数理解析研究所講究録
第2055巻 2017年 45-54

Hopf mappings and automorphic forms on orthogonal groups

佐藤文広（津田塾大学数学計算機科学研究所・立教大学）
Fumihiro Sato
Institute for Mathematics and Computer Science, Tsuda College, and Rikkyo University

0 序

T.Ono は 1970 年代後半からの一連の論文において，古典的 Hopf 写像

$$S^3 \longrightarrow S^2, \quad S^7 \longrightarrow S^4, \quad S^{15} \longrightarrow S^8$$

を引き起こす二次写像を $\mathbb{Q}$ 上で考え，そのファイバーに含まれる整数点の個数を明示的に計算した．その結果は，[6, Chap. 7] にまとめて解説されている．

もう少し具体的に説明する．$K=\mathbb{Q}(i)$ をガウス数体，$H=K+Kj$ を $\mathbb{Q}$ 上の Hamilton 四元数体，$C=H+H\omega$ を $\mathbb{Q}$ 上の Cayley 代数とし，$\mathfrak{o}_K=\mathbb{Z}[i]$, $\mathfrak{o}_H$ を Hurwitz 整環，$\mathfrak{o}_C$ を Dickson 整環とする．$R=K,H,C$ として，二次写像 Q を

$$Q: R\times R \longrightarrow \mathbb{Q}\times R, \quad f(x,y)=(N(x)-N(y), 2\overline{x}y)$$

と定義する．Ono は，この写像の整数部分への制限

$$Q_{\mathbb{Z}}: \mathfrak{o}_R\times\mathfrak{o}_R \longrightarrow \mathbb{Z}\times\mathfrak{o}_R$$

を考え，$\rho\in\mathbb{Z}\times\mathfrak{o}_R$ に対し，$Q_z(x,y)=\rho$ の解の個数，すなわち，

$$\sharp Q_{\mathbb{Z}}^{-1}(\rho)$$

を求めることを問題にした．Ono はその明示公式を与えたのである．最も簡単な場合について，結果を掲げておこう．

$K=\mathbb{Q}(i)$ の場合を考える．$K\times K=\mathbb{Q}^4$, $\mathbb{Q}\times K=\mathbb{Q}^3$, $\mathfrak{o}_K\times\mathfrak{o}_K=\mathbb{Z}^4$ と同一視したとき，$Q(\mathfrak{o}_K\times\mathfrak{o}_K)\subset\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}$ であることに注意する．そして，Q は，座標によって，

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2, 2(x_2x_3-x_1x_4), 2(x_1x_3+x_2x_4))$$

と表される．このとき，さらに，

$$(Q(x),Q(x))=(x,x)^2$$

であるから，

$$Q((\mathfrak{o}_K \times \mathfrak{o}_K)) \subset \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \;\middle|\; y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \square \right\}$$

となる．Ono の結果は，次の通りである：

$y \in \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = t^2$ $(t \in \mathbb{N})$ のとき，

$$\sharp Q_{\mathbb{Z}}^{-1}(y) = \sharp \left\{ (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; u^2 + v^2 = \Delta_y \right\} = 4(d_1(\Delta_y) - d_3(\Delta_y))$$

が成り立つ．ここで，

$$\Delta_y = \text{g.c.d.}\left(\frac{1}{2}(t + y_1), \frac{1}{2}(t - y_1), \frac{1}{2}y_2, \frac{1}{2}y_3 \right)$$

である．また，$k = 1, 3$ に対し $d_k(n) = \displaystyle\sum_{\substack{d \mid n \\ d \equiv k \, (\mathrm{mod}\ 4)}} d$ とおいた．

Ono は他の 2 つの場合にも，同様の結果を得ている．Ono のこの研究は，古典的な二次形式の数論における明示的な結果を，二次写像の数論へと拡張する試みであった．このノートでは，この結果を解析的に眺めてみる，すなわち，Ono が与えた $\sharp Q_{\mathbb{Z}}^{-1}(\rho)$ という量（正確には，話を簡単にするため，そのちょっとした修正) を，保型形式のフーリエ係数として解釈する，そして，その一般化を提案することを目的とする．

1 Hopf 写像と Maass 形式

1.1 Maass 逆定理

まず，準備として，議論のカギとなる Maaßの逆定理 ([4]) を思い出しておく．符号 $(1, n+1)$ の直交群（の単位元連結成分） $SO_0(1, n+1)$ の対称空間を

$$\mathfrak{H}_n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; y > 0 \right\} \cong SO_0(1, n+1)/SO(n+1)$$

と実現しておく．Γ を $SO_0(1, n+1)$ の離散部分群で $(x_1, \ldots, x_n)$-空間における格子 L による平行移動を含むものとする．

定義 1 $\mathfrak{H}_n$ 上の Γ-不変で緩増加な関数 $F : \mathfrak{H}_n \to \mathbb{C}$ は，微分方程式

$$\left[y^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + y^{n+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^{1-n} \frac{\partial}{\partial y} \right) - \nu^2 + \frac{n^2}{4} \right] F = 0$$

を満たすとき，**Γ-Maass 形式**といわれる．

Γ が格子 L による平行移動を含むという仮定から，Γ-Maass 形式 F は次の形のフーリエ展開をもつ:

$$F(x, y) = \sum_{\substack{v \in L^* \\ v \neq 0}} a(v) y^{n/2} K_\nu(2\pi |v| y) e^{2\pi i (v, x)} + \begin{cases} a_1 y^{\frac{n}{2}+\nu} + a_2 y^{\frac{n}{2}-\nu} & (\nu \neq 0), \\ a_1 y^{\frac{n}{2}} + a_2 y^{\frac{n}{2}} \log y & (\nu = 0). \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$v, x \in \mathbb{R}^n$ に対し (v, x) で標準的なユークリッド内積を表し，L^* は L の双対格子

$$L^* = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid (x, x^*) \in \mathbb{Z},\ (x \in L)\} \tag{2}$$

を意味する．

一般に，$\mathbb{R}^n$ の格子 L に対し，$SO_0(1, n+1)$ の離散部分群 Γ_L を

$$\Gamma_L := \left\langle y \mapsto \frac{1}{y},\ x \mapsto x + \ell \,\middle|\, \ell \in L \right\rangle$$

によって定める．また，L^* を上と同様に L の双対格子とし，数列 $a : L^* \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^n$ 上の斉次調和多項式 $h(x)$ に対し，ゼータ関数を

$$\xi(s) = \sum_{\substack{v \in L^* \\ v \neq 0}} \frac{a(v)}{(v, v)^s}, \qquad \xi(s; h) = \sum_{\substack{v \in L^* \\ v \neq 0}} \frac{a(v)h(v)}{(v, v)^s}$$

と定義する．ここで h が定数 1 に等しく $\deg h = 0$ の場合，$\xi(s; 1) = \xi(x)$ であることに注意しておく．

定理 1 (Maass) $a(v)$ $(v \in L^* \setminus \{0\})$ がある Γ_L-Maass 形式の (1) の形のフーリエ展開の係数となっているための必要十分条件は

(1) $|a(v)| < C(v, v)$ $(v \in L^* \setminus \{0\})$ を満たす正定数 C が存在する．

(2) $(s - \frac{n+\nu}{2})(s - \frac{n-\nu}{2})\xi(s)$, および，任意の定数でない斉次調和多項式 h に対する $\xi(s; h)$ は位数有限の整関数に解析接続される．

(3) h を d 次調和多項式とするとき，関数等式

$$\Xi\left(\frac{n}{2} + d - s, h\right) = (-1)^d \Xi(s, h),$$
$$\Xi(s, h) := \pi^{-2s}\Gamma\left(s + \frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(s - \frac{\nu}{2}\right)\xi(s; h)$$

が成り立つ．

の 3 条件を満たすことである．また，このとき，フーリエ展開 (1) の定数項の係数 a_1, a_2 は $\xi(s)$ の極における主要部から定まる．

1.2 Hopf 写像から得られる Maass 形式

§0 の設定に戻る．§0 での $\mathbb{Z}$-構造を少し修正して $\mathfrak{o}'$ を R の標準内積に関して自己双対な格子とし，$\mathbb{Z}$ 上の Hopf 写像

$$Q_{\mathbb{Z}} : \mathfrak{o}' \times \mathfrak{o}' \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathfrak{o}'$$

を考える．

定理 2 $n=\dim R+1$ and $L=2\mathbb{Z}\times\mathfrak{o}'$ とし,

$$a(Q,v):=(v,v)^{1/4}\sharp\left(Q_{\mathbb{Z}}^{-1}(2v)\right)\quad (v\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\times\mathfrak{o}', v\neq 0)$$

とおくと, $a(Q,v)$ は $\mathfrak{H}_n$ 上のある Γ_L-Maass 形式のフーリエ係数となる.

§0 で実例として挙げた $R=\mathbb{Q}(i)$, $\mathfrak{o}'=\mathbb{Z}[i]$ の場合, $n=3$ で $Sp(1,1)=Spin(1,4)$ であるから, $Sp(1,1)$ の保型形式

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \frac{y}{2}+\sum_{v\neq 0}a(Q,v)y^{3/2}K_{1/2}(2\pi\,|v|\,y)e^{2\pi i(v,x)} \\ &= \frac{y}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{v\neq 0}a(Q,v)ye^{2\pi i\left((v,x)+i|v|y\right)} \end{aligned}$$

が得られる. この保型形式は Yamauchi-Narita [5] で構成された $Sp(1,1)$ のテータ級数の特殊な場合となっている.

さて, 上の定理の証明は極めて簡単である.

【証明】 まず, $a(Q,v)$ の定義により,

$$\begin{aligned} \xi(s;h) &= \sum_{v\neq 0}\frac{a(Q,v)h(v)}{(v,v)^s}=\sum_{(x,y)\in\mathfrak{o}'\times\mathfrak{o}'\setminus\{(0,0)\}}\frac{h(Q(x,y))}{(Q(x,y),Q(x,y))^{s-1/4}} \\ &= \sum_{(x,y)\neq 0\in\mathfrak{o}'\times\mathfrak{o}'\setminus\{(0,0)\}}\frac{h(Q(x,y))}{(N(x)+N(y))^{2s-1/2}} \\ &= \sum_{(x,y)\neq 0\in\mathfrak{o}'\times\mathfrak{o}'\setminus\{(0,0)\}}\frac{h(Q(x,y))}{(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2)^{2s-1/2}} \end{aligned}$$

となる. ここで球面を球面に写すという Hopf 写像の特徴的な性質

$$(Q(x,y),Q(x,y))=(N(x)-N(y))^2-4N(x)N(y)=(N(x)+N(y))^2$$

を用いた. n 変数, d 次の調和多項式 h を Hopf 写像 Q で引き戻した $h(Q(x,y))$ が $2n$ 変数, $2d$ 次の調和多項式となることは容易に確かめられる. すなわち, 問題とするゼータ関数 $\xi(s;h)$ は, いわゆる, 球関数付きの Epstein ゼータ関数に他ならない. その性質は Epstein [1] や Siegel [9] などでよく知られているから, $\xi(s;h)$ が Maass の逆定理の条件を満たすことを容易にチェックできる. □

2 Hopf 写像の一般化

Hopf 写像を

$$Q:\mathbb{Q}^{2n-2}\longrightarrow\mathbb{Q}^n,\quad Q(w)=(Q_1(w),\ldots,Q_n(w))$$

の形に表す. ここで, $R=K,H,C$ に従って $n=3,5,9$ である. 二次形式 Q_i の行列を S_i $(i=1,\ldots,n)$ と表す. 具体的には, $n=3$ のとき

$$S_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad S_3=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$n=5$ のとき

$$S_1=\begin{pmatrix}1_4 & 0_4\\ 0_4 & -1_4\end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix}0_4 & 1_4\\ 1_4 & 0_4\end{pmatrix},\quad S_3=\begin{pmatrix}0_4 & J_4\\ -J_4 & 0_4\end{pmatrix},\quad S_4=\begin{pmatrix}0_4 & K_4\\ -K_4 & 0_4\end{pmatrix},\quad S_5=\begin{pmatrix}0_4 & H_4\\ -H_4 & 0_4\end{pmatrix},$$

$$J_k=\begin{pmatrix}0_k & -1_k\\ 1_k & 0_k\end{pmatrix}\quad K_4=\begin{pmatrix}J_2 & 0_2\\ 0_2 & -J_2\end{pmatrix}\quad H_4=\begin{pmatrix}0_2 & J_2\\ J_2 & 0_2\end{pmatrix}$$

となる．$n=9$ のときも含めて，

$$\left\{\begin{array}{l} S_1^2=S_2^2=\cdots=S_n^2=1_{2n-2},\\ S_iS_j+S_jS_i=0 \quad (i\neq j)\end{array}\right. \tag{3}$$

が成り立っている．この関係式は，n 変数の正定値二次形式 $v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2$ の Clifford 代数 C_n の生成元 $e_1,\ldots,e_n$ の関係式に他ならない．ここで，$e_1,\ldots,e_n$ は二次形式が定義されている n 次元線型空間の標準的な基底である．したがって，$e_i\longmapsto S_i$ は C_n の $2n-2$ 次元表現を与えている．このことに注目し，任意の n に対し Clifford 代数 C_n の任意の次元の表現

$$\rho: C_n\longrightarrow M(m;\mathbb{R})$$

を考える．必要なら同値な表現にうつることにより，標準的基底の像 $S_i:=\rho(e_i)$ はすべて整数係数の対称行列だとしてよく，さらに (3) を満たしている．この対称行列 $S_1,\ldots,S_n$ を用いて $\mathbb{Q}$ 上定義された二次写像

$$Q=Q_\rho: W:=\mathbb{R}^m\longrightarrow V:=\mathbb{R}^n,\quad Q(w)=({}^t wS_1w,\ldots,{}^t wS_nw)$$

を得ることができる．Clifford 代数 C_n の作用を通じて W には $Spin(n)$ が作用し，一方，V にはベクトル表現として $SO(n)$ を経由して $Spin(n)$ が作用するが，Q はこの 2 つの作用について同変である．名前があった方が便利なので，Q を **Clifford 二次写像**と呼ぶことにする．

予想 C_n の任意の非自明な有限次元表現 $\rho: C_n\longrightarrow M(m;\mathbb{R})$ から得られる二次写像 Q に対し定理 2 の類似が成立し，Q の定めるディオファンタス方程式の情報によってフーリエ係数が与えられるような $Spin(1,n+1)$ の保型形式（Q のテータ級数と呼ぶべきもの）が存在する．

この予想の成立を期待する根拠としては

- $n=3,5,9$ の Hopf 写像の場合に定理 2 が成立していること，に加えて，
- $P(w)=(Q(w),Q(w))$ という W 上の 4 次形式が（一般には概均質ベクトル空間の相対不変式とはならないにもかかわらず，概均質ベクトル空間の理論の基本定理に全く同様の）アルキメデス的素点における局所関数等式を満たすこと (§4 の定理 4, および，Kogiso-S [3] 参照),
- $m=\deg\rho$ が十分大きいとき，V 上の d 次斉次調和多項式 h に対し

$$\xi_\rho(s;h)=\sum_v \frac{a(Q,v)h(v)}{(v,v)^{s+\frac{m-2n}{8}}}, \tag{4}$$

$$a(Q,v)=\prod_p \lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{p^{\ell(m-n)}}\sharp\left\{w\in(\mathbb{Z}/p^\ell\mathbb{Z})^m \;\middle|\; \frac{1}{2}Q(w)\equiv v\,(p^\ell)\right\} \tag{5}$$

は，Maass 逆定理から期待される形の関数等式を満たすこと（ただし，極の位置と位数，極における主要部など，逆定理を適用するに十分な情報はまだ得られていない）

が挙げられる．

この予想を定理 2 のように Maass 逆定理を用いて証明することをもくろむと，W 内の適当な格子 $\mathcal{L}$ をとり，

$$a(Q,v)=(v,v)^{-\frac{m-2n}{8}}\sharp\{w\in\mathcal{L}\mid Q(w)=v\}$$

を係数とするゼータ関数を問題とすることになる．しかし，Hopf 写像の場合とは異なり，一般には $Q^{-1}(v)_{\mathbb{R}}$ はコンパクトではなく，$\sharp\{w\in\mathcal{L}\mid Q(w)=v\}$ は有限値とはならない．この問題を回避する一つの方法は，不定値 2 次形式の場合の種ゼータ関数の類似物である (4) を考察することであるが，上で触れたように，その解析は今のところ不十分である．本稿では，以下，$P(w)=(Q(w),Q(w))$ がある概均質ベクトル空間の相対不変式となる場合を調べる．この場合には，Siegel による不定値二次形式の “measure of representations” を一般化して $a(Q,v)$ を適切に定義できるなど，ゼータ関数の解析を実行する手段が整っているからである．

3 Clifford 二次写像と概均質ベクトル空間

Clifford 代数 C_n の m 次元表現 $\rho: C_n\longrightarrow M(m;\mathbb{R})$ から得られる二次写像 Q に対し，$P(w)=(Q(w),Q(w))$ がある概均質ベクトル空間の相対不変式として実現されるケースは完全に分類され，次の表で与えられる ([3, Theorem 3.2])：

n	C_n	$m=\dim W$	概均質ベクトル空間 $/\mathbb{R}$
1	$2\mathbb{R}$	k_1+k_2	$(GL(1,\mathbb{R})\times SO(k_1,k_2),\mathbb{R}^{k_1+k_2})$
2	$M_2(\mathbb{R})$	$2k$	$(GL(1,\mathbb{C})\times SO(k,\mathbb{C}),\mathbb{C}^k)$
3	$M_2(\mathbb{C})$	$4k$	$(GL(1,\mathbb{H})\times SO^*(2k),\mathbb{H}^k)$
4	$M_2(\mathbb{H})$	$8k$	$(GL(1,\mathbb{R})\times SL(1,\mathbb{H})^2\times GL(k,\mathbb{H}),\mathbb{H}^k\oplus\mathbb{H}^k)$
5	$2M_2(\mathbb{H})$	8	$(GL(1,\mathbb{R})\times SO(8),\mathbb{R}^8)$
6	$M_4(\mathbb{H})$	16	$(SU(4)\times GL(2,\mathbb{C}),M(4,2;\mathbb{C}))$
7	$M_8(\mathbb{C})$	16	$(SO(8)\times GL(2,\mathbb{R}),M(8,2;\mathbb{R}))$
8	$M_{16}(\mathbb{R})$	16	$(GL(1,\mathbb{R})\times SO(8),\mathbb{R}^8)^{\oplus 2}$
9	$2M_{16}(\mathbb{R})$	16	$(GL_1(\mathbb{R})\times SO(16),\mathbb{R}^{16})$

この表が示すように，$P(w)$ が概均質ベクトル空間の相対不変式となるのは例外的であり，概均質ベクトル空間と関係づけられない（$n\geq 10$, ないしは, $5\leq n\leq 9$ で m が極小

でない）ケースこそがむしろ興味深いのであるが，とにかく，実験台として概均質の場合を調べよう．$n=1$ のとき 4 次形式 $P(w)$ は W 上の二次形式の平方であり，この場合はよく知られているから，以下では $n \geq 2$ とする．このとき，表に現れる概均質ベクトル空間は正則であり、次のような共通の特徴をもっている．

(1) 作用する群 G は，コンパクト群 K と Q を不変にする群 H があって $G = GL(1,\mathbb{R}) \times K \times H$ の形をしている．

(2) 概均質ベクトル空間の一般論によるとゼータ関数は実開軌道ごとに定義されるが，$W - \{w \in W \mid P(w) = 0\}$ は連結であり，ただ 1 つのゼータ関数が得られる．

ゼータ関数は，W の格子 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$ を（集合として）不変にする H の数論的部分群 Γ, V 上の斉次調和多項式 $h(v)$ に対し

$$\sum_{\substack{w \in \Gamma \backslash \mathcal{L} \\ Q(w) \neq 0}} \frac{\mu(w) h(Q(w))}{|P(Q(w))|^s} \tag{6}$$

で与えられる．ここで，$\mu(w)$ は Γw の密度，すなわち，概均質ベクトル空間の一般論において定義されているゼータ関数の係数である（詳しくは Kimura [2, §5.2] を見よ）．概均質ベクトル空間のゼータ関数を $h(Q(w))$ のような多項式を係数に取り込んだ形に拡張したものの一般論は [7] で展開されているが，いま扱っている空間の場合には，(2) に加えて

(3) $h(Q(w))$ の K-translate が張る $\mathbb{C}[W]$ の部分空間は K の既約表現を与え，その既約表現は $\mathbb{C}[W]$ に重複度 1 で含まれる

という性質をもつため，関数等式の形はとくにすっきりとしたものになる．

以上のような観察を踏まえた上で，実際になすべきことは次の 3 つである：

(a) 多項式 $h(Q(w))$ 付きの局所ゼータ関数の関数等式を明示的に計算し，関数等式の形が Maass 逆定理からくる要請に正確に従っていることの確認．

(b) 極の位置が，やはり Maass 逆定理からくる要請に正確に従っていることの確認．

(c) とくに，h が定数ではないとき，ゼータ関数が整関数となることの確認．

このうち，(a) については case by case の議論は不要で統一的な証明を与えることができる．しかし，(b), (c) については case by case の計算を避けることができず，現時点では

$$\begin{cases} n=2 \\ k=1,2,3,4 \end{cases} \qquad \begin{cases} n=3 \\ 2 \leq k \end{cases} \qquad \begin{cases} n=4 \\ k=2,3 \end{cases} \tag{$\sharp$}$$

について，チェックの完了していない部分がある．したがって，次節の定理 5, 定理 6 においては ($\sharp$) のケースを除外するが，それは定理は不成立だと主張しているわけではなく，計算が完了していないということを意味しているにすぎない．

4 主結果

では，主結果を述べる．$\mathcal{L}$ で $W(\mathbb{Q})$ に含まれる自己双対格子を表す．L^* は $Q(\mathcal{L})$ で生成される $V(\mathbb{Q})$ の格子である．Γ を $\mathcal{L}$ を（集合として）不変にする H の数論的部分群とする．このとき，

$$a(Q;v) := \frac{1}{(v,v)^{\frac{m-2n}{8}}} \sum_{w \in \Gamma \backslash (Q^{-1}(2v) \cap \mathcal{L})} \mu(w) \quad (v \in \frac{1}{2}L^* \setminus \{0\})$$

とおく．

定理 3 n, m を p.6 のリストに現れるものとし，V 上の d 次斉次調和多項式 h に対し，ゼータ関数 $\xi(s;h)$ を

$$\xi(s;h) := \sum_{v \in \frac{1}{2}L^* \setminus \{0\}} \frac{a(Q;v)h(v)}{(v,v)^s}$$

と定義する．$\xi(s;h)$ は $\mathrm{Re}(s) >$ が十分大きいとき絶対収束し，$\mathbb{C}$ 全体に有理型関数として解析接続される．さらに，関数等式

$$\Xi\left(d + \frac{n}{2} - s; h\right) = (-1)^d \Xi(s;h),$$
$$\Xi(s;h) := \pi^{-2s}\Gamma\left(s + \frac{m-2n}{8}\right)\Gamma\left(s - \frac{m-2n}{8}\right)\xi(s;h)$$

が成立する．

ゼータ関数 $\xi(s;h)$ は容易に (6) の形の概均質ゼータ関数に変形されるから，定理 3 は，Poisson の和公式を用いた概均質ベクトル空間の理論の標準的な議論で証明される．ただし，関数等式のガンマ因子など，明示形の決定には，次の局所関数等式を必要とする．

定理 4 $n \geq 1$ とし，任意の C_n の m 次元表現 $\rho : C_n \longrightarrow M(m, \mathbb{R})$ を考える．Q を ρ から定まる Clifford 二次写像とする．h を V 上の d 次斉次調和多項式とし，W 上の急減少関数 f に対し，局所ゼータ関数 $\Phi(s; f, h)$ を

$$\Phi(s; f, h) := \int_{W(\mathbb{R})} |P(w)|^s \, h(Q(w)) f(w) \, dw$$

と定義する．このとき，$\Phi(s; f, h)$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ で絶対収束し，$\mathbb{C}$ に有理型関数として解析接続される．さらに，局所関数等式

$$\Phi\left(-d - \frac{m}{4} - s; \widehat{f}, h\right) = \gamma(s)\Phi(s; f, h),$$
$$\gamma(s) = (-1)^d \left(\frac{\pi}{2}\right)^{4s+2d+\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(-s)\Gamma\left(-s - \frac{m-2n}{4}\right)}{\Gamma\left(s + d + \frac{n}{2}\right)\Gamma\left(s + d + \frac{m}{4}\right)}.$$

が成立する．ここで $\widehat{f}$ は f のフーリエ変換を表す．

この局所関数等式の成立と明示的計算は，[8] の方法を用いれば，概均質性に訴える必要もなければ case by case の計算をする必要もなく，一般の Clifford 二次写像について成立することに注意しておく．とくに，p.6 のリストに含まれない非概均質的な $P(w)$ についても成立し，このとき定理 4 は概均質ベクトル空間の一般論には含まれていない．

定理 5 p.6 のリストに現れる n, m（で ($\sharp$) を除いたもの）に対して，

$$\xi(s;h) \times \begin{cases} \left(s - \frac{m+2n}{8}\right)\left(s - \frac{6n-m}{8}\right) & (h \text{ は定数のとき}) \\ 1 & (h \text{ は定数ではないとき}) \end{cases}$$

は整関数である．

すでに注意したように，定理 5 は case by case の計算を必要とする．一般に概均質ベクトル空間のゼータ関数の極はその b-関数である程度統制されているが，$\xi(s;h)$ の極が $\pm\frac{m-2n}{8}$ の高々2 つであることは b 関数だけでは分からない．実際，b 関数は 4 次式となり，極の候補として 4 つの値が現れるからである．したがって，個々の場合に具体的に計算して Maass 逆定理にあてはまらない極の候補は，実際の極としては現れないことを確認する必要があるのである．

また，h が定数ではないときに $\xi(s;h)$ が整関数となることを示すためには，$h(Q(w))$ の K-translate が張る K の表現の特異軌道への制限をある程度調べる必要が出てくるので，これも統一的な取り扱いは難しい．

($\sharp$) の場合には，これらの個別チェックが現時点で完了していないため，定理 5 では（したがって，下の定理 6 でも）「($\sharp$) を除いたもの」という留保をつけたが，この除外ケースでも定理が不成立となる理由が存在するわけではもちろんない．

定理 3, 定理 6 と Maass 逆定理（定理 1）を合わせると，次の結果が得られる．

定理 6 $\nu = \frac{m-2n}{4}$ とおく．また，L を L^* の双対格子とし，Γ_{2L} を (2) で定まる $SO_0(1, n+1)$ の離散部分群とする．p.6 のリストに現れる n, m（で ($\sharp$) を除いたもの）に対して，

$$F(x,y) = \sum_{v \in \frac{1}{2}L^* \setminus \{0\}} a(Q;v) y^{n/2} K_\nu(2\pi |v| y) e^{2\pi i (v,x)} + \begin{cases} a_1 y^{\frac{n}{2}+\nu} + a_2 y^{\frac{n}{2}-\nu} & (m \neq 2n) \\ a_1 y^{\frac{n}{2}} + a_2 y^{\frac{n}{2}} \log y & (m = 2n) \end{cases}$$

は $\mathfrak{H}_n$ 上の Γ_{2L}-Maass 形式である．a_1, a_2 は $\xi(s) = \xi(s;1)$ の極における主要部から定まる。

注意　このノートでは，Maass 逆定理を利用するため正定値の二次空間への二次写像のみを考えたが，[3] では不定値の二次空間への Clifford 二次写像 $Q: W \to V$ も扱っている．このときには，V 上に定義された二次形式の符号を (p,q) とすると，$C_p \otimes C_q$ の有限次元表現の表現空間が W を与え，p. 5 の予想は $Spin(1+p, 1+q)$ の保型形式を与えるという形で一般化されると考えられる．部分的結果として，$p = q$ の場合には (5) で与えた $a(Q,s)$ が具体的に計算でき，$SO(1+p, 1+p)$ のある Eisenstein 級数のフーリエ係数と簡単な因子を除いて一致することが示せる．これは、二次形式の種テータ級数が斜交群の Eisenstein 級数を与えるという Siegel の主定理の類似である。

参考文献

[1] P. Epstein, Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen I, *Math. Ann.* **56**(1903), 615–644; Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen II, *Math. Ann.* **63**(1907), 205–216.

[2] T. Kimura, *Introduction to prehomogeneous vector spaces*, Amer. Math. Soc., 2002.

[3] T. Kogiso and F. Sato: Clifford quartic forms and local functional equations of non-prehomogeneous type, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **23**(2016), 791–866.

[4] H. Maaß, Automorphe Funktionen von meheren Vernderlichen und Dirichletsche Reihen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **16**(1949), 72–100.

[5] A. Yamauchi and H. Narita, Some vector-valued singular automorphic forms on $U(2,2)$ and their restriction to $Sp(1,1)$, Intern. J.of Math. **23**(2012) 1250104 (27 pages); DOI: 10.1142/S0129167X12501042

[6] T. Ono, *Variations on a theme of Euler: quadratic forms, elliptic curves and Hopf map* , 1994, Springer-Verlag.

[7] F. Sato, Zeta functions with polynomial coefficients associated with prehomogeneous vector spaces, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **45**(1996), 177–211.

[8] F. Sato, Quadratic maps and nonprehomogeneous local functional equations, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **56**(2007), 163–184.

[9] C. L. Siegel, *Lectures in advanced analytic number theory*, Lecture Notes, Tata Institute of Fundamental Research, 1961.