数理解析研究所講究録
第2054巻 2017年 162-167



# 2根を指定した場合の最近接多項式
# The nearest polynomial with two given zeros

櫻井　優太 *
YUTA SAKURAI
東京理科大学大学院
GRADUATE SCHOOL, TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE

関川　浩 †
HIROSHI SEKIGAWA
東京理科大学
TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE

**Abstract**

For a given real univariate polynomial $f$ and given two distinct real numbers $z_1$ and $z_2$, we consider a problem of finding the nearest real univariate polynomial $\tilde{f}$ with $z_1$ and $z_2$ as zeros. Here, the distance between $f$ and $\tilde{f}$ is measured by the 2-norm of the vector of coefficients of $\tilde{f}-f$.

## 1 はじめに

最近接多項式とは、観測データや計算の誤差などから係数がずれ、本来の性質を満たさなくなった多項式を、性質を満たす最も近い多項式に復元したものである。注目する性質は、与えられた点で 0 になる [3]、重複零点を持つ [4]、二つの多項式の GCD が 1 次以上 [1] などがあげられる。また、二つの多項式が互いに素なら係数の微小な変動に対しても互いに素である性質が保たれる。どのくらいの変動までなら互いに素であるか興味があるが、その限界は最近接多項式までの距離である。本稿では与えられた点で 0 になるという性質に注目し、最近接多項式までの距離と最近接多項式の構成について零点を一つ指定した場合から二つの場合へ拡張する。本稿の構成は以下の通りである。第 2 章では先行研究である Stetter の定理 (零点を一つ指定した場合) について説明し、第 3 章では Stetter の定理を、零点を二つ指定した場合に拡張する。最後にまとめと今後の課題を述べる。

## 2 零点を一つ指定した場合

この章では主に先行研究である Stetter の定理について説明する。定理を説明する前に、双対ノルムや零点を一つ指定した場合の最近接多項式などを定義していく。

### 2.1 最近接多項式

$\boldsymbol{V}$ を高々$n$ 次の 1 変数複素係数多項式のなす線形空間（$n+1$ 次元の複素線形空間）とし、与えられた多項式を $f \in \boldsymbol{V}$ とする。また、$\|f\|$ は $f$ の係数ベクトルのノルムとする。このとき、零点を一つ指定した場合の最近接多項式を次のように定義する。

*1414608@alumni.tus.ac.jp
†sekigawa@rs.tus.ac.jp

**定義 1 (零点を一つ指定した場合の最近接多項式)**
$f \in \boldsymbol{V}$ とする。$z \in \boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{V}$ のノルム $\|\cdot\|$ に対し、$\tilde{f}(z)=0$ かつ $\|\tilde{f}-f\|$ が最小となる $\tilde{f} \in \boldsymbol{V}$ を $f$ の最近接多項式という。

**定義 2 (双対ノルム)**
$\|\cdot\|$ を $\boldsymbol{C}^{n+1}$ のノルム、$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^{n+1}$ とする。以下の $\|\cdot\|^*$ を $\|\cdot\|$ の双対ノルムと呼ぶ。

$$\|\boldsymbol{v}^T\|^* := \sup_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}^{n+1},\boldsymbol{u}\neq 0} \frac{|\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}|}{\|\boldsymbol{u}\|} = \sup_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}^{n+1},\|\boldsymbol{u}\|=1} |\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}|$$

また、双対ノルムの双対ノルムは元のノルムになる。元のノルムが $p$ ノルム $\|\cdot\|_p$ のとき、双対ノルムは $q$ ノルム $\|\cdot\|_q$ となる。ただし、$p$ と $q$ の関係は以下の通りである。

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \ (1 \leq p,q \leq \infty)$$

なお、$1/\infty=0$、$1/0=\infty$ とみなす。

## 2.2 Stetter の定理

$\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,\dots,a_n)$, $\boldsymbol{x}=(1,x,x^2,x^3,\dots,x^n)^T$ とする。与えられた多項式を $f(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ とし、以下の多項式を考える。

$$\tilde{f}(x)=\sum_{j=0}^{n}(a_j+\Delta a_j)x^j=\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$$

ただし、$\tilde{\boldsymbol{a}}=(a_0+\Delta a_0, a_1+\Delta a_1,\dots,a_n+\Delta a_n)$ とする。

**定理 3 (Stetter の定理 [3])**
$f \in \boldsymbol{V}$、定数 $z$ $(\in \boldsymbol{C})$ が与えられたとき、$\tilde{f}(z)=0$ ならば以下の評価式が成り立つ。

$$\|\Delta \boldsymbol{a}^T\|^* \geq \frac{|f(z)|}{\|\boldsymbol{z}\|}$$

ただし、$\Delta\boldsymbol{a}=(\Delta a_0,\Delta a_1,\dots,\Delta a_n)$、$\boldsymbol{z}=(1,z,z^2,\dots,z^n)^T \in \boldsymbol{C}^{n+1}$ とし、$\tilde{f}$ と $\Delta a_0,\Delta a_1,\dots,\Delta a_n$ は上記の通りである。

証明は [2] を参照のこと。

# 3 零点を二つ指定した場合

この章では Stetter の定理を、零点を二つ指定した場合へ拡張した時の最近接多項式の構成方法と最近接多項式までの距離について考えていく。また、第 2 章では複素係数多項式で考えていたが、以下では実係数多項式で考えていく。

### 3.1 最近接多項式

Stetter の定理では任意のノルムであったものを 2 ノルムに限定し、零点を二つ指定した場合に不等式を拡張する。$\boldsymbol{V}$ を高々$n$ 次の実係数 1 変数多項式全体のなす線形空間 ($n+1$ 次元の実線形空間) とし、与えられた多項式を $f \in \boldsymbol{V}$ とする。また、$\|f\|$ は $f$ の係数ベクトルのノルムとする。このとき、零点を二つ指定した場合の最近接多項式の定義は以下の通りである。

**定義 4 (最近接多項式の定義（零点を二つ指定した場合）)**
$f \in \boldsymbol{V}$ とする。$z_1, z_2 \in \boldsymbol{R}$ ($z_1 \neq z_2$) と $\boldsymbol{V}$ のノルム $\|\cdot\|$ に対し、$\tilde{f}(z_1) = \tilde{f}(z_2) = 0$ かつ $\|\tilde{f} - f\|$ が最小となる $\tilde{f} \in \boldsymbol{V}$ を $f$ の最近接多項式という。

Stetter の定理では一般のノルムであったが、以降は 2 ノルムで考えていく。

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 \in \boldsymbol{V}$$

に対し、$f$ と $g$ の内積は以下のように定義する。

$$(a_0, \ldots, a_n) \cdot (b_0, \ldots, b_n) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

このとき、

$$\|f\|_2 = \sqrt{(a_0, \ldots, a_n) \cdot (a_0, \ldots, a_n)}.$$

指定された二つの零点を $z_1$, $z_2 \in \boldsymbol{R}$ ($z_1 \neq z_2$) とし、二つの零点 $z_1$、$z_2$ を持つような高々$n$ 次の実係数 1 変数多項式全体 ($n-1$ 次元の実線形空間) を $\boldsymbol{V}_1$ とする。$\boldsymbol{V}_2$ を $\boldsymbol{V}_1$ の直交補空間とする。このとき $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1 \bigoplus \boldsymbol{V}_2$ と直和分解で表すことができる。$f \in \boldsymbol{V}$ は

$$f = f_1 + f_2 \quad (f_1 \in \boldsymbol{V}_1, f_2 \in \boldsymbol{V}_2)$$

と一意に書ける。このとき、$f_1$ が $z_1$, $z_2$ を零点とする $f$ の最近接多項式であり、最近接多項式までの距離が $\|f_1 - f\|_2 = \|f_2\|_2$ となる。

### 3.2 前処理

$f_2$ が求まれば、最近接多項式と最近接多項式までの距離を求めることができる。そのまま計算を行うと、次数 $n$ に依存する面倒な計算になるため、前処理を行う。$f(x)$ を $(x-z_1)(x-z_2)$ で割り、商を $q(x)$、剰余を $sx+t$ とすると、

$$f(x) = (x-z_1)(x-z_2)q(x) + sx + t$$

となる。このとき、$f(z_1) = sz_1 + t,\ f(z_2) = sz_2 + t$ より、$s$ と $t$ が求まる。

$$s = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}, \qquad t = -\frac{z_2 f(z_1) - z_1 f(z_2)}{z_1 - z_2}.$$

$(x-z_1)(x-z_2)q(x) \in \boldsymbol{V}_1$ であるから、$sx + t = g_1 + g_2$ ($g_1 \in \boldsymbol{V}_1,\ g_2 \in \boldsymbol{V}_2$) と分解すると、$g_2 = f_2$ であることがわかる。よって $g_2$ を求めることができれば、最近接多項式までの距離を求めることができ、さらに $f_1 = f - g_2$ を計算することができる。以下、多項式とその係数ベクトルを同一視する。$\boldsymbol{V}$ の基底を $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ ととる。$\boldsymbol{W}$ を高々$n-2$ 次の実係数 1 変数多項式の全体とし基底を $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-2}\}$ ととる。このとき、相異なる二つの実数 $z_1$、$z_2$ を零点に持つような高々$n$ 次の実係数 1 変数多項式の全体

$\boldsymbol{V}_1$ は $\boldsymbol{W}$ と同型である。$\boldsymbol{W} \ni h \longmapsto (x-z_1)(x-z_2)h \in \boldsymbol{V}_1$ は同型写像であるので、$\boldsymbol{V}_1$ の基底として $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}\}$ を次のようにとる。

$$\boldsymbol{v}_i = ((x-z_1)(x-z_2)x^{i-1}\text{の係数ベクトル})$$

$\boldsymbol{V}_2$ の基底として $\{\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_{n+1}\}$ を採用する。$\boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{v}_{n+1}$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ と直交するような基底である。$\boldsymbol{v}_n = (s_0, \ldots, s_n)$ とおくと、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ と $\boldsymbol{v}_n$ との内積は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_n &= s_2 - (z_1+z_2)s_1 + z_1 z_2 s_0 = 0, \\
\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_n &= s_3 - (z_1+z_2)s_2 + z_1 z_2 s_1 = 0, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{v}_{n-1} \cdot \boldsymbol{v}_n &= s_n - (z_1+z_2)s_{n-1} + z_1 z_2 s_{n-2} = 0.
\end{aligned}$$

$s_0 = 0, s_1 = 1$ を第一式に代入すると $s_2$ が決まる。次に $s_1, s_2$ を第二式に代入すると $s_3$ が決まる。以下同様にして順番に $s_n$ まで決まった結果は以下の通りである。

$$\boldsymbol{v}_n = \left(0, 1, \frac{z_1^2 - z_2^2}{z_1 - z_2}, \ldots, \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2}\right) \tag{1}$$

また、$\boldsymbol{v}_{n+1} = (t_0, \ldots, t_n)$ とおくと、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ と $\boldsymbol{v}_{n+1}$ との内積は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_{n+1} &= t_2 - (z_1+z_2)t_1 + z_1 z_2 t_0 = 0, \\
\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_{n+1} &= t_3 - (z_1+z_2)t_2 + z_1 z_2 t_1 = 0, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{v}_{n-1} \cdot \boldsymbol{v}_{n+1} &= t_n - (z_1+z_2)t_{n-1} + z_1 z_2 t_{n-2} = 0.
\end{aligned}$$

$t_0 = -1, t_1 = 0$ から始めて、$\boldsymbol{v}_n$ と同様にして $\boldsymbol{v}_{n+1}$ が決まる。

$$\boldsymbol{v}_{n+1} = \left(-1, 0, z_1 z_2, \frac{z_1 z_2 (z_1^2 - z_2^2)}{z_1 - z_2}, \ldots, \frac{z_1 z_2 (z_1^{n-1} - z_2^{n-1})}{z_1 - z_2}\right) \tag{2}$$

作り方から $\boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{v}_{n+1}$ は線形独立であり、$\boldsymbol{V}_1$ の基底と直交する基底となる。

## 3.3 最近接多項式の構成

剰余 $sx + t$ の係数ベクトルを $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n+1}\}$ の線形結合で表現すると以下の式になる。

$$(t, s, 0, \ldots, 0) = c_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_{n-1}\boldsymbol{v}_{n-1} + c_n \boldsymbol{v}_n + c_{n+1}\boldsymbol{v}_{n+1}$$

$f$ の最近接多項式 $f_1$ は $f_1 = c_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_{n-1}\boldsymbol{v}_{n-1} = f - (c_n \boldsymbol{v}_n + c_{n+1}\boldsymbol{v}_{n+1})$ を計算すれば求まり、最近接多項式 $f_1$ までの距離は $\|c_n \boldsymbol{v}_n + c_{n+1}\boldsymbol{v}_{n+1}\|_2$ を計算すれば求まる。最近接多項式までの距離が Stetter の定理の $|f(z)|/\|\boldsymbol{z}\|$ に当たるので、この距離を求める。

以下の式の両辺と $\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_{n+1}$ の内積をとる。

$$(t, s, 0, \ldots, 0) = c_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_{n-1}\boldsymbol{v}_{n-1} + c_n \boldsymbol{v}_n + c_{n+1}\boldsymbol{v}_{n+1}$$

すると次の連立方程式が得られる。

$$s = c_n(\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{v}_n) + c_{n+1}(\boldsymbol{v}_{n+1} \cdot \boldsymbol{v}_n),$$
$$-t = c_n(\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{v}_{n+1}) + c_{n+1}(\boldsymbol{v}_{n+1} \cdot \boldsymbol{v}_{n+1}).$$

これを解くと

$$c_n = \frac{(\boldsymbol{v}_{n+1} \cdot \boldsymbol{v}_n)s + (\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{v}_n)t}{(\boldsymbol{v}_{n+1} \cdot \boldsymbol{v}_n)^2 - (\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{v}_n)(\boldsymbol{v}_{n+1} \cdot \boldsymbol{v}_{n+1})}, \tag{3}$$

$$c_{n+1} = -\frac{(\boldsymbol{v}_{n+1} \cdot \boldsymbol{v}_{n+1})s + (\boldsymbol{v}_{n+1} \cdot \boldsymbol{v}_n)t}{(\boldsymbol{v}_{n+1} \cdot \boldsymbol{v}_n)^2 - (\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{v}_n)(\boldsymbol{v}_{n+1} \cdot \boldsymbol{v}_{n+1})}. \tag{4}$$

$\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{v}_n$ などを計算するために、$z_1$ や $z_2$ に関する等比級数を次のように $X_n$, $Y_n$, $Z_n$ で表す。

$$X_n = z_1^2 + z_1^4 + \cdots + z_1^{2n} = \frac{z_1^2 - z_1^{2(n+1)}}{1 - z_1^2}$$
$$Y_n = -2(z_1 z_2 + z_1^2 z_2^2 + \cdots + z_1^n z_2^n) = -2z_1 z_2 \frac{(1 - z_1^n z_2^n)}{1 - z_1 z_2}$$
$$Z_n = z_2^2 + z_2^4 + \cdots + z_2^{2n} = \frac{z_2^2 - z_2^{2(n+1)}}{1 - z_2^2}$$

次に $\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{v}_n$ などを $X_n$, $Y_n$, $Z_n$ で表すと以下のようになる。

$$\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{v}_n = \frac{(z_1 - z_2)^2 + (z_1^2 - z_2^2)^2 + (z_1^3 - z_2^3)^2 + \cdots + (z_1^n - z_2^n)^2}{(z_1 - z_2)^2} = \frac{X_n + Y_n + Z_n}{(z_1 - z_2)^2} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{n+1} \cdot \boldsymbol{v}_{n+1} &= 1 + z_1^2 z_2^2 + \frac{z_1^2 z_2^2 (z_1^2 - z_2^2)^2 + \cdots + z_1^2 z_2^2 (z_1^{n-1} - z_2^{n-1})^2}{(z_1 - z_2)^2} \\ &= 1 + \frac{z_1^2 z_2^2 (X_{n-1} + Y_{n-1} + Z_{n-1})}{(z_1 - z_2)^2} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{v}_{n+1} &= \frac{z_1 z_2 (z_1 - z_2)(z_1^2 - z_2^2) + \cdots + z_1 z_2 (z_1^{n-1} - z_2^{n-1})(z_1^n - z_2^n)}{(z_1 - z_2)^2} \\ &= \frac{z_1 z_2 \left( z_1 X_{n-1} + z_2 Z_{n-1} + \dfrac{(z_1 + z_2) Y_{n-1}}{2} \right)}{(z_1 - z_2)^2} \end{aligned} \tag{7}$$

ここで、Mathematica を用いて以下の式を計算した。

$$\|c_n \boldsymbol{v}_n + c_{n+1} \boldsymbol{v}_{n+1}\|_2 \tag{8}$$

これは最近接多項式までの距離のことだったので、零点を二つ指定した場合へ Stetter の定理を拡張することができた。ただし、計算結果は非常に見づらい式で出力されたため、まず、$n = 2, 3, 4$ の計算から距離の予想式を立てた。

$$|z_1 - z_2| \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n} (z_2^i f(z_1) - z_1^i f(z_2))^2}{\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} (z_1^i z_2^i (z_1^j - z_2^j))^2}} \tag{9}$$

予想式 (9) と Mathematica を用いて計算した式 (8) が等しいことを Mathematica を用いて確認した。ところで、式 (5)、(6)、(7) では等比級数の公式を利用したため分母に $1 - z_1$ 等があるが、式 (9) では等比級数の公式ではなく $\sum$ 記号を用いて表したため不都合な式は現れない。

以上をまとめると、以下の定理になる。

**定理 5**
$f \in \boldsymbol{V}$、定数 $z_1 \neq z_2$ $(\in \boldsymbol{R})$ が与えられたとき、$\tilde{f} \in \boldsymbol{V}$、$\tilde{f}(z_1) = \tilde{f}(z_2) = 0$ ならば以下の不等式が成り立つ。

$$\|\tilde{f} - f\|_2 \geq |z_1 - z_2| \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n}(z_2^i f(z_1) - z_1^i f(z_2))^2}{\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j}(z_1^i z_2^i (z_1^j - z_2^j))^2}}$$

さらに、等号を成立させる多項式 $\tilde{f}$ が存在する。

**定理 6**
最近接多項式 $\tilde{f}$ を求めるには式 *(1)*、*(2)*、*(3)*、*(4)* から以下を計算すれば良い。

$$\tilde{f} = f - (c_n \boldsymbol{v}_n + c_{n+1} \boldsymbol{v}_{n+1})$$

# 4 おわりに

Stetter の定理を、実係数 1 変数多項式かつ零点が実数かつ 2 ノルムの場合で零点を二つ指定した場合に拡張した。

今後の課題をいくつか述べる。まず Stetter の定理では、複素係数 1 変数多項式かつ任意のノルムという条件の下、零点を一つ指定した場合の最近接多項式について扱っている。しかし、本稿では 2 ノルムの場合と条件を厳しくした上で零点を二つ指定した場合へ Stetter の定理を拡張したため、複素係数や任意のノルムの場合にも拡張することが課題としてあげられる。また、計算を簡単にするために二つの零点が異なる場合のみを考えたため、重複零点の場合に拡張することが残っている。さらに、Stetter の定理では $f(z)$ と $\boldsymbol{z} = (1, z, z^2, \ldots, z^n)$ で最近接多項式までの距離が簡潔に表せているが、定理 5 では複雑な式であるのでこれを簡潔に表すことが望まれる。例えば、$\boldsymbol{z}_1 = (1, z_1, z_1^2, \ldots, z_1^n)$、$\boldsymbol{z}_2 = (1, z_2, z_2^2, \ldots, z_2^n)$ とすると、根号内の分子は $\|f(z_1)\boldsymbol{z}_2 - f(z_2)\boldsymbol{z}_1\|_2^2$ と簡潔に表せるが、分母は分子とは違って簡潔な表示になりそうもない。最後に、本稿で扱ったのは零点を二つ指定した場合であったが、三つ以上指定した場合がどうなるかも興味がある。

# 謝辞

本研究は科研費 15K00025 の助成を受けたものである。

# 参考文献

[1] Robert M. Corless, Patrizia M. Gianni, Barry M. Trager, and Stephen M. Watt. *The singular value decomposition for polynomial systems*, Proceedings of the 1995 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 195–207, 1995.

[2] Nargol Rezvani and Robert M. Corless, *The nearest polynomial with a given zero, revisited*, ACM SIGSAM Bulletin, 39(3):73–79, 2005.

[3] Hans J. Stetter, *The nearest polynomial with a given zero, and similar problems*, ACM SIGSAM Bulletin, 33(4):2–4, 1999.

[4] Zhi Lihong and Wu Wenda, *Nearest Singular Polynomials*, Journal of Symbolic Computation, 26(6):667–675, 1998.