数理解析研究所講究録
第2053巻 2017年 111-118

群環の表現加群のヴァーテックスと Auslander-Reiten 連結成分について

名古屋市立大学　河田成人

Shigeto Kawata
Nagoya City University

G は有限群で，p は G の位数を割り切る素数とする．$(K, \mathcal{O}, k)$ を p-モジュラー系とする．即ち，$\mathcal{O}$ は離散乗法付値 ν を持つ完備離散付値環でその唯一の極大イデアル $J(\mathcal{O})$ は π で生成されており（$\pi\mathcal{O} = J(\mathcal{O})$），剰余体 $k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ の標数は p であり，K は $\mathcal{O}$ の商体で標数は 0 であるとする．R で $\mathcal{O}$ または k を表し，RG によって群 G の係数環 R 上の群環を表す．R の完備性から，有限生成 RG-加群について Krull-Schmidt-Azumaya の定理（直既約分解の一意性）が成り立つ．なお，RG 上の表現加群（RG-lattice）とは，R 上有限生成で自由な（右）RG-加群を意味するものとする．K の標数が 0 であることから KG-加群は全て半単純，すなわち射影的であるので，$\mathcal{O}G$-表現加群のなす圏において概分裂列（almost split sequence）や Auslander-Reiten 有向グラフを考えることができる．さらにここでは，$(K, \mathcal{O}, k)$ は“十分に大きい”と仮定する．正確には次の条件 (#) を満たしているとする：

(#)　$(K, \mathcal{O}, k)$ はある p-モジュラー系 $(K', \mathcal{O}', k' = \mathcal{O}'/\pi'\mathcal{O}')$ の拡大であって，$k' = k = \overline{k}$ は代数閉体であり，ν の ν' 上の分岐指数は 3 以上（即ち $\pi' \in \pi^3\mathcal{O}$）である．

群環 RG を直既約な両側イデアルの直和に分解したとき

$$RG = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$$

の各直既約因子 B_i （$1 \leq i \leq n$）を RG のブロックと呼ぶ．このとき，ある中心的原始冪等元 e_i $(= e_i^2 \in Z(RG))$ が存在して $B_i = (RG)e_i$ と書ける．直既約な RG-表現加群 L は，実質的にはあるブロック B_i 上の表現加群である（$L = Le_i$）．このことを強調したいときは，L を B_i-表現加群と呼ぶことにし，「L は B_i に属する」と言う．有限群の表現にまつわる用語について詳しくは永尾-津島の本 [NT] を参照して下さい．

H を G の部分群とする．RH-加群 W に対し，誘導された RG-加群を $W{\uparrow}^G$ で表す：$W{\uparrow}^G = W \otimes_{RH} RG$．また，$RG$-加群 V に対し，作用を H に制限して RH-加群とみなしたものを $V{\downarrow}_H$ と書く．

RG-加群 V が次の性質を持つとき，V は **H-射影的**であるという：

> RG-加群の完全列 $U \longrightarrow V \longrightarrow 0$ が RH-加群の完全列と見て分裂しているならば，RG-加群の完全列としても分裂している．

特に，RG-表現加群 V が $\{1\}$-射影的であるとは，V が射影的であることを意味する．直既約 RG-加群 V に対し，G の部分群の集合

$$\{H \leq B \mid V:\ H\text{-射影的}\}$$

の極小部分群を V のヴァーテックスと呼び，$\mathrm{vx}(V)$ で表す．$\mathrm{vx}(V)$ は共役を除いて一意的に定まる p-部分群であることが知られている．すなわち，V が H-射影的であれば $\mathrm{vx}(V) \leq_G H$ が成り立つ．また，$Q = \mathrm{vx}(V)$ とおくとき

$$V \mid S{\uparrow}^G$$

を満たす直既約 RQ-加群 S が（共役を除いて）一意的に存在することも知られている．この RQ-加群 S を V のソースと呼ぶ．これから，群環 RG のブロック B の Auslander-Reiten 有向グラフとそのヴァーテックスについて考察していきたい．

1．群環の Auslander-Reiten 有向グラフとヴァーテックス

群環 RG のブロック B の Auslander-Reiten 有向グラフ $\Gamma(B)$ とは，点の集合 $\Gamma(B)_0$ と矢の集合 $\Gamma(B)_1$ を次のように定めて構成される有向グラフである：

- 点の集合 $\Gamma(B)_0 = \{$ 直既約 B-表現加群の同型類 $[V]$ $\}$
- 矢の集合 $\Gamma(B)_1 = \{$ $[V] \to [U]$ “既約写像” $\}$

ここで RG-準同型写像 $f: V \to U$ が既約写像とは，$f = g \circ h$ と合成写像の形で書けるのは g が分裂全射か h が分裂単射かのどちらかでしかないときをいう．既約写像は概分裂列と呼ばれる短完全列と深い関係がある．次の 3 条件を満たす表現加群の短完全列 $\mathcal{A}: 0 \to N \to M \xrightarrow{f} L \to 0$ を**概分裂列**と呼ぶ：

(1) L と N は直既約である．

(2) $\mathcal{A}$ は分裂列ではない．

(3) 任意の分裂全射でない準同型写像 $g: X \to L$ に対し，ある準同型写像 $h: X \to M$ が存在して $g = f \circ h$ が成り立つ．

任意の射影的でない直既約表現加群 L に対し，L を最終項とするような概分裂列が一意的に存在することを Auslander-Reiten が示した．L を最終項とするような概分裂列を $\mathcal{A}(L)$:

$0 \to \tau L \to m(L) \to L \to 0$ と書くことにする (τ は Auslander-Reiten 移動と呼ばれる). $R = \mathcal{O}$ のときは $\tau = \Omega$ （ここで Ω は Heller 作用素，即ち ΩL は L の projective cover の核: $0 \to \Omega L \to P_L \to L \to 0$）で，$R = k$ のときは $\tau = \Omega^2$ であることが知られている. $m(X) = \bigoplus_{i=1}^{t} M_i$ と直既約分解したとき，次が成り立つ.

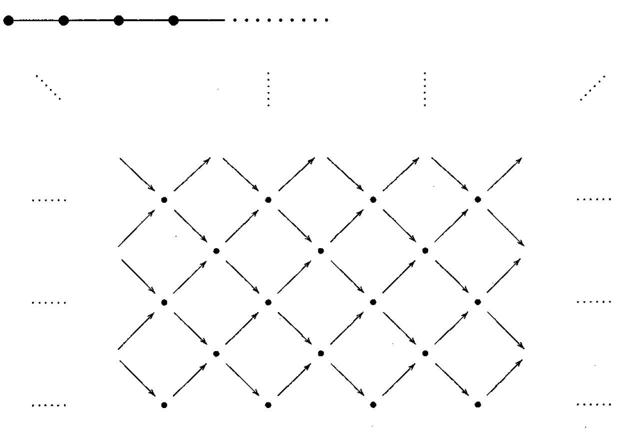
命題 1.1 [Auslander-Reiten] $0 \to N \to \bigoplus_{i=1}^{t} M_i \xrightarrow{(f_1 \cdots f_t)} L \to 0$ を概分裂列とする.
(1) 各 $f_i : M_i \xrightarrow{f_i} L$ （$i = 1, \cdots, t$）は既約写像である.
(2) 直既約加群 M から L への既約写像が存在すれば，M はある M_i に同型である.

この命題から，Auslander-Reiten 有向グラフとは概分裂列を繋ぎ合わせたグラフと解釈することができる．多元環の Auslander-Reiten 理論に関しては [ARS], [ASS], [B] などの本や論説 [Y] に詳しく解説されている.

今後，Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分を，AR-成分と短く呼ぶことにする．AR-成分 Θ から射影加群を取り除いてできるグラフを Θ の stable part と呼び，Θ_s と書く．一般に，AR-成分 Θ_s のグラフとしての形状は，tree と呼ばれる樹形図 T から構成される被覆クイバー $\mathbb{Z}T$ を $\mathbb{Z}T$ の自己同型からなる群 Π で剰余して得られる（$\Theta_s \cong \mathbb{Z}T/\Pi$）[Riedtmann structure theorem]. T を Θ の tree class と呼ぶ．例えば，$T = A_\infty$ の場合は，$\mathbb{Z}A_\infty$ は次のような半平面状に広がる格子型の有向グラフである：

A_∞ :

$\mathbb{Z}A_\infty$



Webb は群環 RG（R は $\mathcal{O}$ または k）の AR-成分の tree class について次が成り立つことを示した [We].

定理 1.2 [Webb] $k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ は代数閉体で，群環 RG のブロック B は無限表現型であるとする．このとき，B の AR-成分 Θ の tree class は A_∞, D_∞, A_∞^∞ か，あるいは Euclidean diagram である.

ブロック B が無限表現型であるとは，直既約 B-表現加群の同型類が無限個存在するときを言う．kG のブロック B が無限表現型となるのは，B の "不足群" が巡回群でないときである．さらに，$p=2$ で不足群が dihedral, semidihedral, generalized quoternion のときに tame 表現型であり，それ以外のときは wild 表現型であることが知られている（[E1] 参照）．また $\mathcal{O}G$ のブロック B は，多くの場合に無限表現型（wild 表現型）である（詳しくは Dieterich[D2] 参照）．

さらに Erdmann がモジュラー表現（$R=k$）の場合に次の重要な事実を証明した [E2].

定理 1.3 [Erdmann]　もし k が代数閉体で kG のブロック B が wild 表現型であれば，B の任意の AR-成分の tree class は A_∞ である．

これから群環 RG の AR-成分 Θ のヴァーテックスについて考察しよう．G の部分群からなる集合

$$\{\mathrm{vx}(X) \mid X \in \Theta_s\}$$

の極小部分群 Q は共役を除いて一意的に存在する．すなわち，ある直規約加群 X_0 $(\in \Theta)$ が存在して，

$$Q = \mathrm{vx}(X_0), \qquad Q \leq_G \mathrm{vx}(X) \ \ (\forall X \in \Theta_s)$$

が成り立つ [IH, K1]．この極小部分群 Q を Θ のヴァーテックスと呼ぼう．

2．群整環のブロックの Auslander-Reiten 有向グラフとヴァーテックス

この章では群整環 $\mathcal{O}G$ のブロック B の AR-成分 Θ に対し，Θ のヴァーテックスや G の部分群の集合 $\{\mathrm{vx}(X) \mid X \in \Theta_s\}$ について考察していきたい．以下では係数環 $\mathcal{O}$ は冒頭に述べた条件 (#) を満たすものと仮定する．

仮定 (#) のもとでは，いわゆる Heller 表現加群について，いくつかの興味深い事実が成り立つ．群多元環 kG 上の加群 M に対し，M を整群環 $\mathcal{O}G$ 上の加群と見なして射影被覆 P_N を取ったとき，その核 Z_M を M の **Heller $\mathcal{O}G$-表現加群**と呼ぶ：

$$0 \to Z_V \to P_V \to V \to 0 \text{ (完全)}.$$

ここで P_V は $\mathcal{O}G$-表現加群（$\mathcal{O}$ 上自由）なので，その $\mathcal{O}$-部分加群である Z_V も $\mathcal{O}G$-表現加群である．例として，単純な kG-加群 S の Heller 表現加群を見てみよう．S の kG-加群としての射影被覆 $\overline{P}$ は，$\mathcal{O}G$-加群 P に持ち上げ可能である：$P/\pi P \cong \overline{P}$．換言すれば P が S

を $\mathcal{O}G$-加群と見たときの射影被覆である．よって P の根基 $\mathrm{rad}(P)$ が S の Heller 表現加群である：$0 \to \mathrm{rad}(P) \to P \to S \to 0$．Heller 表現加群の直既約性について次が成り立つ．

定理 2.1 [K2, K2'] $(K, \mathcal{O}, k)$ が条件 (#) を満たしているとき，直既約 kG-加群の Heller 表現加群は直既約である．

Heller 表現加群のヴァーテックスとソースについて次が言える．

命題 2.2 M を直既約 kG-加群とし，$\mathrm{vx}(M) = Q$ とおく．また kQ-加群 S を M のソースとし，Z_S を S の Heller $\mathcal{O}Q$-表現加群とする．このとき，M の Heller $\mathcal{O}G$-表現加群 Z_M のヴァーテックスは Q であり，Z_M のソースは Z_S である．また，kG-加群として次の同型が成り立つ：

$$Z_M/\pi Z_M \cong M \oplus \Omega M$$

Heller $\mathcal{O}G$-表現加群は次の命題で述べるように，概分裂列の性質で特徴付けられる．$\mathcal{O}G$-表現加群の短完全列 $\mathcal{E}$: $0 \to N \to N \to L \to 0$ に対し，$\overline{\mathcal{E}}$ で kG-加群の短完全列

$$0 \to N/\pi N \to M/\pi M \to L/\pi L \to 0$$

を表すことにする．

命題 2.3 [K3] L は射影的でない直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群とし，$\mathcal{A}(L)$: $0 \to \Omega L \to m(L) \to L \to 0$ を概分裂列とする．

(1) L が Heller $\mathcal{O}G$-表現加群でなければ，$\overline{\mathcal{A}(L)}$ は分裂する．

(2) L が直既約 kG-加群 M の Heller $\mathcal{O}G$-表現加群であれば，$\overline{\mathcal{A}(L)}$ は概分裂列 $\mathcal{A}(M)$: $0 \to \Omega^2 M \to m(M) \to M \to 0$ と分裂列 $0 \to \Omega M \to \Omega M \oplus \Omega M \to \Omega M \to 0$ の直和である．

Heller $\mathcal{O}G$-表現加群を含む AR-成分について次が成り立つ．

定理 2.4 [K3] Z_M を直既約 kG-加群 M の Heller $\mathcal{O}G$-表現加群とし，$Q = \mathrm{vx}(Z_M)$ $(= \mathrm{vx}(M))$ とおく．Z_M が属するブロックが無限表現型であると仮定する．このとき，Z_M を含む AR-成分 Θ の tree class は A_∞ であり，Θ のヴァーテックスは Q である．

また，Heller $\mathcal{O}G$-表現加群を含まない AR-成分については次が成り立つ．

定理 2.5 $\mathcal{O}G$ の AR-成分 Θ は Heller $\mathcal{O}G$-表現加群を含まないとする．Θ が次の性質 $(\star)$ を持つ直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 L を含むとする：

$(\star)$ kG-加群 $L/\pi L$ のある直既約因子 M は $\mathrm{vx}(L)$ をヴァーテックスに持つ．

このとき，$\mathrm{vx}(L)$ は Θ のヴァーテックスである．また，Θ_s の任意の直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 X に対し，kG-加群 $X/\pi X$ は M のある syzygy $\Omega^t M$ を直和因子として持つ．

証明 Θ_s の任意の直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 X に対し，Θ において L のある syzygy $\Omega^\ell L$ をうまく選ぶと，$\Omega^\ell L$ から X までの経路

$$\Omega^\ell L = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_{n-1} \to X_n = X$$

で，X_i が概分裂列 $\mathcal{A}(X_{i+1})$ の中間項の直和因子となるようなものをとることができる．経路の長さ n に関する帰納法で，kG-加群 $X/\pi X$ は M のある syzygy を直和因子として持つことを示そう．$X_{n-1}/\pi X_{n-1}$ は M のある syzygy を直和因子として持つとする．命題 2.3(1) より $\overline{\mathcal{A}(X_n)}$ は分裂する．従って，kG-加群 $X_{n-1}/\pi X_{n-1}$ は $(X_n \oplus \Omega X_n)/\pi(X_n \oplus \Omega X_n)$ の直和因子であるので，$X_n/\pi X_n$ は M のある syzygy を直和因子として持つ．特に，$\mathrm{vx}(L) = \mathrm{vx}(M) \leq \mathrm{vx}(X)$ $(\forall X \in \Theta_s)$ が成り立つので，$\mathrm{vx}(L)$ は Θ のヴァーテックスである．□

性質 $(\star)$ を持つ直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群の例をいくつか挙げよう．

例 2.6 直既約 $\mathcal{O}G$-加群 L は p'-rank の表現加群とする．すなわち，L の $\mathcal{O}$-階数 $\mathrm{rank}_{\mathcal{O}} L$ は p で割り切れないとする．このとき，L のヴァーテックス $\mathrm{vx}(L)$ は G の Sylow p-部分群である．今，kG-加群 $L/\pi L$ の k-次元は p で割り切れないので，$L/\pi L$ のある直既約因子 M の次元は p で割り切れない．特に M のヴァーテックスは G の Sylow p-部分群であることが分かる．L を含む AR-成分を Θ とおく．群整環 $\mathcal{O}G$ が無限表現型であれば Θ は Heller 表現加群を含まないことも確かめられるので，定理 2.5 から Θ のヴァーテックスは Sylow p-部分群である．

例 2.7 $\mathcal{O}G$ のブロック B は不足群 D を持つとし，直既約 B-表現加群 L は高さ 0 の表現加群とする．このとき，L のヴァーテックス $\mathrm{vx}(L)$ は D である．今，kG-加群 $L/\pi L$ のある直既約因子 M は高さ 0 となるので，特に M のヴァーテックスは D であることが分かる．L を含む AR-成分を Θ とおく．B が無限表現型であれば Θ は Heller 表現加群を含まないことも確かめられるので，定理 2.5 から Θ のヴァーテックスは D である．

Q を G の p-部分群とし，$N = N_G(Q)$ とおく．直既約 RG-表現加群でヴァーテックスが Q となるもの全体を $\mathrm{IND}(RG|Q)$ と書く．このとき，$\mathrm{IND}(RG|Q)$ と $\mathrm{IND}(RN|Q)$ の間に誘導と制限を通して一対一の対応がある：

定理 2.8（Green）全単射 $f : \mathrm{IND}(RG|Q) \to \mathrm{IND}(RN|Q)$ で次を満たすものが存在する：
(1) $V \in \mathrm{IND}(RG|Q) \Longrightarrow V{\downarrow_N} \cong fV \oplus (\bigoplus_i W_i)$,（$\mathrm{vx}(W_i) \neq_N Q$）.
(2) $W \in \mathrm{IND}(RN|Q) \Longrightarrow W{\uparrow^G} \cong f^{-1}W \oplus (\bigoplus_j V_j)$,（$\mathrm{vx}(V_j) \neq_G Q$）.

上の定理の全単射 f を (G,Q,N) に関する **Green 対応**と呼ぶ．AR-成分に関しても Green 対応と類似の対応関係が成り立つ．すなわち，RG の Auslander-Reiten quiver $\Gamma(RG)$ の連結成分 Θ は Q をヴァーテックスとして持つものとし，L を Θ に属する直既約 RG-表現加群で Q をヴァーテックスとして持つものとする．RN-表現加群 fL は L の Green 対応子とし，RN の Auslander-Reiten quiver $\Gamma(RN)$ の連結成分で fL を含むものを Δ とおく．fL を含む Δ の連結部分グラフ Λ は次の 2 条件を満たす直既約 RN-表現加群 $Y \in \Delta$ から構成されるものとする：

(i) $Q \leq_G \mathrm{vx}(X)$.

(ii) Δ において，fL から Y まで既約写像でつながった列が取れる．

このとき，次が成り立つ．

命題 2.9（[IH], [K1]）　全単射 ψ : $\Theta_s \to \Lambda$ で，次を満たすものが存在する：
(1) $X \in \Theta_s \Longrightarrow X{\downarrow_N} \cong \psi X \oplus (\bigoplus_i Y_i)$,（$Q \not\leq_N \mathrm{vx}(Y_i)$）
(2) $Y \in \Lambda \Longrightarrow Y{\uparrow^G} \cong \psi^{-1}Y \oplus \left(\bigoplus_j X_j\right)$,（$Q \not\leq_G \mathrm{vx}(X_j)$）
さらに ψ は Θ_s から Λ への有向グラフとしての同型を引き起こす．

$\mathcal{O}G$-表現加群 L が定理 2.5 の性質 $(\star)$ を持つとき，L の Green 対応子 fL も性質 $(\star)$ を持つ．従って，fL を含む AR-成分 Δ のヴァーテックスは L のヴァーテックスと等しく，特に，$\Delta_s = \Lambda$ が成り立つ．すなわち，

系 2.10　定理 2.5 の設定のもとで，fL を含む AR-成分を Δ とする．このとき，Θ_s から Δ_s への全単射 $\psi : \Theta_s \to \Delta_s$ で，次を満たすものが存在する：
(1) $X \in \Theta_s \Longrightarrow X{\downarrow_N} \cong \psi X \oplus (\bigoplus_i Y_i)$,（$Q \not\leq_N \mathrm{vx}(Y_i)$）
(2) $Y \in \Delta_s \Longrightarrow Y{\uparrow^G} \cong \psi^{-1}Y \oplus \left(\bigoplus_j X_j\right)$,（$Q \not\leq_G \mathrm{vx}(X_j)$）
さらに ψ は Θ_s から Δ_s への有向グラフとしての同型を引き起こす．

参考文献

[ASS] Assem, I., Simson, D. and Skowroński, A.: Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1, Techniques of Representation Theory, London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 65, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[ARS] Auslander, M., Reiten, I. and Smalø, S.: Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Studies in Advanced Math. 36, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[B] Benson, D. J.: Representations and cohomology I, Cambridge Studies in Advanced Math. 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[E1] Erdmann, K.: Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, Lecture Note in Math. 1428, Springer, Berlin/New York, 1990.

[E2] Erdmann, K.: *On Auslander-Reiten components for group algebras*, J. Pure Appl. Algebra **104**(1995), 149–160.

[IH] Inoue, T. and Hieda, Y.: *A note on Auslander-Reiten quivers for integral group rings*, Osaka J. Math. **32**(1995), 483–494.

[K1] Kawata, S.: *Module correspondence in Auslander-Reiten quivers for finite groups*, Osaka J. Math. **26**(1989), 671–678.

[K2] Kawata, S.: *On Heller lattices over ramified extended orders*, J. Pure Appl. Algebra **202**(2005), 55–71.

[K2'] Kawata, S.: *Erratum to "On Heller lattices over ramified extended orders"*, J. Pure Appl. Algebra **212**(2008), 1849–1851.

[K3] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and Heller lattices for integral group rings*, Algebr. Represent. Theory **9**(2006), 513–524.

[NT] 永尾汎, 津島行男: 有限群の表現, 裳華房, 1987.

[We] Webb, P.J.: *The Auslander-Reiten quiver of a finite group*, Math. Z. **179**(1982), 97–121.

[Y] 山形邦夫: 有限次元自己入射多元環の表現とその周辺, 数学 **61**(2009), 270–292.