数理解析研究所講究録
第2054巻 2017年 118-125

グレブナー基底を用いた収束冪級数環での拡張イデアル所属アルゴリズムについて

鍋島克輔*
徳島大学大学院理工学研究部
NABESHIMA, KATSUSUKE
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, TOKUSHIMA UNIVERSITY

田島慎一†
筑波大学大学院数理物質系数学域
TAJIMA, SHINICHI
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

Ideal membership and extended ideal membership problems are considered in rings of convergent power series. It is shown that the problems for zero-dimensional ideals in the local rings can be solved in polynomial rings. New algorithms are given to solve the problems in the local rings. The key of the algorithms is the use of ideal quotients in polynomial rings.

1 はじめに

本稿では，収束冪級数環でのイデアル所属問題と拡張イデアル所属問題を効率よく解くための方法について述べる.

イデアル所属問題と拡張イデアル所属問題は，多くの分野に現れる重要な問題であるが，収束冪級数環 (local ring) では，Mora の tangent cone アルゴリズムとスタンダード基底を用いる方法が有名であり [3, 6, 10, 11] により紹介されている．ここでは，収束冪級数環のイデアル所属問題・拡張イデアル所属問題をイデアル商を用いることにより多項式環の問題と捉え，グレブナー基底を用いて解く方法を紹介する.

ここで扱う問題と結果を明確化するために，F を s 個の多項式 $f_1, f_2, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の集合とし，$\mathbb{V}(F) = \{x \in \mathbb{C}^n | f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_s(x) = 0\}$ とする．ここで，$\mathbb{V}(F)$ は原点 O を孤立した共通ゼロ点として持つと仮定する．収束冪級数環 $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ において F が生成するイデアルを $\langle F\rangle_{\{O\}}$，多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ において F が生成するイデアルを $\langle F\rangle$ で表す．このとき，多項式 h が $\langle F\rangle_{\{O\}}$ に属しているかどうかを判定する方法について述べる．これが本稿で取り扱うイデアル所属問題である．もし，$h \in \langle F\rangle_{\{O\}}$ であれば，

$$h = q_1 f_1 + q_2 f_2 + \cdots + q_s f_s$$

となる $q_1, q_2, \ldots, q_s \in \mathbb{C}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ が存在するが，これら $q_1, q_2, \ldots, q_s$ を求める方法，すなわち，拡張イデアル所属問題についても述べる.

*nabeshima@tokushima-u.ac.jp
†tajima@math.tsukuba.ac.jp

本稿を通して，記号 x を n 変数 $x_1,\dots,x_n$ の省略形とし，$\mathbb{C}[x]$ を多項式環，$\mathbb{C}\{x\}$ を収束冪級数環とする．自然数の集合 $\mathbb{N}$ はゼロを含むとする．

2 イデアル所属問題

イデアル所属問題を考える．$\mathbb{C}^n$ の原点 O の開近傍を X とし，F を s 個の多項式 $f_1,f_2,\dots,f_s\in\mathbb{C}[x]$ の集合とする．ここでは，これら s 個の多項式は $\{x\in X|f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_s(x)=0\}=\{O\}$ を満たすと仮定する．また，$\mathcal{I}_O=\langle f_1,\dots,f_s\rangle_{\{O\}}$ を局所環 $\mathbb{C}\{x\}$ で $f_1,f_2,\dots,f_s$ により生成されるイデアルとし，$I=\langle f_1,\dots,f_s\rangle$ を多項式環 $\mathbb{C}[x]$ で $f_1,f_2,\dots,f_s$ により生成されるイデアルとする．また，局所環 $\mathbb{C}\{x\}$ の極大イデアル $\langle x_1,x_2,\dots,x_n\rangle$ を $\mathfrak{m}$ で表す．このとき，次が成り立つ．

補題 1 多項式 $h\in\mathbb{C}[x]$ に対し，次は同値である．

(i) $h\in\mathcal{I}_O\subset\mathbb{C}\{x\}$,

(ii) $g\notin\mathfrak{m}$ となる g が必ずイデアル商 $I:\langle h\rangle\subset\mathbb{C}[x]$ に存在する．

この補題より，局所環でのイデアル $\mathcal{I}_O$ のイデアル所属問題は次のように解くことができる．

Algorithm 1.

入力: $f_1,f_2,\dots,f_s$: $\{x\in X|f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_s(x)=0\}=\{O\}$ を満たす $\mathbb{C}[x]$ の多項式,
h: $\mathbb{C}[x]$ の多項式.

出力: $h\in\langle f_1,\dots,f_s\rangle_{\{O\}}$ もしくは $h\notin\langle f_1,\dots,f_s\rangle_{\{O\}}$ の判定.

1. $Q\leftarrow$ 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ でイデアル商 $\langle f_1,\dots,f_s\rangle:\langle h\rangle$ の基底を計算する．
2. もし，Q に $g(O)\neq 0$ となる g が存在すれば，$h\in\langle f_1,\dots,f_s\rangle_{\{O\}}$ である．存在しなければ，$h\notin\langle f_1,\dots,f_s\rangle_{\{O\}}$ である．

多項式環でのイデアル商 $\langle f_1,\dots,f_s\rangle:\langle h\rangle$ の基底はグレブナー基底を用いることで計算可能である ([2])．

例 2 多項式 $f=x^3y+xy^4+x^2y^3\in\mathbb{C}[x.y]$ は原点に孤立特異点を持つ．$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y+y^4+2xy^3$，$\frac{\partial f}{\partial y}=x^3+4xy^3+3x^2y^2$ より生成されるイデアル $\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x}\rangle_{\{O\}}\subset\mathbb{C}\{x,y\}$ のイデアル所属問題を考える．

多項式 $h_1=x^5+y^8$ が $\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x}\rangle_{\{O\}}$ に所属するかどうかを Algorithm 1 を使って判定する．まず，イデアル商 $\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x}\rangle:\langle h_1\rangle\subset\mathbb{C}[x,y]$ の基底を計算する．全次数辞書式項順序 $(x\succ y)$ で計算すると，$\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x}\rangle:\langle h_1\rangle$ のグレブナー基底 G は

$$G=\{g_1=35y-121,g_2=245x+1331\}$$

となる．ここで，$g_1(0,0)=-121\neq 0$ より，$h_1\in\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x}\rangle_{\{O\}}$ であることがわかる．

次に，$h_2=x^4+y^7$ についてみる．イデアル商 $\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x}\rangle:\langle h_2\rangle\subset\mathbb{C}[x,y]$ の基底を計算する．全次数辞書式項順序 $(x\succ y)$ で計算すると，$\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x}\rangle:\langle h_2\rangle$ のグレブナー基底 G' は

$$G'=\{g_3=7x+11y,g_4=35y^2-121y\}$$

である．$g_3(0,0)=g_4(0,0)=0$ であるので，$h_2\notin\in\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x}\rangle_{\{O\}}$ であることがわかる． ∎

局所環でのイデアル所属問題として，論文 [3, 6, 10, 11] で紹介されている局所環でのイデアル所属問題を解く方法は，先ず $f_1,\dots,f_s$ で生成されるイデアルのスタンダード基底 G を計算し，その後 h を G で割り (Mora の tangent cone アルゴリズム)，その割り算の余りが 0 ならば所属，0 で無いならば所属してな

いと判定するものである．ここでは，この方法を**従来の方法**と呼ぶこととする．従来の方法と Algorithm 1 の大きな違いは，従来の方法は全ての計算を局所環で行うものであるが，Algorithm 1 は局所環の問題を多項式環における計算のみで解くことにある．一般に多項式環での計算は，局所環での計算より計算量が小さいことから Algorithm 1 は効率的であると考えられる．

従来の方法と Algorithm 1 を計算機代数システム SINGULAR に実装し計算時間を比較した．使用した計算機は PC [OS: Windows7 (64bit), CPU: Intel(R) Core i7-2600 @ 3.4GHz, RAM: 8GB] である．表 1 の数値は CPU 秒を表し，$>1h$ は 1 時間以上を表している．また，表 1 の計算実験ではすべて $h \in \langle F \rangle$ である．実験で使用した多項式は次である．従来の方法の項順序は局所全次数辞書式項順序 (x,y,z) を使用し，Algorithm 1 では (大域) 全次数辞書式項順序 (x,y,z) を使用した．

$$
\begin{aligned}
g_1 &= (y^4+xz^3+x^3)^2+y^8+8xy^7,\\
g_2 &= (y^{13}+x^3)^2+3y^{14}-2x^3y^{20},\\
g_3 &= (x^2y+x^2z+x^2y+y^4+z^4)^3+2x^3y^2z,\\
g_4 &= (x^3+yz^2+xy^9+y^{14})^2+xy^{29},\\
g_5 &= (x^2z+yz^2+y^5+y^3z)^2+z^5+x^6y+x^3y^2z^2,\\
g_6 &= (y^4+xz^3+x^3)^2+x^5+y^5z^4,\\
g_7 &= (x^4+xz^3+x^3)^2+y^8+z^9+8xy^7,\\
g_8 &= (y^4+xz^3+x^3)^2+x^5+y^5z^4+x^2y^3z^3.
\end{aligned}
$$

	F	h	従来の方法	Algorithm 1
1	$\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}, \frac{\partial g_1}{\partial z}$	$x^{15}+y^{30}$	0	0.014
2	$\frac{\partial g_2}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial y}$	$x^{20}+y^{30}$	0	0.940
3	$\frac{\partial g_3}{\partial x}, \frac{\partial g_3}{\partial y}, \frac{\partial g_3}{\partial z}$	$x^{15}y^{20}z^2$	0	0.140
4	$\frac{\partial g_4}{\partial x}, \frac{\partial g_4}{\partial y}, \frac{\partial g_4}{\partial z}$	$x^{15}y^{40}z^2$	$>1h$	7.99
5	$\frac{\partial g_5}{\partial x}, \frac{\partial g_5}{\partial y}, \frac{\partial g_5}{\partial z}$	$x^{15}+x^{16}+xy^{10}z^{14}$	$>1h$	12.200
6	$\frac{\partial g_6}{\partial x}, \frac{\partial g_6}{\partial y}, \frac{\partial g_6}{\partial z}$	$x^{30}y^{20}$	$>1h$	92.730
7	$\frac{\partial g_7}{\partial x}, \frac{\partial g_7}{\partial y}, \frac{\partial g_7}{\partial z}$	$x^{15}+y^{30}$	$>1h$	168.570
8	$\frac{\partial g_8}{\partial x}, \frac{\partial g_8}{\partial y}, \frac{\partial g_8}{\partial z}$	$x^{20}+y^{20}$	$>1h$	416.650

表 1: イデアル所属問題

表 1 から分かるように Algorithm 1 は従来の方法と比べ効率的である．この計算実験を詳しく解析すると，問題 4〜8 において従来の方法は $\langle F \rangle$ のスタンダード基底計算に時間がかかっている．実際この問題の場合 1 時間以上経過してもスタンダード基底は出力されない．従来の方法では，このスタンダード基底計算が多大に計算効率に影響を及ぼしている．しかし，Algorithm 1 はイデアル商の計算を多項式環で行っているのでスタンダード基底計算は必要ない．Algorithm 1 の計算のメインはグレブナー基底計算であり，グレブナー基底計算はスタンダード基底計算と違って，多くの計算テクニックを使うことができるので効率的である．

3 拡張イデアル所属問題

拡張イデアル所属問題を考える．前章と同様に，$\mathbb{C}^n$ の原点 O の開近傍を X として，F を s 個の多項式 $f_1, f_2, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x]$ の集合とし，これら s 個の多項式は $\{x \in X | f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_s(x) = 0\} = \{O\}$ を満たすと仮定する．また，$\mathcal{I}_O = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle_{(O)}$ を局所環 $\mathbb{C}\{x\}$ で $f_1, f_2, \ldots, f_s$ により生成されるイデア

ルとし，$I=\langle f_1,\dots,f_s\rangle$ を多項式環 $\mathbb{C}[x]$ で $f_1,f_2,\dots,f_s$ により生成されるイデアルとする．今，$\mathfrak{m}$ により局所環 $\mathbb{C}\{x\}$ における極大イデアル $\langle x_1,x_2,\dots,x_n\rangle$ を表す．

もし，多項式 $h\in\mathbb{C}[x]$ がイデアル $\mathcal{I}_O$ に所属していれば，$q_1,q_2,\dots,q_s\in\mathbb{C}\{x\}$ が存在し

$$h=q_1f_1+q_2f_2+\cdots+q_sf_s$$

と表すことができる．この $q_1,q_2,\dots,q_s$ を効率的に求めるアイデアは，前章と同様に多項式環でのイデアル商の計算である．すなわち，補題 1 の形を変えると次となる．

補題 3. 多項式 $h\in\mathbb{C}[x]$ を冪級数とみなしたとき，h はイデアル $\mathcal{I}_O=\langle f_1,f_2,\dots,f_s\rangle_{\{O\}}\subset\mathbb{C}\{x\}$ に属すとする．このとき，多項式 g であり

(i) $g\notin\mathfrak{m}$,

(ii) $g\in I:\langle h\rangle$

を満たすものが存在する．ただし，$I:\langle h\rangle=\{g\in\mathbb{C}[x]\mid gh\in I\}$ である．

補題より，gh は多項式 $p_1,p_2,\dots,p_r\in\mathbb{C}[x]$ により

$$gh=p_1f_1+p_2f_2+\cdots+p_sf_s$$

と表すことができる．ここで，条件 $g(O)\neq 0$ から $q_i=\dfrac{p_i}{g}$ $(i=1,2,\dots,s)$ とすると，これは $\mathbb{C}\{x\}$ の元となる．つまり，多項式 $g,p_1,p_2,\dots,p_s$ が得られれば，拡張イデアル所属問題は次のように解くことが可能である

$$h=\frac{p_1}{g}f_1+\frac{p_2}{g}f_2+\cdots+\frac{p_s}{g}f_s.$$

この分母 g はイデアル商から計算可能であり，多項式 $p_1,p_2,\dots,p_s$ は拡張グレブナー基底アルゴリズム (Chapter 5 [1]) または $gh,f_1,\dots,f_s$ の syzygy から計算可能である．拡張グレブナー基底アルゴリズムと syzygy 計算は本質的に同じなので，ここでは syzygy を用いた方法を紹介する．

Algorithm 2.

入力: $f_1,f_2,\dots,f_s$: $\mathbb{C}[x]$ の多項式で $\{x\in X|f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_s(x)=0\}=\{O\}$ を満たす．
　h: $h\in\langle f_1,\dots,f_s\rangle_{\{O\}}\subset\mathbb{C}\{x\}$ となる $\mathbb{C}[x]$ の多項式．(項順序は固定する)

出力: $q_1,\dots,q_s$: $h=q_1f_1+\cdots+q_sf_s$ を満たす収束冪級数．

1. $Q\leftarrow$ 多項式環 $\mathbb{C}[x]$ において，イデアル商 $\langle f_1,\dots,f_s\rangle:\langle h\rangle$ の基底を計算する．
2. $g\leftarrow Q$ から $g(O)\neq 0$ となる g をとる．
3. $\mathrm{Syz}\leftarrow gh,f_1,\dots,f_s$ より生成される syzygy 加群の POT 項順序 [3, 6] に関するグレブナー基底 Syz を計算する．
4. $(c_0,c_1,\dots,c_s)\leftarrow$ Syz から第一成分がゼロでない定数である元 $(c_0,c_1,\dots,c_s)$ をとる．
5. 各 $i\in\{1,\dots,s\}$ において，$p_i=-\dfrac{c_i}{c_0}$ とする．
6. 各 $i\in\{1,\dots,s\}$ において，$q_i=\dfrac{p_i}{g}$ とする．

(注意) syzygy 加群のグレブナー基底計算は計算機代数システム Singular と Risa/Asir にすでに実装されており計算可能である．また，$gh\in\langle f_1,\dots,f_s\rangle\subset\mathbb{C}[x]$ であるので，$gh,f_1,\dots,f_s$ の syzygy 加群のグレブ

ナー基底の元の中には必ず第一成分がゼロでない定数のものが存在する.

このアルゴリズムは，局所環 $\mathbb{C}\{x\}$ での問題が多項式環 $\mathbb{C}[x]$ で計算可能であることを示している画期的なものである.

例 4 多項式 $f = x^4y + y^8 + x^2y^5$ で定義されている N_{25} 特異点を考える．このとき，$h = x^7$ は $\mathcal{I}_O = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle_{\{O\}} \subset \mathbb{C}\{x,y\}$ に所属している．多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ での辞書式項順序 $x \succ y$ におけるイデアル商 $\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle : \langle x^7 \rangle$ の基底は $\{9y-32, 9x^2+16y^3\}$ である．$g = 9y-32$ とし，$(9y-32)x^7, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ の syzygy 加群の POT に関するグレブナー基底は次となる.

$$\begin{aligned}&\{(2, 128y^6 + 88x^2y^3 + 5x^4, -32xy^4 - 64x^3 - 2x^3y),\\&(2, 128y^6 - 40y^7 + 88x^2y^3 - 25x^2y^4, -32xy^4 + 10xy^5 - 64x^3 + 18x^3y)\}.\end{aligned}$$

ここで，2 つのベクトルの第一成分は共にゼロでない定数であるのでどちらのベクトルをとっても問題なく拡張イデアル所属問題を解くことができる．ここでは，1 つ目のベクトルをとる．そのとき，x^7 は $\mathbb{C}\{x,y\}$ において，次のように表すことができる.

$$x^7 = \frac{128y^6 + 88x^2y^3 + 5x^4}{-2(32-9y)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{-32xy^4 - 64x^3 - 2x^3y}{-2(32-9y)} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

∎

局所環 $\mathbb{C}\{x\}$ において，$h, f_1, f_2, \ldots, f_s$ の syzygy 加群のスタンダード基底を計算し，同様の変形をすることにより拡張イデアル所属問題を解くことは可能である．この方法をここでは**従来の方法**と呼ぶことにする.

著者は Algorithm 2 を計算機代数システム SINGULAR に実装し，従来の方法（SINGULAR 利用）と比較した．使用した計算機は前章同様に PC [OS: Windows7 (64bit), CPU: Intel(R) Core i7-2600 @ 3.4GHz, RAM: 8GB] である．表 2 の数値は CPU 秒を表し，$> 20m$ は 20 分以上を表している．表 2 の問題では，すべて $h \in \langle F \rangle$ である．実験で使用した多項式は表 2 の次に書かれている $f_1, f_2, \ldots, f_8$ である．従来の方法は項順序は局所全次数辞書式項順序 (x,y,z) を使用し，Algorithm 2 では (大域) 全次数辞書式項順序 (x,y,z) を使用した.

	F	h	従来の方法	Algorithm 2
1	$\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z}$	z^{20}	0.040	0.040
2	$\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$	x^{16}	0.460	0.030
3	$\frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial z}$	$x^{100} + y^{100}$	0.220	0.180
4	$\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z}$	$5x^{10}y^{30} + x^3z^{20}$	88.510	1.090
5	$\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$	$x^{15} + y^{30}$	$> 20m$	0.060
6	$\frac{\partial f_4}{\partial x}, \frac{\partial f_4}{\partial y}$	$2x^{15} - xy^{20}$	$> 20m$	1.420
7	$\frac{\partial f_5}{\partial x}, \frac{\partial f_5}{\partial y}, \frac{\partial f_5}{\partial z}$	$x^{15} + x^{16} + xy^{10}z^{14}$	$> 20m$	12.390
8	$\frac{\partial f_6}{\partial x}, \frac{\partial f_6}{\partial y}, \frac{\partial f_6}{\partial z}$	$2x^{12}y^{16}z^2 - 3z^{20}$	$> 20m$	19.090
9	$\frac{\partial f_7}{\partial x}, \frac{\partial f_7}{\partial y}, \frac{\partial f_7}{\partial z}$	$x^{30}y^{20}$	$> 20m$	124.175
10	$\frac{\partial f_8}{\partial x}, \frac{\partial f_8}{\partial y}, \frac{\partial f_8}{\partial z}$	$x^{20} + y^{20}$	$> 20m$	398.990

表 2: 拡張イデアル所属問題

$f_1 = (y^4 + xz^3 + x^3)^2 + y^8 + z^9 + 8xy^7,$
$f_2 = (y^{13} + x^3)^2 + 3y^{14} - 2x^3y^{20},$

$$f_3 = (x^3 + xz^2 + xy^3 + zy^3)^3 + xz^8 + 4xy^{12},$$
$$f_4 = (x^5 + y^7)^2 + 3y^{14} + 3x^{10}y^5 - 2xy^{14},$$
$$f_5 = (x^2 + yz^2 + y^5 + y^3z)^2 + z^5 + x^6y + x^3y^2z^2,$$
$$f_6 = (x^2y + z^4 + y^5)^2 + x^5 + y^5z^4 + x^2y^3z^3,$$
$$f_7 = (y^4 + xz^3 + x^3)^2 + x^5 + y^5z^4,$$
$$f_8 = (y^4 + xz^3 + x^3)^2 + x^5 + y^5z^4 + x^2y^3z^3.$$

表 2 から分かるように Algorithm 2 は従来の方法と比べ効率的である．計算実験の結果を詳しく解析すると，問題 4〜8 において従来の方法は syzygy 加群のスタンダード基底計算に時間がかかっている．実際 20 分以上経過してもスタンダード基底は出力されない．イデアル所属問題の場合と同様にこ従来の方法は，syzygy 加群のスタンダード基底計算が多大に計算効率に影響を及ぼしている．しかし，Algorithm 2 はイデアル商の計算を使うことで，多項式環での syzygy 加群のグレブナー基底の計算に持ち込んでいる．グレブナー基底計算はスタンダード基底計算と違って，多くの計算テクニックを使うことができるので Algorithm 2 は前章の Algorithm 1 と同様に効率的である．

4 拡張について

前章までの仮定として，多項式 $f_1, f_2, \ldots, f_s$ は孤立した共通ゼロ点を原点に持つとした (i.e., $\{x \in X | f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_s(x) = 0\} = \{O\}$)．しかしながら，原点でなくとも孤立した共通ゼロ点を持てば同じような議論は可能である．

$\mathbb{C}^n$ の点 $A = (a_1, \ldots, a_n)$ の開近傍を X として，F を s 個の多項式 $f_1, f_2, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x]$ の集合で，これら s 個の多項式は $\{x \in X_A | f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_s(x) = 0\} = \{A\}$ を満たすと仮定する．また，$\mathbb{C}\{x-a\} = \{f/g | f, g \in \mathbb{C}[x], g(a) \neq 0, a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n\}$ とし，$\mathcal{I}_A = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle_{\{A\}}$ を局所環 $\mathbb{C}\{x-a\}$ で $f_1, f_2, \ldots, f_s$ により生成されるイデアルとし，$I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ を多項式環 $\mathbb{C}[x]$ で $f_1, f_2, \ldots, f_s$ により生成されるイデアルとする．また，局所環 $\mathbb{C}\{x-a\}$ の極大イデアル $\langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n \rangle$ を $\mathfrak{m}_A$ で表す．このとき，次が成り立つ．

補題 5 多項式 $h \in \mathbb{C}[x]$ を冪級数とみなしたとき，h がイデアル $\mathcal{I}_A = \langle f_1, f_2, \ldots, f_s \rangle_{\{A\}}$ に属すとする．このとき，

(i) $g \notin \mathfrak{m}_A$,

(ii) $g \in I : \langle h \rangle$

を満たすものが存在する．

Algorithm 1 と Algorithm 2 と同様に，イデアル商 $I : \langle h \rangle$ の基底を計算し，点 A でゼロになるものが存在するかどうかをチェックすれば，あとは同じ方法でイデアル所属問題と拡張イデアル所属問題を解くことができる．

Algorithm 1 と Algorithm 2 は，多項式 $f_1, f_2, \ldots, f_s, h$ がパラメータを含む場合に対しても自然に拡張できる．

パラメータ付きグレブナー基底計算アルゴリズムは論文 [5, 7, 8, 9, 13, 15, 16] で紹介されており，計算機にも実装されている．このパラメータ付きグレブナー基底を使うことによって，パラメータ付きイデアル商の計算が可能となるので，Algorithm 1 はパラメータ付きの場合に簡単に拡張可能である．しかし，効率

的なパラメータ付きスタンダード基底計算方法，パラメータ付き Mora の tangent cone アルゴリズムは現存しないので，従来の方法をそのままパラメータ付きに拡張することはすくなくとも現時点では極めて困難であると思われる．

パラメータ付き syzygy 計算アルゴリズムは論文 [12] により紹介されていると共に実装も存在する．このことより，Algorithm 2 はパラメータ付きの場合に簡単に拡張可能である．しかしながら，従来の方法は先に述べたイデアル所属問題と同じ理由により，今現在は簡単には拡張出来ない．

謝辞

本研究において第一著者は 2015 年度徳島大学総合科学部創生研究プロジェクト経費，日本学術振興会科学研究補助金 若手研究 (B) 課題番号 15K17513 の助成を受けております．第二著者は日本学術振興会科学研究補助金 基盤研究 (C) 課題番号 15K04891 の助成を受けております．

参 考 文 献

[1] Becker, T., Weispfenning, V.: Gröbner bases, Springer (1992)

[2] Cox, D., Little, J., O'Shea, D.: Ideals, Varieties and Algorithms, 3rd edn. Springer (2007)

[3] Cox, D., Little, J., O'Shea, D.: Using Algebraic Geometry. Springer (1998)

[4] Decker, W., Greuel, G.-M., Pfister, G., Schönemann, H. : SINGULAR 3-1-6 - A computer algebra system for polynomial computations. (2012) `http://www.singular.uni-kl.de`

[5] Dolzmann, A., Sturm, T.: Redlog: Computer algebra meets computer logic. ACM SIGSAM Bulletinn **31**, 2–9 (1997)

[6] Greuel, G.-M., Pfister, G.: A Singular Introduction to Commutative Algebra, 2nd edn. Springer (2008)

[7] Kapur, D., Sun, D., Wang, D.: A new algorithm for computing comprehensive Gröbner systems. In: Proc. ISSAC 2010, pp. 29–36. ACM (2010)

[8] Manubens, M. Montes, A.: Improving DISPGB algorithm using the discriminant ideal. Journal of Symbolic Computation **41**, 1245–1263, (2006)

[9] Montes, A., Wibmer, M.: Gröbner bases for polynomial systems with parameters. Journal of Symbolic Computation **45**, 1391–1425 (2010)

[10] Mora, T.: An algorithm to compute the equations of tangent cones. In: EUROCAM 1982. LNCS, vol. **144**, pp. 158–165, Springer, Heidelberg (1982)

[11] Mora, T., Pfister, G., Traverso, T.: An introduction to the tangent cone algorithm. Adv. in Computing Research, issued in robotics and nonlinear geometry **6**, 199-270, (1992)

[12] Nabeshima, K.: On the computation of parametric Gröbner bases for modules and syzygies. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics **27**, 217–238, (2010)

[13] Nabeshima, K.: Stability conditions of monomial bases and comprehensive Gröbner systems. In: Proc. CASC 2012, LNCS vol. **7442**, pp. 248–259, Springer (2012)

[14] Noro, M., Takeshima, T.: Risa/Asir - A computer algebra system. In: Proc. ISSAC 1992, pp. 387–396. ACM (1992) `http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html`

[15] Suzuki, A., Sato, Y.: A simple algorithm to compute comprehensive Gröbner bases using Gröbner Bases. In: Proc. ISSAC 2006, pp. 326–331. ACM, (2006)

[16] Weispfenning, V.: Comprehensive Gröbner bases. Journal of Symbolic Computation **36**, 669–683 (1992)