambale, *Loewy lengths of centers of blocks II*, arXiv:1703.01917v1.

[8] B. Külshammer, B. Sambale, *Loewy lengths of centers of blocks*, arXiv:1607.06241v2.

[9] K. Motose, *On C. Loncour's results*, Proc. Japan Acad. **50** (1974), 570–571.

[10] H. Nagao, Y. Tsushima, *Representations of finite groups*, Academic Press Inc., Boston, MA (1989).

[11] T. Okuyama, *On the radical of the center of a group algebra*, Hokkaido Math. J. **10** (1981), 406–408.

[12] Y. Otokita, *Characterizations of blocks by Loewy lengths of their centers*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[13] Y. Otokita, *On centers of blocks with non-cyclic defect groups*, arXiv:1611.06058v1.

[14] L. Puig, *Nilpotent blocks and their source algebras*, Invent. Math. **93** (1988), 77–116.

[15] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), 303–317.

[16] D. A. R. Wallace, *Lower bounds for the radical of the group algebra of a finite p-soluble group*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **16** (1968/69), 127–134.