数理解析研究所講究録
第2053巻 2017年 131-137

The maximum skew energy of tournaments with order $n \equiv 2, 3 \pmod 4$

東北大学情報科学研究科　伊東桂司
Keiji Ito
Tohoku University
Graduate School of Information Science
k.ito@ims.is.tohoku.ac.jp

1 はじめに

D を位数 n の有向グラフとする. 有向グラフ D の skew energy は, 2010 年に Adiga ら ([1]) によって, D の歪隣接行列の固有値の絶対値の総和として定義された. また, 彼らによって skew energy の上界が与えられている ([1, Theorem 2.5 and Corollary 2.6]):

$$\varepsilon(S(D)) \leq n\sqrt{d},$$

ただし, ε は skew energy, $S(D)$ は D の歪隣接行列, d は D の最高次数を表す. I_n を n 次単位行列とするとき, 等号が成立するための必要十分条件は $S(D)S(D)^T = dI_n$ を満たすことである.

有向グラフの中でも, 任意の 2 頂点の間に有向辺が存在する有向グラフをトーナメントと呼ぶ. 言い換えると, 完全グラフの辺に向き付けをいれた有向グラフのことである. トーナメントの定義から, 位数 n のトーナメント T に対する skew energy の上界は

$$\varepsilon(S(T)) \leq n\sqrt{n-1},$$

となる. また, 等号成立条件は $S(T)S(T)^T = (n-1)I_n$ となるが, これは $S(T)$ が歪対称な conference matrix であることを表している. n 次の conference matrix が存在するとき, n は 4 の倍数でなければならない. そのため, 位数が 4 の倍数でないようなトーナメントに対して, その skew energy の上界を改善することができる. 実際に, $n \equiv 2, 3 \pmod 4$ とするとき, 位数 n のトーナメントの skew energy の最大値を求める. また, skew energy の一般化である α-skew energy を定義し, それを用いることで $n \equiv 2 \pmod 4$ の場合のトーナメントの skew energy の最大値を求める.

2 Skew energy とトーナメント

この論文では, 頂点集合 V と辺集合 $E \subset V \times V$ の組 $D = (V, E)$ を有向グラフと呼び, 多重辺や自己ループは考えないものとする. つまり, 単純無向グラフに向き付けをいれた有向グラフを扱う.

定義 2.1. 有向グラフ $D = (V, E)$ に対し, D の歪隣接行列 $S(D)$ を次のように定める.

$$S(D)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } (x, y) \in E, \\ -1 & \text{if } (y, x) \in E, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定義 2.2. D を位数 n の有向グラフとし, 歪隣接行列 $S(D)$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とする. このとき, D の skew energy $\varepsilon(S(D))$ を

$$\varepsilon(S(D)) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

と定義する. また同様に D の α-skew energy を

$$\varepsilon_\alpha(S(D)) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^\alpha$$

とする.

この定義から, $\varepsilon(S(D)) = \varepsilon_1(S(D)), \varepsilon(S(D)) = \varepsilon_{\frac{1}{2}}(S(D)^2)$ がわかる.

定義 2.3. $D = (V, E)$ を有向グラフとする. 任意の $x, y \in V$ に対し, $(x, y) \in E$ または $(y, x) \in E$ のどちらか一方を満たすとき D はトーナメントと呼ばれる.

$\mathcal{S}_n$ を位数 n のトーナメントの歪隣接行列全体の集合とする.
ここまでの定義から任意の $S \in \mathcal{S}_n$ に対し以下の事実を得る.

- $S(D)$ は歪対称行列である.
- $S(D)$ の固有値は純虚数である.
- $S(D)S(D)^T$ の対角成分は常に $n-1$ である.
- n を奇数とするとき, 任意の $S \in \mathcal{S}_n$ は固有値に 0 を重複度 1 で持つ.

I_n, J_n をそれぞれ n 次単位行列, 成分がすべて 1 の n 次正方行列とする.

定義 2.4. M を対角成分が 0, 非対角成分が $1, -1$ の n 次正方行列とする. $MM^T = (n-1)I_n$ をみたすとき, M は conference matrix と呼ばれる.

M_1, M_2 を n 次正方行列とする. 本論文では, 成分が $0, 1, -1$ で各行各列に 1 または -1 がちょうど 1 個あるような n 次正方行列 P が存在して $P^T M_1 P = M_2$ を満たすとき, M_1, M_2 は同型であるということにする.

補題 2.5 ([3, Corollary 2.2]). *次数 n の conference matrix が存在するとき, n は偶数である. 特に, $n \equiv 0 \pmod 4$ のとき, 次数 n の任意の conference matrix は歪対称な conference matrix と同型であり, $n \equiv 2 \pmod 4$ のとき, 次数 n の任意の conference matrix は対称な conference matrix と同型である.*

一般の有向グラフの skew energy の上界は [1, Theorem 2.5 and Corollary 2.6] で与えられている. これをトーナメントに限定したときの skew energy の最大値は次で与えられる ([6, Proposition 4.1] を参照してもよい).

定理 2.6. *任意の $S \in \mathcal{S}_n$ に対し, $\varepsilon(S) \leq n\sqrt{n-1}$ が成り立つ. 等号成立のための必要十分条件は S が conference matrix であることである.*

証明. $S \in \mathcal{S}_n$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とする. Cauchy-Schwarz 不等式と $\sum_{i=1}^{n-1}(-\lambda_i^2) = \mathrm{tr}(-S^2) = n(n-1)$ であることを用いる.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\right)^2 &\leq (n-1)\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \\ &= n\sum_{i=1}^{n}\left(-\lambda_i^2\right) \\ &= n^2(n-1)\end{aligned}$$

を得る. よって, $\varepsilon(S) \leq n\sqrt{n-1}$ が成り立つ. 等号成立の必要十分条件に関して, S が conference matrix であることを仮定すると, S の固有値から等号が成立することがわかる. 逆に等号成立を仮定すると, 任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し, $|\lambda_i| = \sqrt{n-1}$ が成り立つことから, あるユニタリ行列 U が存在して

$$U^{-1}SU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

とできる. また, この等式のエルミート転置をとると, λ_i は純虚数であるから

$$U^{-1}S^TU = \mathrm{diag}(-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_n)$$

となる. したがって $U^{-1}SS^TU = (n-1)I_n$ が成り立ち, S が conference matrix であることがわかる. □

3 位数 $n \equiv 3 \pmod 4$ のトーナメントの skew energy の最大値

定義 3.1. トーナメント $T = (V, E)$ が二重正則トーナメントであるとは, 任意の $x, y \in V$ に対し $\#\{z \in V \mid (x, z) \in E\} = (n-1)/2, \#\{z \in V \mid (x, z), (y, z) \in E\} = (n-3)/4$ を満たすときである.

補題 3.2. $S \in \mathcal{S}_n$ が $SS^T = nI_n - J_n$ を満たすことと, S が二重正則トーナメントの歪隣接行列であることは同値である.

証明について簡単に説明する. T を位数 n の二重正則トーナメントとする. A を T の $\{0, 1\}$-隣接行列とするとき, $A + A^T = J_n - I_n, S = A - A^T$ の 2 つの関係式を得る. これを用いて計算することによって主張を得る.

系 3.3. S を位数 n の二重正則トーナメントの歪隣接行列, $\mathbf{1}$ を成分がすべて 1 のベクトルとするとき

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ -\mathbf{1} & S \end{bmatrix}$$

は歪対称な *conference matrix* となる.

補題 2.5 と系 3.3 から, 位数 n の二重正則トーナメントが存在するとき, $n \equiv 3 \pmod 4$ であることがわかる.

定理 3.4. n を奇数とする. 任意の $S \in \mathcal{S}_n$ に対し, $\varepsilon(S) \leq (n-1)\sqrt{n}$ が成り立つ. 等号が成立するための必要十分条件は S が二重正則トーナメントの歪隣接行列と同型であることである.

不等式については, 定理 2.6 と同様の手法で証明することができる. n を奇数としたとき, $S \in \mathcal{S}_n$ の固有値は 0 が重複度 1 で現れ, それ以外はすべて純虚数である. そのことを踏まえ, 0 以外の固有値に対して Cauchy-Schwarz 不等式を用いる. $S \in \mathcal{S}_n$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ $(\lambda_n = 0)$ とする. $\sum_{i=1}^{n-1}(-\lambda_i^2) = n(n-1)$ より,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n-1}|\lambda_i|\right)^2 &\leq (n-1)\sum_{i=1}^{n-1}|\lambda_i|^2\\ &= (n-1)\sum_{i=1}^{n-1}(-\lambda_i^2)\\ &= n(n-1)^2.\end{aligned}$$

よって $\varepsilon(S) \leq (n-1)\sqrt{n}$ となる. 等号成立に関して, 二重正則トーナメントが等号を達成することは固有値を計算することによって得る. 逆は, 等号成立から固有値の特徴付けを行い, interlacing を用いることによって示すことができる.

4 位数 $n \equiv 2 \pmod 4$ のトーナメントの skew energy の最大値

$e_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の i 次基本対称式とする.

補題 4.1 ([4, Theorem 3]). $0 < \alpha \leq 1$ とし, $x_i, y_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ を非負実数とする. すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し, $e_i(x_1, \ldots, x_n)$ が成り立つならば

$$x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha \leq y_1^\alpha + \cdots + y_n^\alpha$$

が成り立つ.

n 次正方行列 A に対し, $K \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ で添え字づけられた A の主小行列を $A[K]$ と表すことにする. 行列の特性多項式に対して, 解と係数の関係を考えることによって次の系を得る.

系 4.2. A, B を n 次半正定値行列とし, θ_i, τ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ をそれぞれ A, B の固有値とする. このとき, すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し,

$$\sum_{\substack{K\subset\{1,\ldots,n\}\\|K|=i}} \det A[K] \leq \sum_{\substack{K\subset\{1,\ldots,n\}\\|K|=i}} \det B[K]$$

が成り立つならば,

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_i^\alpha \leq \sum_{i=1}^{n}\tau_i^\alpha \ (0 \leq \alpha \leq 1)$$

が成り立つ.

補題 4.3 (Fischer's inequality, [5, Theorem 7.8.5]). 正定値行列 A を

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline C^* & B' \end{array}\right]$$

と分割できたとする. ただし, B, B' は零行列ではない正方行列とし, $*$ はエルミート転置を表す. このとき, $\det A \leq \det B \det B'$ が成り立ち, 等号が成立するための必要十分条件は $C = 0$ である.

正確には, [5, Theorem 7.8.5] では等号が成立するための必要十分条件には言及されていない. しかし, その証明から等号成立の必要十分条件がわかる.

$\mathcal{D}_n$ で対角成分が 1 または -1 で, 非対角成分が 0 の n 次対角行列全体の集合を表すこととする.

補題 4.4 ([7, Theorem 1, Corollary 2]). $A = [a_{ij}]$ を n 次の実対称な正定値行列で対角成分がすべて m であるとする. また, $a = \min_{i,j} |a_{ij}|$ とする. このとき,

$$\det A \le \det((m-a)I_n + aJ_n)$$

が成り立つ. 等号が成立するための必要十分条件は $A \in \{D_1((m-a)I_n + aJ_n)D_2 \mid D_1, D_2 \in \mathcal{D}_n\}$ である. さらに

$$\det((m-a)I_n + aJ_n) = (m + na - a)(m-a)^{n-1}$$

が成り立つ.

次の補題は [2, Theorem 2.4] の証明の中に現れた主張であるが, 次数が $n \equiv 2 \pmod 4$ であるときの skew energy の最大値を求めるにあたって必要なので, 補題として扱う.

補題 4.5. $n \equiv 2 \pmod 4$ とする. また, $S \in \mathcal{S}_n$ に対し $A = [a_{ij}] = SS^T$ とおく. ある (x, y) $(x \ne y)$ に対し $a_{xy} \equiv 0 \pmod 4$ が成り立つならば, ある置換行列 P が存在して

$$P^TAP = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline C^T & B' \end{array}\right]$$

が成り立つ. ただし, B, B' のすべての非対角成分を 4 で割った余りは 2 であるような正方行列で, C のすべての成分は 4 で割り切れる.

$L_k = (n-3)I_k + 2J_k$ とする. すなわち, L_k は対角成分が $n-1$ で非対角成分が 2 であるような k 次の行列である. L_k の添え字 k は行列の次数にのみ依存し, 対角成分には影響を与えないことに注意する.

定理 4.6 ([2, Lemma 2.4]). $n \equiv 2 \pmod 4$ とする. 任意の $S \in \mathcal{S}_n$ に対し

$$\det S \le (2n-3)(n-3)^{\frac{n}{2}-1}$$

が成り立つ. 等号成立の必要十分条件は $S \in \{DM'D \mid D \in \mathcal{D}_n\}$ である. ただし, $M' \in \mathcal{S}_n$ は

$$M'M'^T = \begin{bmatrix} L_{n/2} & 0 \\ 0 & L_{n/2} \end{bmatrix}$$

を満たす.

定理 4.7. $n \equiv 2 \pmod 4$ とする. 任意の $S \in \mathcal{S}_n$ に対し,

$$\varepsilon_\alpha(S) \le 2(2n-3)^{\frac{\alpha}{2}} + (n-2)(n-3)^{\frac{\alpha}{2}} \ (0 \le \alpha \le 2).$$

が成り立つ. $S \in \{DM'D \mid D \in \mathcal{D}_n\}$ であるとき, 等号が成り立つ. ただし, $M' \in \mathcal{S}_n$ は

$$M'M'^T = \begin{bmatrix} L_{n/2} & 0 \\ 0 & L_{n/2} \end{bmatrix}$$

を満たす.

証明の方針について述べる．まず，系 4.2 を用いてトーナメントの歪隣接行列の α-skew energy を比較する．$S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n$ に対し，θ_i, τ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ をそれぞれ S_1, S_2 の固有値とする．このとき，$S_1S_1^T, S_2S_2^T$ は固有値としてそれぞれ $-\theta_i^2, -\tau_i^2$ を持つような半正定値行列である．このとき，すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し

$$\sum_{\substack{K\subset\{1,\ldots,n\}\\ |K|=i}} \det(S_1S_1^T)[K] \le \sum_{\substack{K\subset\{1,\ldots,n\}\\ |K|=i}} \det(S_2S_2^T)[K]$$

が成り立つならば，θ_i, τ_i が純虚数であることに注意して，

$$\sum_{i=1}^{n} |\theta_i|^{2\alpha} = \sum_{i=1}^{n} (-\theta_i^2)^{\alpha} \le \sum_{i=1}^{n} (-\tau_i^2)^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} |\tau_i|^{2\alpha} \ (0 \le \alpha \le 1)$$

を得る．これは $\varepsilon_\alpha(S_1) \le \varepsilon_\alpha(S_2)$ $(0 \le \alpha \le 2)$ を意味する．

したがって，

$$M = M'M'^T = \begin{bmatrix} L_{n/2} & 0 \\ 0 & L_{n/2} \end{bmatrix}$$

とするとき，任意の $S \in \mathcal{S}_n$ と任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し

$$\sum_{\substack{K\subset\{1,\ldots,n\}\\ |K|=i}} \det(SS^T)[K] \le \sum_{\substack{K\subset\{1,\ldots,n\}\\ |K|=i}} \det M[K]$$

が成り立つことを示す．

補題 4.5 より，$S \in \mathcal{S}_n$ に対し

$$SS^T = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline C^T & B' \end{array}\right]$$

として一般性を失わない．ただし，B, B' はそれぞれ次数 $h, n-h$ の正方行列ですべての非対角成分を 4 で割った余りは 2 であり，C のすべての成分は 4 で割り切れるとする．

$$N = \left[\begin{array}{c|c} L_h & 0 \\ \hline 0 & L_{n-h} \end{array}\right]$$

とすると，補題 4.3 と補題 4.4 より，任意の部分集合 $K \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し

$$\det(SS^T)[K] \le \det N[K] \tag{1}$$

が成り立つ．最後に直接計算によって，すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し

$$\sum_{\substack{K\subset\{1,\ldots,n\}\\ |K|=i}} \det N[K] \le \sum_{\substack{K\subset\{1,\ldots,n\}\\ |K|=i}} \det M[K] \tag{2}$$

が成り立つ．(1), (2) から

$$\sum_{\substack{K\subset\{1,\ldots,n\}\\ |K|=i}} \det(SS^T)[K] \le \sum_{\substack{K\subset\{1,\ldots,n\}\\ |K|=i}} \det M[K]$$

を得る．

5 おわりに

ここまで, トーナメントの skew energy の最大値について調べてきた. 定理 3.4 では, 奇数位数のトーナメントの skew energy の上界を与え, 等号が成り立つための必要十分条件としてトーナメントが二重正則トーナメントであることを求めた. しかし, 位数 n の二重正則トーナメントが存在するためには, $n \equiv 3 \pmod 4$ である必要があり, $n \equiv 1 \pmod 4$ の場合は定理 3.4 で与えられた上界を決して達成することはない. すなわち, 今後の自然な問題として, $n \equiv 1 \pmod 4$ としたとき, 位数 n のトーナメントの skew energy の最大値を求めることが挙げられる. 定理 3.4 では, 奇数位数のトーナメントの歪隣接行列は固有値に必ず 0 を重複度 1 で持つという性質を用いて証明を与えており, 位数 $n \equiv 1 \pmod 4$ のトーナメントの skew energy を求めるためには, その事実だけでは不十分なことがわかる.

また, 定理 2.6 と定理 4.7 ではそれぞれ $n \equiv 0 \pmod 4$ のときと $n \equiv 2 \pmod 4$ のときのトーナメントの skew energy の最大値を与えており, $n \equiv 0, 2 \pmod 4$ として $S \in \mathcal{S}_n$ をそれらの最大値を達成するようなトーナメントの歪隣接行列としたとき, S は $\mathcal{S}_n$ の中で最大の行列式を持つことが容易にわかる. このことから, $n \equiv 1 \pmod 4$ の場合への応用も考慮したが, 奇数位数のトーナメントの場合, その歪隣接行列の行列式は常に 0 になってしまうため, 行列式の値による分類はできない.

以上のことから, 位数 $n \equiv 1 \pmod 4$ のトーナメントの skew energy の最大値は未解決である.

参考文献

[1] C. Adiga, R. Balakrishnan and W. So, The skew energy of a digraph, *Linear Algebra Appl.* **432** (2010), no. 7, 1825–1835.

[2] A. J. Armario and M. D. Frau, Self-Dual codes from $(-1, 1)$-matrices of skew symmetric type, Preprint, available at http://arXiv.org/abs/1311.2637.

[3] P. Delsarte, J. M. Goethals and J. J. Seidel, Orthogonal matrices with zero diagonal. II, *Canad. J. Math.* **23** (1971), 816–832.

[4] G. A. Efroymson, B. Swartz and B. Wendroff, A new inequality for symmetric functions, *Adv. Math.* **38** (1980), 109–127.

[5] R. A. Horn and C. R. Johnson, Matrix analysis paperback edition, Cambridge University Press (1990).

[6] K. Ito, The skew energy of tournaments, *Linear Algebra Appl.* **518** (2017), 144–158.

[7] M. Wojtas, On Hadamard's inequality for the determinants of order non-divisible by 4, *Colloq. Math.* **12** (1964), 73–83.