数理解析研究所講究録
第2054巻 2017年 40-41

近似GCDにおける逐次的なQR分解法とその実装についてII*

長坂耕作

KOSAKU NAGASAKA†

神戸大学人間発達環境学研究科

GRADUATE SCHOOL OF HUMAN DEVELOPMENT AND ENVIRONMENT, KOBE UNIVERSITY

1 はじめに

本講演では，RIMS 共同研究「数式処理研究の新たな発展」で講演した内容 [1] に含まれていた，近似 GCD を想定した構造化 QR 分解の改善案として検討中だったものについて，数値実験を行った結果について報告する。なお，本講演で取り上げる近似 GCD は，以下で定義されるものとする。

定義 1 (Degree-Revealing Approximate GCD)
$\|f\|_2=\|g\|_2=1$ なる $f(x),g(x)\in\mathbb{C}[x]$ と $\varepsilon\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して，次式を満たす $d(x)\in\mathbb{C}[x]$ を求めよ。

$$\exists\Delta_f,\Delta_g,f_1,g_1\in\mathbb{C}[x],\ \max\{\|\Delta_f\|_2,\|\Delta_g\|_2\}<\varepsilon,\ f+\Delta_f=d\cdot f_1,\ g+\Delta_g=d\cdot g_1,\ \|d\|_2=1$$

$\triangleleft$

本講演で対象としている近似 GCD アルゴリズムは，行列の QR 分解に基づくものであり，QRGCD[3] やその改良版である ExQRGCD[5]，UVGCD[6] などが含まれる。取り上げる改善案とその数値実験は，行列の構造に着目することで $O(n^2)$ の計算量となる，Delvaux ら [4] が提案している QR 分解である。

2 数値実験の報告

過去の講演で可能性のある改善案として提示したものは，ユニタリ行列の再分解（Givens 変換 $G'_{1,2}G_{2,3}G_{1,2}$ の積の値から，再度 Givens 変換の積 $\tilde{G}'_{2,3}\tilde{G}_{1,2}\tilde{G}_{2,3}$ の表現を得る）における検討である。1 つが，この再分解の際に用いる Givens 回転の種類（表 1）の検討であり，もう 1 つが，この再分解に際して Unimodularity を維持するかの検討である。原論文 [4] では，Givens 変換の中に Unimodularity を持たないものが存在し，その性質が伝播していくことが避けられないものであったが，改善案では，表現や計算手順に工夫をすることで，この伝播を避けることが可能となっていた。

図 1 は，横軸に複素係数多項式（係数は $[-1-i,1+i]$）の次数の組を，縦軸にその Sylvester 行列 A に対して QR 分解を行った結果（$A=QR$）に対して $Q^{-1}A$ の下三角部分（対角含まず）の Frobenius ノルムの平均（それぞれ 100 サンプル）を図示したものである。残念ながら，Delvaux ら [4] が報告している Toeplitz-like 行列に対する数値的な不安定性を改善することはできなかった。このことから，この不安定性はアルゴリズムの構造的なものと考えており，近似 GCD での利用に際しては，その解明が課題となる。

*This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 15K00016.

†nagasaka@main.h.kobe-u.ac.jp

- G for $r \in \mathbb{C}$: $G = \begin{pmatrix} c & s \\ -\bar{s} & c \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{C}$ s.t. $\begin{pmatrix} c & s \\ -\bar{s} & c \end{pmatrix}^h \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$
- $U_{\mathbb{R}}$ for $r \in \mathbb{R}$: $U_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} c & s \\ -\bar{s} & \bar{c} \end{pmatrix}$, $c, s \in \mathbb{C}$ s.t. $\begin{pmatrix} c & s \\ -\bar{s} & \bar{c} \end{pmatrix}^h \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$
- $U_{\mathbb{C}}$ for $r \in \mathbb{C}$: $U_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} c & s \\ -\bar{s} & \bar{c} \end{pmatrix}$, $c, s \in \mathbb{C}$ s.t. $\begin{pmatrix} c & s \\ -\bar{s} & \bar{c} \end{pmatrix}^h \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$

表 1: 選択対象の Givens 回転

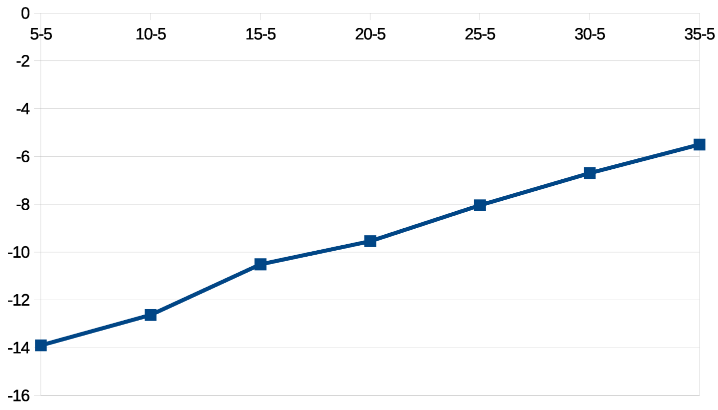

図 1: 数値実験の結果

参　考　文　献

[1] 長坂耕作. 2015. 近似 GCD における逐次的な QR 分解法とその実装について. RIMS 共同研究 数式処理研究の新たな発展, 京都大学数理解析研究所講究録, No. 1976(2015), 1–7.

[2] Bini, D. A., Boito, P., 2007. Structured matrix-based methods for polynomial ϵ-gcd: Analysis and comparisons. In: Proceedings of the 2007 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. ISSAC '07. ACM, New York, NY, USA, pp. 9–16.

[3] Corless, R. M., Watt, S. M., Zhi, L., 2004. QR factoring to compute the GCD of univariate approximate polynomials. IEEE Trans. Signal Process. 52 (12), 3394–3402.

[4] Delvaux, S., Gemignani, L., Van Barel, M., 2010. QR-factorization of displacement structured matrices using a rank structured matrix approach. In: Numerical methods for structured matrices and applications. Vol. 199 of Oper. Theory Adv. Appl. Birkhäuser Verlag, Basel, pp. 229–254.

[5] Nagasaka, K., Masui, T., 2013. Extended qrgcd algorithm. In: Proceedings of the 15th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing - Volume 8136. CASC 2013. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, pp. 257–272.

[6] Zeng, Z., 2011. The numerical greatest common divisor of univariate polynomials. In: Randomization, relaxation, and complexity in polynomial equation solving. Vol. 556 of Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 187–217.