数理解析研究所講究録
第2055巻 2017年 73-80

On modular solutions of certain modular differential equation and supersingular polynomials

九州大学大学院数理学府
中屋 智瑛 (Tomoaki Nakaya)
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1 Introduction

標数 $p>0$ の体 K 上の楕円曲線 E が超特異的 (supersingular) であるとは，E が $\overline{K}$ 上 p-torsion を持たないことをいう．この条件は E の j 不変量のみに依存し，超特異 j 不変量は p を固定するごとに有限個しかなく，かつそれらは全て $\overline{\mathbb{F}}_p$ に入る．そこで超特異多項式 $ss_p(X)$ を，根がちょうど超特異 j 不変量になるような次のモニック多項式で定める：

$$ss_p(X)=\prod_{\substack{E/\overline{\mathbb{F}}_p\\ E:\text{supersingular}}}(X-j(E)).$$

標数 p の超特異 j 不変量の集合は $\mathbb{F}_p$ 上の共役に関して stable だから，$ss_p(X)\in\mathbb{F}_p[X]$ であることに注意する．Deuring によって超特異 j 不変量が $\mathbb{F}_{p^2}$ に入ること，したがって $ss_p(X)$ を $\mathbb{F}_p$ 上既約分解すると高々2次因子までしか現れないことや，$ss_p(X)$ の次数の明示式も分かっている．

超特異多項式 $ss_p(X)$ の標数0への様々な持ち上げが Kaneko, Zagier [1] により研究されている．特に，一つの持ち上げの構成にはモジュラー形式に対する微分作用素が用いられている．Baba, Granath [2] は新たに別の微分作用素を導入して同様の結果を得た．本稿ではこれらの結果 (微分作用素) をパラメータを入れた形で拡張し，Eisenstein 級数 E_4, E_6 と Ramanujan のデルタ関数 Δ の適当な積から微分作用素を構成する．この微分作用素をもとに M_k の自己準同型となるような二階微分作用素を定義し，さらに固有関数を超幾何級数を用いて具体的に表示する．特に $k=p-1$ に対し，固有関数 F から構成される多項式 $\widetilde{F}$ と超特異多項式との間に次の関係が成り立つことを示す：

$$ss_p(X)=X^{\delta}(X-1728)^{\varepsilon}\widetilde{F}(X)\pmod p.$$

ここで δ,ε は p に依存する適当な定数 $\in\{0,1\}$ である．

2 Main Results

まず初めにモジュラー形式に関する基本的な定義を行う．偶数 $k\geq 0$ に対し，M_k で $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の正則モジュラー形式のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を表す．さらに Γ に関する重さ k の (正規化された)Eisenstein 級数を

$$E_k(\tau)=1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{d|n}d^{k-1}\Bigr)q^n\qquad(q=e^{2\pi i\tau}),$$

とする．ここで τ は上半平面 $\mathfrak{H}$ の変数，B_k は k 番目の Bernoulli 数である．よく知られているように，偶数 $k \geq 4$ に対して $E_k(\tau) \in M_k$ である．さらに Ramanujan のデルタ関数 $\Delta \in S_{12}$ および楕円モジュラー関数 $j(\tau)$ を次で定める．

$$\Delta(\tau) := \frac{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2}{1728} = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots,$$

$$j(\tau) := \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)} = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots.$$

次にガウス超幾何級数を

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!} \quad (|x|<1)$$

で定める．$(\alpha)_n$ は Pochhammer 記号であり，$(\alpha)_0 = 1$ および $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ $(n \geq 1)$ である．Pochhammer 記号の性質から α または β が負の整数かつ γ が負の整数でないならば，${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ は多項式を与えることに注意しておく．

与えられたパラメータ $r,s,t \in \mathbb{Z}$ が $u := 2r+3s+6t \neq 0$ を満たすとする．このとき関数 $g(\tau)$ を Eisenstein 級数とデルタ関数の積

$$g(\tau) = g_{r,s,t}(\tau) = E_4(\tau)^r E_6(\tau)^s \Delta(\tau)^t$$

で定め，微分作用素 ∂_g を $g(\tau)$ の対数微分を用いて

$$\partial_g(f)(\tau) = \partial_{g,k}(f)(\tau) = f'(\tau) - \frac{k}{2u}\frac{g'(\tau)}{g(\tau)}f(\tau) \qquad \left({}' := \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau} = q\frac{d}{dq},\ f \in M_k\right)$$

と定める．$(r,s,t) = (0,0,1)$ の場合を除き，一般に $f \in M_k$ の $\partial_{g,k}$ による像は正則モジュラー形式ではない．さて，任意の偶数 $k \geq 4$ は次の形に一意的に書ける：

$$k = 12m + 4\delta + 6\varepsilon \quad \text{with} \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \delta \in \{0,1,2\},\ \varepsilon \in \{0,1\}. \tag{1}$$

以後記号 m, δ, ε を用いる際には，これらが k に依存していることに注意する．

任意のモジュラー形式 $f \in M_k$ に対し，$f/(E_4^{\delta}E_6^{\varepsilon}\Delta^m)$ は重さ 0 かつ $\mathfrak{H}$ 上正則より，高々m 次の $j(\tau)$ に関する多項式となる．その多項式を $\widetilde{f}$ と書くことにする：

$$f(\tau) = E_4(\tau)^{\delta}E_6(\tau)^{\varepsilon}\Delta(\tau)^m\widetilde{f}(j(\tau)).$$

特に $\widetilde{f}(X)$ における X^m の係数は f の q 展開の定数項に等しい．以下，与えられた r,s,t および偶数 k に対して $t(k+1) \neq nu$ $(1 \leq n \leq m)$ であるとする．この仮定の下で主定理における自己準同型 $\phi_{g,k}$ の固有値は全て相異なり，固有関数の係数も発散しない．

Theorem 1. (i) 次の微分作用素 $\phi_{g,k}$ は M_k の自己準同型を与える：

$$\begin{aligned}\phi_{g,k}(f) = \frac{1}{E_4}\Bigg\{&(\partial_{g,k+2}\circ\partial_{g,k})(f) - \frac{t^2k(k+2)}{4u^2}E_4 f \\ &- \frac{108}{u^2}(sk-2u\varepsilon)(sk-2u\varepsilon+4(r+2s+3t))\frac{E_4\Delta}{E_6^2}f \\ &+ \frac{48}{u^2}(rk-2u\delta)\big(rk-2u\delta+6(r+s+2t)\big)\frac{\Delta}{E_4^2}f\Bigg\}.\end{aligned} \tag{2}$$

(ii) 次のモジュラー形式 $F_{g,k}(\tau)=1+O(q)\in M_k$ は固有値 0 に対応する $\phi_{g,k}$ の固有関数である：

$$F_{g,k}(\tau)=E_4(\tau)^{3m+\delta}E_6(\tau)^{\varepsilon}\ {}_2F_1\left(-m,\ \mu\,;1-\frac{t(k+1)}{u};\frac{1728}{j(\tau)}\right).$$

ここで

$$\mu=\mu_{r,s,t,k}=\frac{5}{12}+\frac{(2r-3s-6t)(k+1)}{12u}-\frac{2\delta-3\varepsilon}{6}.$$

(iii) $p\geq 5$ なる素数 p に対して $k=p-1$ とおく．また $u\not\equiv 0 \pmod p$ であるとする．このとき $F_{g,p-1}(\tau)$ から構成する多項式 $\widetilde{F}_{g,p-1}(X)$ は p-integral 係数をもち，以下の超特異多項式との合同関係式が成り立つ：

$$ss_p(X)=X^{\delta}(X-1728)^{\varepsilon}\widetilde{F}_{g,p-1}(X)\pmod p.$$

Remark 2. (i) 上の定理における $(r,s,t)=(0,0,1)$ の場合は Kaneko-Zagier [1] により研究されている．対応する微分作用素

$$\partial_{\Delta,k}(f)(\tau)=f'(\tau)-\frac{k}{12}E_2(\tau)f(\tau)\ :M_k\to M_{k+2}$$

は Ramanujan-Serre 微分と呼ばれる．その後 $\Delta(\tau)$ の対数微分が $E_2(\tau)$ であることに着目し Baba-Granath [2] によって $(r,s,t)=(1,0,0)$ および $(0,1,0)$ の場合が研究されている．対応する微分作用素は各々

$$\partial_{E_4,k}(f)(\tau)=f'(\tau)-\frac{k}{4}\frac{E_4'(\tau)}{E_4(\tau)}f(\tau),\quad \partial_{E_6,k}(f)(\tau)=f'(\tau)-\frac{k}{6}\frac{E_6'(\tau)}{E_6(\tau)}f(\tau)$$

である．

(ii) 微分方程式 $\phi_{g,k}(f)=0$ は微分作用素を具体的に展開すると次のようになる．

$$\begin{aligned}f''-\frac{k+1}{u}\frac{g'}{g}f'+\frac{k(k+1)}{2u}\left(\frac{g'}{g}\right)'f+\frac{216s(k+1)(k+2\varepsilon)}{u}\frac{E_4\Delta}{E_6^2}f&\\-96\left\{\frac{r(k+1)(k+2\delta)}{u}-2\delta(\delta-1)\right\}\frac{\Delta}{E_4^2}f=0.&\end{aligned}$$

これは [3] において扱われている $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する保形微分方程式（係数は Γ の楕円点で極を許す）の特別な場合にあたる．$f(\tau)=E_4(\tau)^{k/4}h(\tau)$ とし，変数変換 $z=1728/j(\tau)$ を行うと h は超幾何微分方程式を満たすから，この方針でも定理の (ii) は証明できる．

Proof. (i) 自己準同型 $\phi_{g,k}$ の構成方法から従う．これは次節で具体的に構成することで示す．

(ii) $F\in M_k$ を $\phi_{g,k}(F)=0$ の解とする．よく知られているように $\bigoplus_{k\geq 0}M_k(\Gamma)\cong\mathbb{C}[E_4,E_6]$ であるから，M_k の基底として次がとれる：

$$\{E_4^{3m+\delta}E_6^{\varepsilon},E_4^{3m+\delta-3}E_6^{\varepsilon}\Delta,\ldots,E_4^{\delta+3}E_6^{\varepsilon}\Delta^{m-1},E_4^{\delta}E_6^{\varepsilon}\Delta^{m}\}.\tag{3}$$

ここで m,δ および ε は (1) 式より定まる，k に依存する定数である．F をこの基底の適当な線形結合で表す．

$$F=\sum_{c=0}^{m}\nu_c E_4^{3(m-c)+\delta}E_6^{\varepsilon}\Delta^{c}$$

このとき F の $\phi_{g,k}$ による像を計算すると

$$0=\phi_{g,k}(F)=\sum_{c=0}^{m}(\nu_c\alpha_c+\nu_{c-1}\beta_{c-1})E_4^{3m+\delta-3c}E_6^{\varepsilon}\Delta^c$$

となる (具体的な計算方法は次節を参考されたい). ここで

$$\alpha_c=c\left\{c-\frac{t(k+1)}{u}\right\},\ \beta_c=-(\lambda(a)-\lambda(\delta)),\ a=\frac{k-6\varepsilon-12c}{4},$$
$$\lambda(x)=\frac{48}{u^2}(rk-2ux)(rk-2ux+6(r+s+2t)).$$

基底の一次独立性より, $\nu_c\alpha_c+\nu_{c-1}\beta_{c-1}=0\ (0\leq c\leq m)$ となるから

$$\nu_c=\frac{-\beta_{c-1}}{\alpha_c}\nu_{c-1}=\cdots=\left(\prod_{n=1}^{c}\frac{-\beta_{n-1}}{\alpha_n}\right)\nu_0$$

である. したがってもし $\nu_0=0$ ならば全ての係数 ν_c が 0 となって自明な解 $F=0$ が現れる. この場合を除くため $\nu_0\neq 0$ とするが, 一般性を失うことなく $\nu_0=1$ としてよい. 分母分子を各々計算すると, まず分母は Pochhammer 記号に書き直すと

$$\prod_{n=1}^{c}\alpha_n=\prod_{n=1}^{c}n\left\{n-\frac{t(k+1)}{u}\right\}=c!\prod_{n=0}^{c-1}\left\{n+1-\frac{t(k+1)}{u}\right\}$$
$$=c!\left(1-\frac{t(k+1)}{u}\right)_c$$

となり, 分子も同様にして

$$-\beta_n=1728\left(n-\frac{k}{12}+\frac{2\delta+3\varepsilon}{6}\right)\left(n+\frac{5}{12}+\frac{(2r-3s-6t)(k+1)}{12u}-\frac{2\delta-3\varepsilon}{6}\right)$$
$$=1728(n-m)(n+\mu)$$

に注意すると

$$\prod_{n=1}^{c}(-\beta_{n-1})=\prod_{n=0}^{c-1}(-\beta_n)=\prod_{n=0}^{c-1}1728(n-m)(n+\mu)=1728^c(-m)_c(\mu)_c$$

となる. 以上により次のような F の超幾何級数表示を得る：

$$F=\sum_{c=0}^{m}\nu_cE_4^{3m+\delta-3c}E_6^{\varepsilon}\Delta^c=E_4^{3m+\delta}E_6^{\varepsilon}\sum_{c=0}^{m}\nu_c\left(\frac{1728}{j}\right)^c$$
$$=E_4^{3m+\delta}E_6^{\varepsilon}\ {}_2F_1\left(-m,\,\mu;1-\frac{t(k+1)}{u};\frac{1728}{j}\right).$$

これが定理中の $F_{g,k}$ である.

(iii) $k=p-1$ に対し $k+1\equiv 0\pmod p$ であるから, 解の具体形より

$$\widetilde{F}_{g,p-1}(X)=X^m{}_2F_1\left(-m,\frac{5}{12}-\frac{2\delta-3\varepsilon}{6};1;\frac{1728}{X}\right)\pmod p.$$

一方で, 超特異多項式 $ss_p(X)$ は超幾何多項式による以下のような表示をもつ. 本質的には Deuring [4] によるが, [1, Proposition 5] による変形を行っている.

$$ss_p(X)=X^{m+\delta}(X-1728)^{\varepsilon}{}_2F_1\left(-m,\frac{5}{12}-\frac{2\delta-3\varepsilon}{6};1;\frac{1728}{X}\right)\pmod p. \qquad (4)$$

ここで $p \geq 5$ なる素数を $p = 12m + 4\delta + 6\varepsilon + 1$ と表す．したがって $X^{\delta}(X - 1728)^{\varepsilon}\widetilde{F}_{g,p-1}(X)$ は p を法として $ss_p(X)$ と等しくなることがわかる．

$\square$

Remark 3. g は ∂_g によって消えるため $\partial_{g,k} \circ g^c = g^c \partial_{g,k-2uc}$ が成り立つ．したがって $\phi_{g,k}$ の 0 以外の固有値は $c(c - \frac{t(k+1)}{u})$ $(1 \leq c \leq m)$ であり，対応する固有関数は $g^c F_{g,k-2uc}$ である．

本稿の主題である超特異多項式 $ss_p(X)$ の標数 0 への持ち上げからは少し脱線するが，$ss_p(X)$ 自身の性質についても幾つか補足として述べておきたい．以下 $(\frac{\cdot}{p})$ は Legendre 記号とする．まず (4) 式からも分かるように，$ss_p(X)$ の次数 (すなわち超特異楕円曲線の同型類の個数) は素数 $p \geq 5$ に対して

$$\deg ss_p(X) = m + \delta + \varepsilon = \frac{p-1}{12} + \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right\} + \frac{1}{4}\left\{1 - \left(\frac{-4}{p}\right)\right\}$$

で与えられる．ところで D_p を $\mathbb{Q}$ 上の定符号四元数環で p と ∞ でのみ分岐するものとし，その類数を $h(D_p)$ とかくとき，Deuring は [4] において

$$\deg ss_p(X) = h(D_p)$$

を示した (Eichler [5], Igusa [6] も参照)．また $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\Gamma_0(p)$ に関するモジュラー形式の次元公式から

$$\deg ss_p(X) = 1 + \dim S_{p+1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = 1 + \dim S_2(\Gamma_0(p))$$

でもある．よく知られているように $\dim S_2(\Gamma_0(p))$ はモジュラー曲線 $X_0(p)$ の種数と等しい．

さて，特に興味深い $ss_p(X)$ の性質としてモンスター群 $\mathbb{M}$ の位数との関係があげられる．

表 1: $ss_p(X)$ の既約分解

p	$ss_p(X)$
2	X
3	X
5	X
7	$X+1$
11	$X(X+10)$
13	$X+8$
17	$X(X+9)$
19	$(X+1)(X+12)$
23	$X(X+20)(X+4)$
29	$X(X+4)(X+27)$
31	$(X+8)(X+27)(X+29)$
37	$(X+29)(X^2+31X+31)$
41	$X(X+9)(X+13)(X+38)$
43	$(X+35)(X+2)(X^2+19X+16)$
47	$X(X+11)(X+3)(X+37)(X+38)$
53	$X(X+3)(X+7)(X^2+50X+39)$
59	$X(X+42)(X+11)(X+12)(X+31)(X+44)$
61	$(X+11)(X+20)(X+52)(X^2+38X+24)$
67	$(X+14)(X+1)(X^2+8X+45)(X^2+44X+24)$
71	$X(X+47)(X+5)(X+23)(X+30)(X+31)(X+54)$

モンスター群 $\mathbb{M}$ は 26 個存在する散在型有限単純群の中で位数最大のものであり，位数は

$$\begin{aligned}\#\mathbb{M} &= 808017424794512875886459904961710757005754368000000000\\ &= 2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71\end{aligned}$$

である．初め Ogg が気付いたことであるが，これらの素因数 p に対して超特異 j 不変量は $\mathbb{F}_p$ 上定義される．すなわち

$$p \mid \#\mathbb{M} \Longleftrightarrow ss_p(X) \text{ の } \mathbb{F}_p \text{ 上の既約因子は全て一次}$$

が成り立つ (表 1 を参照)．証明には $ss_p(X)$ の一次因子の個数に関する次の結果を用いる．

Theorem 4 (Deuring [4], Pizer [7]). p を 5 以上の素数, $ss_p(X)$ の $\mathbb{F}_p$ 上の既約分解における一次因子の個数を $L(p)$, 虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数を $h(\sqrt{-p})$ とおくと

$$L(p) = \begin{cases} h(\sqrt{-p})/2 & p\equiv 1 \mod 4 \text{ のとき}, \\ 2h(\sqrt{-p}) & p\equiv 3 \mod 8 \text{ のとき}, \\ h(\sqrt{-p}) & p\equiv 7 \mod 8 \text{ のとき}. \end{cases}$$

この記号の下で先程の主張は $p \mid \#\mathbb{M} \Longleftrightarrow \deg ss_p(X) = L(p)$ とも書き直される．

3 Construction of the endomorphism

本節では M_k の自己準同型 $\phi_{g,k}$ を構成する．構成方法から主定理の一つ目が従う．まず微分作用素 ∂_g は，Ramanujan による Eisenstein 級数の微分関係式

$$E_2' = \frac{E_2^2 - E_4}{12},\quad E_4' = \frac{E_2E_4 - E_6}{3},\quad E_6' = \frac{E_2E_6 - E_4^2}{2} \tag{5}$$

を用いることで

$$\partial_g(f) = \frac{2r}{u}\partial_{E_4}(f) + \frac{3s}{u}\partial_{E_6}(f) + \frac{6t}{u}\partial_\Delta(f) = \partial_\Delta(f) + \frac{1}{12u}\left(2r\frac{E_6}{E_4} + 3s\frac{E_4^2}{E_6}\right) f \tag{6}$$

と書ける．この表示から互いに素な (r,s,t) のみ考えれば十分なことが分かる．偶数 $k \geq 4$ に対し，これまでと同様に $k = 12m + 4\delta + 6\varepsilon$ と表す．整数 a, c を $0 \leq a \leq 3m+\delta$, $0 \leq c \leq m$ かつ $k = 4a + 6\varepsilon + 12c$ となるよう選べば，$E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c$ は M_k の基底の一つである (see (3))．

Lemma 5. 簡単のため $v = (sk - 2u\varepsilon)/4$，$w = (rk - 2ua)/6$ とおく．このとき

$$\begin{aligned} u\,\partial_{g,k}(E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c) &= vE_4^{a+2}E_6^{\varepsilon-1}\Delta^c + wE_4^{a-1}E_6^{\varepsilon+1}\Delta^c,\\ u^2\,(\partial_{g,k+2}\circ\partial_{g,k})(E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c) &= 1728v(v+r+2s+3t)E_4^{a+1}E_6^{\varepsilon-2}\Delta^{c+1}\\ &\quad + (v+w)(v+w-t)E_4^{a+1}E_6^{\varepsilon}\Delta^c\\ &\quad - 1728w(w+r+s+2t)E_4^{a-2}E_6^{\varepsilon}\Delta^{c+1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Proof. まず $\partial_{g,k}$ を (6) 式から ∂_Δ を用いた形に読み替える．Ramanujan-Serre 微分 ∂_Δ は $F \in M_k$ と $G \in M_l$ に対して Leibniz 則

$$\partial_{\Delta,k+l}(FG) = \partial_{\Delta,k}(F)G + F\partial_{\Delta,l}(G)$$

を満たすから，その $E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c$ への作用は E_4, E_6, Δ への作用が分かれば計算できる．(5) 式を書き直すと

$$\partial_{\Delta,4}(E_4) = -\frac{1}{3}E_6,\ \partial_{\Delta,6}(E_6) = -\frac{1}{2}E_4^2$$

となり，$\partial_\Delta(\Delta) = 0$, $E_4^3 - E_6^2 = 1728\Delta$ であるから後は直接計算で補題を証明できる． □

さて，$(v+w)(v+w-t)=t^2k(k+2)/4-t(k+1)uc+u^2c^2$ を用いて (7) 式を変形すると，

$$
\begin{aligned}
&u^2\left(\partial_{g,k+2}\circ\partial_{g,k}\right)(E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c)-\frac{t^2k(k+2)}{4}E_4\cdot E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c\\
&=1728v(v+r+2s+3t)E_4^{a+1}E_6^{\varepsilon-2}\Delta^{c+1}+u^2c\{c-t(k+1)/u\}E_4^{a+1}E_6^\varepsilon\Delta^c\\
&\quad-1728w(w+r+s+2t)E_4^{a-2}E_6^\varepsilon\Delta^{c+1}.
\end{aligned}
$$

さらに $1728v(v+r+2s+3t)=108(sk-2u\varepsilon)(sk-2u\varepsilon+4(r+2s+3t))$ より，

$$
\begin{aligned}
&u^2\left(\partial_{g,k+2}\circ\partial_{g,k}\right)(E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c)-\frac{t^2k(k+2)}{4}E_4\cdot E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c\\
&\quad-108(sk-2u\varepsilon)(sk-2u\varepsilon+4(r+2s+3t))\frac{E_4\Delta}{E_6^2}\,E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c\\
&=u^2c\left\{c-\frac{t(k+1)}{u}\right\}E_4^{a+1}E_6^\varepsilon\Delta^c-1728w(w+r+s+2t)E_4^{a-2}E_6^\varepsilon\Delta^{c+1}.
\end{aligned}
$$

$\lambda(x)=\frac{48}{u^2}(rk-2ux)(rk-2ux+6(r+s+2t))$ とおくと $1728w(w+r+s+2t)=u^2\lambda(a)$ と変形できる．さらに $u^2\lambda(\delta)E_4^{a-2}E_6^\varepsilon\Delta^{c+1}$ を上式に辺々加えて，両辺を u^2E_4 で割ることで

$$
\begin{aligned}
\phi_{g,k}(E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c)&=\frac{1}{E_4}\left\{(\partial_{g,k+2}\circ\partial_{g,k})(E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c)-\frac{t^2k(k+2)}{4u^2}E_4\cdot E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c\right.\\
&\quad-\frac{108}{u^2}(sk-2u\varepsilon)(sk-2u\varepsilon+4(r+2s+3t))\frac{E_4\Delta}{E_6^2}\,E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c\\
&\quad\left.+\frac{48}{u^2}(rk-2u\delta)(rk-2u\delta+6(r+s+2t))\frac{\Delta}{E_4^2}\,E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c\right\}\\
&=c\left\{c-\frac{t(k+1)}{u}\right\}E_4^aE_6^\varepsilon\Delta^c-(\lambda(a)-\lambda(\delta))E_4^{a-3}E_6^\varepsilon\Delta^{c+1}
\end{aligned}
$$

を得る．$a\geq 3$ ならば明らかに右辺は M_k に入る．$a<3$ ならば $a=\delta$ となること (何故なら $a\equiv\delta\pmod 3$ であるので) に注意すると，このとき $E_4^{a-3}E_6^\varepsilon\Delta^{c+1}$ の係数 $\lambda(a)-\lambda(\delta)$ は消えるから E_4 の負べきの項は現れず，右辺は M_k に入る．したがって $\phi_{g,k}$ は M_k の自己準同型である．

Ramanujan-Serre 微分 $\partial_{\Delta,k}$ は $\bigoplus_{k\geq 0}M_k(\Gamma)$ 上の重さ 2 の微分でカスプ形式の空間を保つものとして (定数倍を除いて) 一意的に定まる．一方で上に述べた自己準同型 $\phi_{g,k}$ は超特異多項式との関係ありきで構成されているため，自然な導出が出来るかどうかは今後の課題である．

4 On the zeros of $\widetilde{F}_{g,k}(X)$

すぐわかるように，標数 0 で考えたとき $\widetilde{F}_{g,k}(X)$ の根は全て単根である．実際，重根を持つならばその点で $\widetilde{F}_{g,k}$ とその微分が消えるが，ガウスの超幾何微分方程式の解になっていることから，二階以上の微分もすべて消えて矛盾が生じるからである．具体的な (r,s,t) を与えた場合には，例えば以下のような結果が知られている．

Theorem 6 (Kaneko-Zagier [1]). $\widetilde{F}_{\Delta,k}(X)$ の根は全て実単根で, 区間 $(0,1728)$ に存在する.

Theorem 7 (Baba-Granath [2]). $\widetilde{F}_{E_4,k}(X),\widetilde{F}_{E_6,k}(X)$ の根は全て実単根で, 各々区間 $(1728,\infty)$ および $(-\infty,0)$ に存在する.

これらは対応する多項式が古典的直交多項式となることから示される．しかし一般の r,s,t に対して $\widetilde{F}_{g,k}(X)$ は複素根を持ちうる．例えば $(r,s,t)=(1,1,1)$ すなわち $g=E_4E_6\Delta$ の場合，k が十分大きいとき $\widetilde{F}_{g,k}(X)$ の根は以下のように分布している．

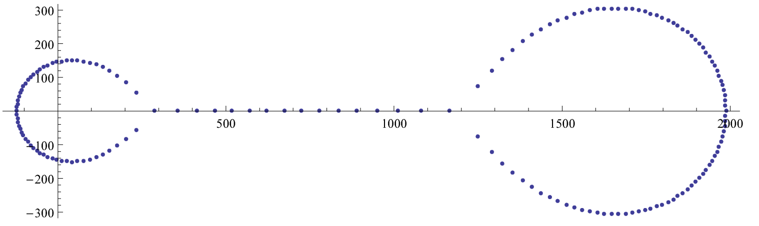

図 1: $(r,s,t)=(1,1,1),k=2000$

$\widetilde{F}_{g,k}(X)$ の根の分布に関して何かしら意味付けができるかは今後の課題である．

最後になりますが，研究集会における講演の機会を下さった長岡昇勇先生，水野義紀先生に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] M. Kaneko and D. Zagier, *Supersingular j-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials*, In: Computational perspectives on number theory (Chicago, IL, 1995), 97–126, AMS/IP Stud. Adv. Math., 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[2] S. Baba, H. Granath, *Orthogonal systems of modular forms and supersingular polynomials*, Int. J. Number Theory **7** (2011), 249–259.

[3] H. Tsutsumi, *Modular differential equations of second order with regular singularities at elliptic points for $SL_2(\mathbb{Z})$*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 931–941.

[4] M. Deuring, *Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **14** (1941), 197–272.

[5] M. Eichler, *Über die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren*, Math. Z. **43** (1938), 102–109.

[6] J. Igusa, *Class number of a definite quaternion with prime discriminant*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **44** (1958), 312–314.

[7] A. Pizer, *Type numbers of Eichler orders*, J. reine angew. Math. **264** (1973) , 76–102.