数理解析研究所講究録
第2055巻 2017年 105-116

ユニタリ群の内視的 A パケット

京都大学白眉センター/数学教室/マックスプランク数学研究所
The Hakubi center/Department of Mathematics, Kyoto University
/Max Planck Institut für Mathematik

山名俊介 (Shunsuke Yamana)

1 序

本稿では以下の二つのリフトについて報告する:

① U(2) のカスプ形式 $\rightarrow$ U$(4m+2)$ のカスプ形式

② U(3) の内視的カスプ形式 $\rightarrow$ U$(4m+3)$ のカスプ形式

①は池田保氏 [13] の構成した楕円カスプ形式からエルミートカスプ形式へのリフトの一般化である．このリフトは昨年に筆者により池田氏のアイデアを用いて, ヒルベルトカスプ形式からのリフトに一般化されたが, 本稿ではこの結果をさらに準分裂でないユニタリ群にも拡張する．②は Gelbart-Rogawski-Soudry [10] の構成した三変数ユニタリ群の内視的 A パケットの高次元化である．①と②のカスプ形式の表現は, 緩増加でなく, 生成的でなく, 非常に小さな部分群に関して一意模型を持つ (と考えられる) 小さなカスプ表現であり, 算術的あるいは幾何的にも興味深いものであると期待される．

近年の跡公式の目覚しい発展によりユニタリ群の A パケットは一般的に構成されている (例えば, [1, 21, 17, 15] を参照). しかし, 本稿の構成は具体的であり, フーリエ級数, 周期, テータ対応, カスプ形式の等式などの詳細な情報を与えることができるので, 価値があると思う．

設定

本稿では E/F を CM 拡大とする．即ち F は総実体, E はその総虚二次拡大である．F のアデール環を $\mathbb{A}=\mathbb{A}_\infty\cdot\mathbb{A}_\mathfrak{f}$, E のアデール環を $\mathbb{E}=\mathbb{E}_\infty\cdot\mathbb{E}_\mathfrak{f}$ と表す．ここで, $\mathbb{A}_\infty=F\otimes_\mathbb{Q}\mathbb{R}$ であり, $\mathbb{A}_\mathfrak{f}$ は F の有限アデール環, E についても同様である．素点 v での F の完備化を F_v, E の完備化を E_v と書き, $\mathfrak{S}^E$ を E_v が体となる F の素点からなる集合とする．ドイツ文字 $\mathfrak{p}$ により F の有限素点を表すことにする．F の実素点の集合を $\mathfrak{S}_\infty$ と書く．E の F 上の非自明自己同型を $a\mapsto a^\tau$, E から F へのノルムを N_F^E, 位数 2 の群 $\mathbb{A}^\times/F^\times\mathrm{N}_F^E(\mathbb{E}^\times)$ の位数 2 の指標を $\epsilon_{E/F}=\prod_v\epsilon_{E_v/F_v}$ と書くことにする．F の Hecke 指標 $\epsilon_{E/F}$ の E の Hecke 指標への拡張 γ を一つ固定する．基本指標として $F\backslash\mathbb{A}$ の非自明な加法指標 $\psi=\prod_v\psi_v$ も一つ固定する．

二変数ユニタリ群の既約カスプ的保形表現σから$\mathrm{GL}_2(\mathbb{E})$の保形表現への標準ベースチェンジを$\mathrm{BC}(\sigma)$と書くことにする．非等方的ユニタリ群の一次元表現もカスプ的保形表現だが，その場合を以下では除外する．このとき$\mathrm{BC}(\sigma)$はカスプ的であり，浅井L関数$L(s, \mathrm{BC}(\sigma)\otimes\gamma, \mathrm{Asai})$は$s=1$で極を持つ．さらに$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$のカスプ的保形表現$\pi$とその中心指標の$E$の Hecke 指標への拡張$\chi$が存在して，

$$\mathrm{BC}(\sigma) = \pi^E \otimes \chi^{-1}.$$

ここでπ^Eはπの$\mathrm{GL}_2(\mathbb{E})$へのベースチェンジを表す．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$の$n$次元既約表現を$\mathrm{sym}^{n-1}$と書き，$\mathrm{BC}(\sigma)$を$L$パラメータと見なせば，外部テンソル積表現

$$\phi^{\sigma}_{2m+1} := \mathrm{BC}(\sigma)\boxtimes \mathrm{sym}^{2m}$$

により$4m+2$変数ユニタリ群のAパラメータが与えられる．本稿ではこのAパラメータのAパケットと次の$4m+3$変数ユニタリ群のAパラメータ

$$\varphi^{\sigma,\gamma}_{2m+1} := 1\oplus(\mathrm{BC}(\sigma)\otimes\gamma^{-1})\boxtimes \mathrm{sym}^{2m}$$

のAパケットを構成する．

2 Gelbart-Rogawski-Soudry 理論

Vをm次非退化エルミート形式付空間，Wをl次非退化歪エルミート形式付空間とする．二つのEの Hecke 指標ϱとχで$\varrho|_{\mathbb{A}^\times} = \epsilon^l_{E/F}$，$\chi|_{\mathbb{A}^\times} = \epsilon^m_{E/F}$を満たすものを補助的に固定する．ユニタリ群のテータ対応は，この指標の組(ϱ, χ)の取り方に本質的に依存する．$\mathrm{U}(V)$と$\mathrm{U}(W)$の間のテータ対応を$\theta^{\psi,\varrho,\chi}_{V,W}$と書くことにする．$\phi$が$m$変数ユニタリ群の$L$パラメータであるとき，その Vogan Lパケットを$\Pi(\phi)$と書く．まず，Vogan Lパケットとは，Lパケットの和集合

$$\Pi(\phi) = \bigsqcup_{\dim V = m} \Pi(V, \phi)$$

であることを思い出そう．ここでVはm次非退化エルミート形式付空間の同値類を渡る．本稿では常に，ユニタリ群を付随するエルミート形式もしくは歪エルミート形式と合わせて考えることを注意しておく．VとηV (Vのエルミート形式の$\eta\in F^\times$倍) のユニタリ群は同型だが，$V\not\simeq \eta V$なら$\Pi(V,\phi)$と$\Pi(\eta V, \phi)$は異なる集合である．

三変数ユニタリ群のLパケットは，Rogawski [21] により安定跡公式を用いて，$\mathrm{R}^E_F\mathrm{GL}_3$へのベースチェンジの観点から構成されたが，この構成は直接的なものではない．Gelbart, Rogawski, Soudry [10] の三人は下記の図式の簡約対のテータ対応を用いて，内視的Lパケット$\Pi(\varphi^{\sigma,\gamma}_1)$の内部構造を詳しく記述した．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U}(1,1) \arrow[dr, "\theta^{\psi,\gamma,1}"] & \\
& \mathrm{U}(3) \\
\mathrm{U}(2) \arrow[uu, "\text{Jacquet-Langlands 対応}"] \arrow[ur, "\theta^{\psi,\gamma,1}"'] &
\end{tikzcd}$$

実は, テータ対応のこのような図式は非可換であり, その非可換性も重要性である(例えば, [22, 7]). 左側の Jacquet-Langlands 対応もテータ対応により実現できるが, 後で見るように大域的には難しい問題がある.

二変数ユニタリ群の L パケットは容易に構成できる. 同型

$$\mathrm{GU}(1,1) \simeq \mathrm{R}_F^E \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2/\mathrm{GL}_1$$

を用いて, 外部テンソル積 ${}^{\tau}\chi^{-1} \boxtimes \pi$ を $\mathrm{GU}(1,1)$ の表現と見なすことができる. 同様に π の Jacquet-Langlands lift を π^{JL} と書くとき, ${}^{\tau}\chi^{-1} \boxtimes \pi^{\mathrm{JL}}$ は $\mathrm{GU}(2)$ の表現と見なされる. Vogan L パケット $\Pi(\phi_1^{\sigma})$ は, それらの制限の既約成分からなる.

三次非退化エルミート形式付き空間 $\mathcal{V}$ の内視的 L パケットは, 局所的にも大域的にも次のように構成できる:

$$\Pi(\mathcal{V}, \varphi_1^{\sigma,\gamma}) = \bigcup_{\dim W=2} \{\theta_{\mathcal{V},W}^{\psi,\gamma,1}(\sigma') \mid \sigma' \in \Pi(W, \phi_1^{\sigma})\} \setminus \{0\}.$$

$\mathrm{U}(W)$ から $\mathrm{U}(\mathcal{V})$ への大域テータリフトには, 次の結果が成り立つ ([10] の定理 E).

$$\theta_{\mathcal{V},W}^{\psi,\gamma,1}(\sigma') \neq 0 \Leftrightarrow \forall v,\ \theta_{\mathcal{V},W}^{\psi_v,\gamma_v,1}(\sigma'_v) \neq 0$$

三変数ユニタリ群のカスプ的保形表現は, 以下の同値な条件が成り立つときに内視的と呼ばれる.

- $\mathrm{U}(1)$ の保形指標 μ が存在して, L 関数 $L(s, \rho \otimes \mu)$ が $s=1$ で極を持つ.
- $\mathrm{U}(1)$ の保形指標 μ と二次非退化歪エルミート形式付空間 W が存在して, $\mathrm{U}(W)$ へのテータリフト $\theta_{\mathcal{V},W}^{\psi,\gamma,1}(\rho \otimes \mu)$ が消えない.

これらの条件の μ は共通である.

3 主定理 1

準分裂な複素ユニタリ群

$$\mathrm{U}(n,n) := \left\{ g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \;\middle|\; {}^t\bar{g} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の標準的極大コンパクト部分群は, 以下のような中への準同型の像である:

$$\begin{aligned} &\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n) \hookrightarrow \mathrm{U}(n,n), \\ &(k_1, k_2) \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -\sqrt{-1}k_1 + \sqrt{-1}k_2 \\ \sqrt{-1}k_1 - \sqrt{-1}k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

半整数 $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$, $a > b$ に関して, 以下の表現を考える:

1. $\mathrm{U}(n,n)$ の最小ウェイト $\det^{a+\frac{1}{2}} \boxtimes \det^{b-\frac{1}{2}}$ を持つ最小ウェイト表現 $\mathfrak{D}_{a,b}^{(n,n)}$.
2. $\mathrm{U}(n,n)$ の最高ウェイト $\det^{b-\frac{1}{2}} \boxtimes \det^{a+\frac{1}{2}}$ を持つ最高ウェイト表現 $\mathfrak{D}_{b,a}^{(n,n)}$.

$a-b>2n-2$ のとき, コンパクトなユニタリ群の以下の既約表現も考える:

3. $\mathfrak{D}_{a,b}^{(n,n)}$ と同じ無限小指標を持つ $\mathrm{U}(2n,0)$ の既約表現 $\mathfrak{D}_{a,b}^{(2n,0)}$.

4. $\mathfrak{D}_{a,b}^{(n,n)}$ と同じ無限小指標を持つ $\mathrm{U}(0,2n)$ の既約表現 $\mathfrak{D}_{a,b}^{(0,2n)}$.

注意 3.1. (1) $\mathfrak{D}_{a,b}^{(n,n)}$ が離散系列表現 $\Leftrightarrow |a-b|>2n-2$.

(2) $\mathfrak{D}_{a,b}^{(n,n)}$ が離散系列表現の極限 $\Leftrightarrow |a-b|=2n-2$.

(3) $\mathfrak{D}_{a,b}^{(n,n)}$ は重さ $a-b+1$ の正則エルミートモジュラー形式の表現である.

先に述べたように, $\mathrm{U}(p,q)$ と $\mathrm{U}(q,p)$ は標準的に同型であるが, 本稿では区別する.

V を m 次非退化エルミート形式付空間とする. V の判別式は以下のように定義される. V のエルミート形式の行列表示 B を取り, $\mathrm{disc}V=(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\det B\in F^\times/\mathrm{N}_F^E(E^\times)$. 実素点 $v\in\mathfrak{S}_\infty$ に関して, $V(F_v)$ のエルミート形式の正の固有値の個数から負の固有値の個数を引いた数を $\mathbf{s}_v(V)$ と書き, 符号数と呼ぶ. Landherr の定理より非退化エルミート形式は, 階数, 判別式, 符号数により分類される.

$\sigma\simeq\otimes'_v\sigma_v$ をアルキメデス成分 σ_v が全て離散系列表現であるような二変数ユニタリ群 $\mathrm{U}(V_1^\sigma,\mathbb{A})$ の既約カスプ的保形表現とする. 即ち, 各実素点 $v\in\mathfrak{S}_\infty$ で

$$\sigma_v\simeq\mathfrak{D}_{a_v,b_v}^{(p_v,q_v)}\qquad\text{もしくは}\qquad\sigma_v\simeq\mathfrak{D}_{b_v,a_v}^{(p_v,q_v)}.$$

以下, 奇数 n を固定する.

定義 3.2 (エルミート形式付空間のリフト). $2n$ 次非退化エルミート形式付空間 V_n^σ を以下の条件により定義する:

- $\mathrm{disc}V_n^\sigma=\mathrm{disc}V_1^\sigma$
- $\mathbf{s}_v(V_n^\sigma)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}n\mathbf{s}_v(V_1^\sigma)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}n(p_v-q_v)$

定義 3.3 (実局所リフト). $p+q=2$ と $a,b\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}$, $a>b$ に対して,

$$\mathrm{U}_n\Big(\mathfrak{D}_{a,b}^{(p,q)}\Big):=\mathfrak{D}_{a+\frac{n-1}{2},b-\frac{n-1}{2}}^{(np,nq)},\qquad\mathrm{U}_n\Big(\mathfrak{D}_{b,a}^{(p,q)}\Big):=\mathfrak{D}_{b-\frac{n-1}{2},a+\frac{n-1}{2}}^{(np,nq)}.$$

ここで, $pq=0$ かつ $a-b\le n-1$ であるとき, $\mathrm{U}_n\Big(\mathfrak{D}_{a,b}^{(p,q)}\Big)=0$ とする.

正則表現は正則表現に, 反正則表現は反正則表現に, 正定値ユニタリ群の表現は正定値ユニタリ群の表現に, 負定値ユニタリ群の表現は負定値ユニタリ群の表現に行くように直感的に定義したが, この理論的正当性は特にない. 実際, $n\equiv3$ (mod 4) のとき, 良い定義でもないので, 次の対合をしばしば用いる:

$$\iota\Big(\mathfrak{D}_{a,b}^{(p,q)}\Big):=\mathfrak{D}_{b,a}^{(q,p)}.$$

定義 3.4 (非アルキメデス局所リフト). 有限素点 $\mathfrak{p}$ では, $\mathrm{U}_n(\sigma_{\mathfrak{p}})$ は下記の標準加群の Langlands 商とする:

$$\mathrm{Ind}_P^{\mathrm{U}(V_n^\sigma)}\big(\mathrm{BC}(\sigma_{\mathfrak{p}})\otimes|\cdot|_{E_{\mathfrak{p}}}^{\frac{n-1}{2}}\big)\boxtimes\big(\mathrm{BC}(\sigma_{\mathfrak{p}})\otimes|\cdot|_{E_{\mathfrak{p}}}^{\frac{n-3}{2}}\big)\boxtimes\cdots\boxtimes\big(\mathrm{BC}(\sigma_{\mathfrak{p}})\otimes|\cdot|_{E_{\mathfrak{p}}}\big)\boxtimes\sigma_{\mathfrak{p}}$$

ここで, P は次の Levi 部分群を持つ $\mathrm{U}(V_n^\sigma)$ の放物型部分群である:

$$\underbrace{\mathrm{GL}_2(E_{\mathfrak{p}})\times\cdots\times\mathrm{GL}_2(E_{\mathfrak{p}})}_{\frac{n-1}{2}}\times\mathrm{U}(V_1^\sigma).$$

大域的リフトは局所リフトの制限テンソル積として定義される:

$$\mathrm{U}_n(\sigma)\simeq(\otimes_{v\in\mathfrak{S}_\infty}\mathrm{U}_n(\iota^{\frac{n-1}{2}}(\sigma_v)))\otimes(\otimes'_{\mathfrak{p}}\mathrm{U}_n(\sigma_{\mathfrak{p}})).$$

本稿では, 次の二つの問題を考察する:

(Q1) $\mathrm{U}_n(\sigma)$ はカスプ的保形表現か?

(Q2) もしそうなら $\mathrm{U}_n(\sigma)$ のカスプ形式を構成せよ.

上の問題に答えるために, 以下の仮説を設ける:
局所成分 σ_v が離散系列表現になる素点の有限集合を $\mathfrak{S}_\sigma$ と書く.

仮説 3.5. もし λ が $\varepsilon(\frac{1}{2},\sigma\otimes\lambda)=1$ となる $\mathrm{U}(1)$ の保形指標であるとき, $v\in\mathfrak{S}_\sigma\cap\mathfrak{S}^E$ で $\mu_v=1$ かつ $L(\frac{1}{2},\sigma\otimes\lambda\mu)\neq0$ となる $\mathrm{U}(1)$ の保形指標 $\mu=\prod_v\mu_v$ が存在する.

この仮説は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約カスプ的保形表現 π に関する次の仮説と同値である.
局所成分 π_v が離散系列表現になる F の素点からなる有限集合を $\mathfrak{S}_\pi$ と書く.

仮説 3.6. もし χ が π の中心指標の E のヘッケ指標への拡張であり $\varepsilon(\frac{1}{2},\pi^E\otimes\chi^{-1})=1$ となるとき, 以下の条件を満たす E の Hecke 指標 $\beta=\prod_v\beta_v$ が存在する:

$$\beta|_{\mathbb{A}^\times}=1,\qquad L(\tfrac{1}{2},\pi^E\otimes\chi^{-1}\beta)\neq0,\qquad \beta_v=1\qquad(v\in\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{S}^E).$$

注意 3.7. (1) 仮説3.6は二次 Hecke 指標捻りに関する Waldspurger の結果 [22] 或いは Friedberg-Hoffstein の定理 [4] の反円分指標捻りに関する類似である.

(2) 最近, Ming-Lun Hsieh と千田雅隆氏が, 岩澤理論から仮説3.6に関する研究を進めている ([11, 3] 参照).

定理 3.8. σ を二変数ユニタリ群の既約カスプ的保形表現とする. σ のアルキメデス局所成分が離散系列表現もしくはその極限であり, 仮説 *3.5* が成り立つなら, 任意の奇数 n に対して, $\mathrm{U}_n(\sigma)$ はカスプ的保形表現である.

注意 3.9. (1) 定義3.4は容易に離散系列表現の極限に拡張される.

(2) σ が $\mathrm{U}(1,1)$ の保形表現なら, 仮説3.5を使わずに定理3.8を証明できる.

(3) フーリエ・ヤコビ係数を取ることで, n が偶数の場合にも類似のリフトを構成できる.

4 主定理2

次に三変数ユニタリ群の既約カスプ的保形表現 ρ を考える. ρ のアルキメデス局所成分 ρ_v は全て離散系列表現であるとし, その Harish-Chandra パラメータを $\mathrm{HC}(\rho_v)$ と書く. さらに $L(s,\rho)$ が $s=1$ で極を持つとする. 以下, 奇数 n を固定.

定義 4.1 (エルミート形式付空間のリフト). F の各素点 v に対して, $\mathcal{V}_n^{\rho_v}$ を判別式 $\mathrm{disc}\mathcal{V}_1^{\rho_v}$ を持つ局所 $2n+1$ 次非退化エルミート形式付空間の同値類とする. v が実素点であるとき, 以下の条件を追加する:

- もし $\mathcal{V}_1^{\rho_v}$ が非等方的なら $\mathcal{V}_n^{\rho_v}$ も非等方的.
- もし $\mathcal{V}_1^{\rho_v}$ が等方的なら $\mathcal{V}_n^{\rho_v}$ の符号数を以下のように定める:

$$\mathbf{s}_v(\mathcal{V}_n^{\rho_v}) = \mathbf{s}_v(\mathcal{V}_1^{\rho_v}) \times \begin{cases} 2n-1 & \text{if } \mathrm{HC}(\rho_v) = (*,*;0) \text{ or } (0;*,*), \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定義 4.2 (局所リフト). 仮定より二次非退化歪エルミート形式付空間 W_1^{σ} が存在して, 0 でないテータリフト $\sigma = \theta^{\psi,\gamma,1}_{\mathcal{V}_1^{\rho},W_1^{\sigma}}(\rho)$ を持つ. σ の局所成分 σ_v を用いて, ρ_v の $\mathrm{U}(\mathcal{V}_n^{\rho_v})$ へのリフトを以下のように定義する:

$$\mathrm{U}_n(\rho_v) := \theta^{\psi_v,\gamma_v,1}_{\mathcal{V}_n^{\rho_v},W_n^{\sigma_v}}(\mathrm{U}_n(\sigma_v)).$$

注意 4.3. (1) 定義 4.2 は γ や ψ の選び方に依存しない.

(2) 非アルキメデス局所リフト $\mathrm{U}_n(\rho_{\mathfrak{p}})$ は常に 0 ではなく, 次の標準加群の Langlands 商である:

$$\mathrm{Ind}_Q^{\mathrm{U}(\mathcal{V}_n^{\rho_{\mathfrak{p}}})}\left(\mathrm{BC}(\sigma_{\mathfrak{p}})\otimes\gamma_{\mathfrak{p}}^{-1}|\cdot|_{E_{\mathfrak{p}}}^{\frac{n-1}{2}}\right)\boxtimes\cdots\boxtimes\left(\mathrm{BC}(\sigma_{\mathfrak{p}})\otimes\gamma_{\mathfrak{p}}^{-1}|\cdot|_{E_{\mathfrak{p}}}\right)\boxtimes\rho_{\mathfrak{p}}.$$

ここで, Q は次の Levi 部分群を持つ $\mathrm{U}(\mathcal{V}_n^{\rho_{\mathfrak{p}}})$ の放物型部分群である:

$$\underbrace{\mathrm{GL}_2(E_{\mathfrak{p}})\times\cdots\times\mathrm{GL}_2(E_{\mathfrak{p}})}_{\frac{n-1}{2}}\times\mathrm{U}(\mathcal{V}_1^{\rho_{\mathfrak{p}}}).$$

(3) 実素点 v では, 局所リフト $\mathrm{U}_n(\rho_v)$ が 0 となることもある. Paul [19, 20] により複素ユニタリ群のテータ対応は詳しく研究されているので, $\mathrm{U}_n(\rho_v)$ がいつ 0 になるか, 0 でないときどのような表現か容易に知ることができる.

(4) 定義より下記の図式は可換になる.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}(\mathcal{V}_1^{\rho_v}) \arrow[r, "\mathrm{U}_n"] \arrow[d, "\theta^{\psi_v,\gamma_v,1}_{\mathcal{V}_1^{\rho_v},W_1^{\sigma_v}}"'] & \mathrm{U}(\mathcal{V}_n^{\rho_v}) \\ \mathrm{U}(W_1^{\sigma_v}) \arrow[r, "\mathrm{U}_n"'] & \mathrm{U}(W_n^{\sigma_v}) \arrow[u, "\theta^{\psi_v,\gamma_v,1}_{\mathcal{V}_n^{\rho_v},W_n^{\sigma_v}}"'] \end{tikzcd}$$

三変数ユニタリ群 $\mathrm{U}(p,q)$ の Harish-Chandra パラメータ (a,b,c) を持つ離散系列表現を $\mathfrak{D}_{a,b,c}^{(p,q)}$ と書き, 三変数複素ユニタリ群の内視的 Vogan L パケットの対合を以下の条件により定義する:

$$\iota^2 = \mathrm{Id}, \qquad \iota\left(\mathfrak{D}_{a,0,c}^{(2,1)}\right) \simeq \mathfrak{D}_{c,0,a}^{(2,1)}, \qquad \iota\left(\mathfrak{D}_{a,0,c}^{(1,2)}\right) \simeq \mathfrak{D}_{c,0,a}^{(1,2)},$$
$$\iota\left(\mathfrak{D}_{a,b,0}^{(2,1)}\right) \simeq \mathfrak{D}_{a,b,0}^{(0,3)}, \qquad \iota\left(\mathfrak{D}_{0,b,c}^{(1,2)}\right) \simeq \mathfrak{D}_{0,b,c}^{(3,0)}.$$

大域的エルミート形式的空間の同値類 $\mathcal{V}_n^\rho$ をその局所化

$$\mathcal{V}_n^\rho(F_\mathfrak{p}) \simeq \mathcal{V}_n^{\rho_\mathfrak{p}}, \qquad \mathcal{V}_n^\rho(F_v) \simeq \mathcal{V}_n^{\iota^{\frac{n-1}{2}}(\rho_v)} \qquad (v \in \mathfrak{S}_\infty)$$

により定義する. 制限テンソル積

$$\mathrm{U}_n(\rho) \simeq (\otimes_{v\in\mathfrak{S}_\infty} \mathrm{U}_n(\iota^{\frac{n-1}{2}}(\rho_v))) \otimes (\otimes'_\mathfrak{p} \mathrm{U}_n(\rho_\mathfrak{p}))$$

はアデール群 $\mathrm{U}(\mathcal{V}_n^\rho, \mathbb{A})$ の許容表現である.

定理 4.4. ρ を三変数ユニタリ群の既約カスプ的保形表現とする. ρ のアルキメデス局所成分が離散系列表現もしくはその極限であり, $L(s,\rho)$ は $s=1$ で極を持つとする. もし仮説 *3.5* が $\sigma \simeq \theta_{\mathcal{V}_1^\rho, W_1^\sigma}^{\psi,\gamma,1}(\rho)$ に対して成り立つなら, 任意の奇数 n に対して, $\mathrm{U}_n(\rho)$ はカスプ的保形表現である.

注意 4.5. 定義 4.1 と 4.2 は容易に離散系列表現の極限に拡張される.

非退化エルミート形式付空間 $\mathcal{V}$ の非退化部分空間 $V \subset \mathcal{V}$ に対して, $\mathrm{U}(\mathcal{V})$ のカスプ形式 f の次の周期積分を考える:

$$P_V(f) = \int_{\mathrm{U}(V^\perp,F)\backslash \mathrm{U}(V^\perp,\mathbb{A})} f(h)\,\mathrm{d}h.$$

定義 4.6. 2 次元非退化部分空間 V と $f \in \rho$ が存在して $P_V(f) \neq 0$ を満たすとき, 三変数ユニタリ群の既約カスプ的保形表現 ρ は格別であるという.

系 4.7. ρ が三変数ユニタリ群の既約カスプ的格別保形表現であり, そのアルキメデス成分が離散系列表現もしくはその極限であるとき, 任意の奇数 n に対して, $\mathrm{U}_n(\rho)$ はカスプ的保形表現である.

注意 4.8. (1) 定理 4.4 は定理 3.8 から証明されるので, 仮説 3.5 が必要になる.

(2) 三変数ユニタリ群の既約カスプ的保形表現が格別であることと, $\mathrm{U}(1,1)$ からのテータリフトであることは同値である ([9] 参照). 注意 3.9(2) を鑑みて, この事実から系 4.7 を仮説 3.5 を使わずに証明できる.

5 カスプ形式の具体的構成①

本節では準分裂ユニタリ群の正則カスプ形式を具体的にフーリエ展開を与えて構成する. $2n$ 次分裂歪エルミート形式付空間を W_n^+ と表すことにする. この Witt

基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を固定し, 下記の行列群を考える:

$$\mathrm{U}(W_n^+) = \left\{ g \in \mathrm{R}_F^E \mathrm{GL}_{2n} \;\middle|\; g \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} {}^t g^\tau = \lambda_n(g) \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

n 次エルミート行列の空間は

$$\mathrm{Her}_n = \{ z \in \mathrm{R}_F^E \mathrm{M}_n \mid {}^t z^\tau = z \}.$$

Weil の係数制限を R_F^E と書いた. 二つの準同型

$$\mathbf{m} : \mathrm{R}_F^E \mathrm{GL}_n \to \mathrm{U}(W_n^+), \qquad \mathbf{n} : \mathrm{Her}_n \to \mathrm{U}(W_n^+)$$

を以下で定義する:

$$\mathbf{m}(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t(A^{-1})^\tau \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & z \\ 0 & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}.$$

$a = (a_v) \in \mathbb{A}_\infty^\times$ と $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ に対して, $|a|^\ell = \prod_v |a_v|_v^{\ell_v}$ とおく. 基本指標 ψ を実素点で $\psi_v(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ となるように選ぶ. $\eta \in F^\times$ に対して加法指標 ψ^η を $\psi^\eta(x) = \psi(\eta x)$ により定義する. E 上の n 次エルミート行列 B に対して指標 $\psi^B = \prod_v \psi_v^B : \mathrm{Her}_n(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ を $\psi_v^B(z) = \psi_v(\mathrm{tr}(Bz_v))$ のように定義する. n 次正定値複素エルミート行列全体を $\mathrm{Her}_n(\mathbb{R})^+$, E 上 n 次総正定値エルミート行列全体を Her_n^+ と表す.

実リー群 $\mathrm{U}(W_n^+, F_v)$ はエルミート上半空間

$$\mathfrak{H}_n = \{ Z \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \sqrt{-1}({}^t Z^\tau - Z) \in \mathrm{Her}_n(F_v)^+ \}$$

に推移的に作用する. 即ち, $g_v = \begin{pmatrix} A_v & B_v \\ C_v & D_v \end{pmatrix}$ のように書けば,

$$g_v Z_v = (A_v Z_v + B_v)(C_v Z_v + D_v)^{-1}.$$

整数の組 $\varkappa \in \mathbb{Z}^d$ に対して, $\mathbb{E}_\infty^\times$ の指標 $\varepsilon^\varkappa$ を

$$\varepsilon^\varkappa(a) = \prod_{v \in \mathfrak{S}_\infty} \left(\frac{a_v}{a_v^\tau} \right)^{\varkappa_v}$$

により定義し, 保型因子 $j_\ell^\varkappa : \mathrm{U}(W_n^+, \mathbb{A}_\infty) \times \mathfrak{H}_n^d \to \mathbb{C}^\times$ を $\varkappa, \ell \in \mathbb{Z}^d$ に対して, 積

$$j_\ell^\varkappa(g, Z) = \varepsilon^{-\varkappa}(\det g) \prod_{v \in \mathfrak{S}_\infty} \det(C_v Z_v + D_v)^{\ell_v}$$

として定義する. 下記の予想は, 少なくとも $n = 1$ もしくは $\sigma_\mathfrak{p}$ が超カスプ的でなければ正しく, 恐らく一般的にも正しいものと考えられる:

予想 5.1. $\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{Her}_n(F_\mathfrak{p})}(\mathrm{U}_n(\sigma_\mathfrak{p}), \psi_\mathfrak{p}^B) \leq 1.$

σ を $\mathrm{U}(W_1^+)$ の重さ κ の正則カスプ形式により生成される既約カスプ的保形表現とする．つまり, 汎関数 $\Lambda_\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}_\mathbf{f}}(\sigma_\mathbf{f}, \psi_\mathbf{f}^\eta)$ をフーリエ級数

$$\sum_{\eta \in F_+^\times} \Lambda_\eta(f) \prod_{v \in \mathfrak{S}_\infty} |\eta|_v^{\kappa_v/2} e^{2\pi\sqrt{-1}\eta Z_v}$$

が任意の $f \in \sigma_\mathbf{f}$ に対して $\mathrm{U}(W_1^+)$ のカスプ形式になるように選ぶことができる．

以下では n を奇数とする．放物部分群 Q_2 を W_n^+ の等方部分空間 $Ee_1 \oplus Ef_2$ の安定部分群として定義する．下記の n 次エルミート行列を考える:

$$H_n^\eta = \left(\begin{array}{cc|cc|c|cc|c} 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ \hline & & 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ \hline & & & & \ddots & & & \\ \hline & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 1 & 0 & \\ \hline & & & & & & & \eta \end{array}\right).$$

$\mathrm{U}_n(\sigma_\mathbf{f})$ は, 誘導表現

$$\mathrm{Ind}_{Q_2(\mathbb{A}_\mathbf{f})}^{\mathrm{U}(W_n^+, \mathbb{A}_\mathbf{f})}\left(\mathrm{BC}(\sigma_\mathbf{f}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}\right) \boxtimes \mathrm{U}_{n-2}(\sigma_\mathbf{f})$$

のただ一つの既約部分表現であることを思い出そう．$N_n = \mathbf{n}(\mathrm{Her}_n)$ とおく．積分

$$\Lambda_{H_n^\eta}(f) = \int_{(Q_2 \cap N_n)(\mathbb{A}_\mathbf{f}) \backslash N_n(\mathbb{A}_\mathbf{f})} (\mathrm{Id} \otimes \Lambda_{H_{n-2}^\eta})(f(u)) \overline{\psi^{H_n^\eta}(u)}\, du$$

により, 退化 Whittaker 形式

$$\Lambda_{H_n^\eta} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Her}_n(\mathbb{A}_\mathbf{f})}(\mathrm{U}_n(\sigma_\mathbf{f}), \psi_\mathbf{f}^{H_n^\eta})$$

を帰納的に構成する．一般の $B \in \mathrm{Her}_n^{\mathrm{nd}}$ に対して, $\eta = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \det B$ とおけば, Landherr の定理より $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E}_\mathbf{f})$ を $B = {}^tA^\tau H_n^\eta A$ となるように選べる．退化 Whittaker 形式 $\Lambda_B \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Her}_n(\mathbb{A}_\mathbf{f})}(\mathrm{U}_n(\sigma_\mathbf{f}), \psi_\mathbf{f}^B)$ を次の関係式で定義する:

$$\Lambda_B := \lambda_\mathbf{f}(\det A)^{-1} \Lambda_{H_n^\eta} \circ \Pi_\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} A & \\ & {}^tA^\tau \end{pmatrix}\right).$$

この λ は σ の中心指標である．この定義は A の取り方に依らないが, その証明は難しい (予想 5.1 を認めれば簡単なのだが).

定理 5.2. 任意の $f \in \mathrm{U}_n(\sigma_\mathbf{f})$ に対して, フーリエ級数

$$\sum_{B \in \mathrm{Her}_n^+} \Lambda_B(f) \prod_{v \in \mathfrak{S}_\infty} |\det B|_v^{(\kappa_v+n-1)/2} e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(BZ_v)}$$

は $\mathrm{U}(W_n^+)$ のカスプ形式である．

6 カスプ形式の具体的構成①'

次に V_1^σ が非等方的な場合にリフティングを構成しよう. 必要な道具はテータリフトである. 大雑把に言って大域テータリフトが存在し, 尖点的であるためには, 以下の条件が必要かつ十分である:

- 標準 L 関数が $s=\frac{1}{2}$ で零点を持たない.
- 標準 L 関数が半整数点 $\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ で極を持たない.
- 全ての局所テータ対応が存在する.

2 番目の条件はほぼ自動的に達成できる. 仮説 3.6 より, ある U(1) の保形指標 λ に関して標準 L 関数

$$L(s,\mathrm{U}_n(\sigma)\otimes\lambda)=\prod_{i=1}^{n}L\left(s+\frac{n+1}{2}-i,\sigma\otimes\lambda\right)$$
$$=L\left(s,\sigma\otimes\lambda\right)\prod_{i\neq\frac{n+1}{2}}L\left(s+\frac{n+1}{2}-i,\sigma\otimes\lambda\right)$$

は $s=\frac{1}{2}$ で零点を持たない. 加えて符号 $\varepsilon\left(\frac{1}{2},\sigma_v\otimes\lambda_v,\Psi_v\right)$ は, 以下の条件を満たす範囲で自在に制御される:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2},\sigma\otimes\lambda\right)=\prod_v\varepsilon\left(\frac{1}{2},\sigma_v\otimes\lambda_v,\Psi_v\right)=1.$$

ここで Ψ_v は E_v/F_v の加法指標である. さらに, 局所テータ対応はダイコトミーによりこれらの符号で完全に制御される. Waldspurger のアイデアとは, この λ で捻ることで, 以下のように 0 でないテータリフトを定義するというものである:

$$\sigma_0=\theta^{\psi,1,1}_{W_1^+,V_1^\sigma}(\sigma):=\theta^{\psi,1,1}_{W_1^+,V_1^\sigma}(\sigma\otimes\lambda)\otimes\lambda^{-1}.$$

この定義は λ に依存しない. 定理 3.8 の特別な場合として前節で, $\mathrm{U}_n(\sigma_0)$ が $\mathrm{U}(W_n^+)$ のカスプ形式であることを既に見た. その 0 でないテータリフト

$$\mathrm{U}_n(\sigma)\simeq\theta^{\psi,1,1}_{W_n^+,V_n^\sigma}(\mathrm{U}_n(\sigma_0)\otimes\lambda)\otimes\lambda^{-1}$$

は $\mathrm{U}(V_n^\sigma)$ のカスプ形式である. これで定理 3.8 の証明が完了した.

実素点でのテータ対応と局所 L 因子の解析により, 次の驚きの, しかし全く面白くない事実も判明した:

$\dim V=\dim W_n^\sigma$ かつ $\theta^{\psi,1,1}_{V,W_n^\sigma}(\mathrm{U}_n(\sigma))\neq 0$ ならば, 全ての実素点で $V(F_v)$ は分裂するか非等方的でなければならない.

7 カスプ形式の具体的構成②

最後に奇数次ユニタリ群のカスプ形式を構成して本節を締めくくる．戦略は前節で構成した偶数次ユニタリ群のカスプ形式 $\mathrm{U}_n(\sigma)$ の奇数次ユニタリ群へのテータリフト $\theta^{\psi,\gamma,1}_{V_n^\rho,W_n^\sigma}(\mathrm{U}_n(\sigma))$ を計算するというものである．この大域テータリフトが存在し，尖点的であるためには，以下の条件が必要かつ十分である:

- γ^{-1} で捻った標準 L 関数が $s=1$ で零点を持たない．
- γ^{-1} で捻った標準 L 関数が整数点 $\mathbb{Z}$ で極を持たない．
- 全ての局所テータ対応が存在する．

今回も 2 番目の条件はほぼ自動的に達成できる．実は最初の条件も，前節で議論した $s=\frac{1}{2}$ での零点の非存在よりも，遥かに容易に達成される:

ただ実素点での局所 L 因子にあるべき極がないことがあり，それにより L 関数が $s=1$ で零点を持ってしまうこともある．この問題の解決するために，複素ユニタリ群のテータ対応を詳細に調べた結果，次の事実が判明した:

γ^{-1} で捻った標準 L 関数が $s=1$ で零点を持たない

$\Rightarrow$ 実素点 $v\in\mathfrak{S}_\infty$ が存在して，$\frac{L(s,\rho_v)}{\Gamma_{\mathbb{C}}(s)}$ は $s=\frac{3-n}{2}$ で極を持つ

$\Rightarrow$ 実素点 $v\in\mathfrak{S}_\infty$ が存在して，$\theta^{\psi_v,\gamma_v,1}_{V_n^\rho,W_n^\sigma}(\mathrm{U}_n(\iota^{\frac{n-1}{2}}(\sigma_v)))=0$.

この帰結として次の二条件が同値であることが示せて，定理 4.4 の証明が完了する:

- $\theta^{\psi,\gamma,1}_{V_n^\rho,W_n^\sigma}(\mathrm{U}_n(\sigma))\neq 0$
- 全ての実素点 $v\in\mathfrak{S}_\infty$ で，$\mathrm{U}_n(\iota^{\frac{n-1}{2}}(\rho_v))\neq 0$.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 26800017 の助成を受けたものです．

References

[1] J. Arthur, The endoscopic classification of representations. Orthogonal and symplectic groups, American Mathematical Society Colloquium Publications, **61**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. xviii+590 pp.

[2] H. Atobe and H. Kojima, On the Miyawaki lifts of Hermitian modular forms of degree r, preprint.

[3] M. Chida and M.-L. Hsieh, Special values of anticyclotomic L-functions for modular forms, J. reine angew. Math., DOI 10.1515/ crelle-2015-0072

[4] S. Friedberg and J. Hoffstein, Nonvanishing theorems for automorphic L-functions on GL(2), Ann. of Math. (2) **142** (1995), no. 2, 385–423.

[5] W. T. Gan and A. Ichino, The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence, Invent. Math. **206** (2016) 705–799.

[6] W. T. Gan, Y. Qiu and S. Takeda, The regularized Siegel–Weil formula (the second term identity) and the Rallis inner product formula, Invent. Math. **198** (2014) 739–831.

[7] W. T. Gan and S. Takeda, The local Langlands conjecture for $GSp(4)$, Ann.of Math.(2) **173**(3) (2011) 1841–1882.

[8] W. T. Gan and S. Takeda, A proof of the Howe duality conjecture, J. Amer. Math. Soc. **29** (2016), no. 2, 473–493.

[9] S. Gelbart, J. Rogawski and D. Soudry, On periods of cusp forms and algebraic cycles for U(3), Israel J. Math. **83** (1993), no. 1-2, 213–252.

[10] S. Gelbart, J. Rogawski and D. Soudry, Endoscopy, theta-liftings, and period integrals for the unitary group in three variables, Ann. of Math. (2) **145** (1997), no. 3, 419–476.

[11] M.-L. Hsieh, Special values of anticyclotomic Rankin-Selberg L-functions, Doc. Math. **19** (2014), 709–767.

[12] T. Ikeda, On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$, Ann. of Math. (2) **154** (2001) 641–681.

[13] T. Ikeda, On the lifting of hermitian modular forms, Compositio Math. **144** (2008) 1107–1154.

[14] T. Ikeda, Pullback of the lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki's conjecture, Duke Math. J. **131** (2006), no. 3, 469–497.

[15] T. Kaletha, A. Mínguez, S. W. Shin and P.-J. White, Endoscopic classification of representations: inner forms of unitary groups, arXiv:1409.3731.

[16] S. S. Kudla, On certain Euler products for $SU(2,1)$, Compositio Math. **42** (1981), 321–344.

[17] C. Mok, Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups, Mem. Amer. Math. Soc. **235** (2015), no. 1108, vi+248 pp.

[18] A. Murase and T. Sugano, On the Fourier-Jacobi expansion of the unitary Kudla lift, Compositio Math. **143** (2007), 1–46

[19] A. Paul, Howe correspondence for real unitary groups, J. Funct. Anal. **159** (1998), no. 2, 384–431.

[20] A. Paul, Howe correspondence for real unitary groups II, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 10, 3129–3136.

[21] J. D. Rogawski, Automorphic representations of unitary groups in three variables, Annals of Mathematics Studies, **123**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990. xii+259 pp.

[22] J.-L. Waldspurger, Correspondance de Shimura et quaternions, Forum Math. **3** (1991), no. 3, 219–307.

Graduate School of Mathematics, Kyoto University, Kitashirakawa, Kyoto, 606-8502, Japan
e-mail:yamana07@math.kyoto-u.ac.jp