数理解析研究所講究録
第2055巻 2017年 124-136

CONSTRUCTION OF THETA FUNCTIONS OF ANY VECTOR VALUED WEIGHT AND APPLICATIONS TO LIFTS AND CONGRUENCES

TOMOYOSHI IBUKIYAMA (OSAKA UNIVERSITY) AND
SHO TAKEMORI (MAX PLANCK INSTITUTE FOR MATHEMATICS)

1. 概要

この原稿は，プレプリント [7] の概説である．多重調和多項式付きのテータ関数は Siegel 保型形式の具体的な構成を与えることは，よく知られている．しかし，既存の文献には，一般の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約多項式表現 ρ について，ウェイト ρ のテータ級数を構成するために，どのように多重調和多項式を構成すれば良いかが書かれていないように思える．この原稿では，一般の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約多項式表現 ρ について，多重調和多項式を構成する具体的なやり方を説明する．その応用として，次数3のとき，最高ウェイトが $(14,13,5),(16,13,7),(18,13,5),(18,17,5)$ などの場合に具体的にカスプ形式を構成する．このウェイトを選んだ理由は，Bergström, Faber と van der Geer [3] が予想したリフトの例が含まれているからである．また，このリフトになっている Hecke 固有形式と思われるもののと，そうでないものの間の Hecke 固有値についての合同式の例も与える．

2. テータ関数

この節では，ベクトル値多重調和多項式付きのテータ関数について，よく知られた事実の紹介をする．

2.1. Siegel 保型形式.

まず，ベクトル値 Siegel 保型形式の定義をする．正の整数 n に対し，

$$\mathbb{H}_n = \{z = x + iy \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) \mid x, y \in \mathrm{Sym}_n(R),\ y > 0\}$$

で次数 n の Siegel 上半空間を表し，

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid {}^t g \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix} \right\},$$

で次数 n のシンプレクティック群を表す．(ρ, V) を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約多項式表現とする．$g \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ と関数 $f : \mathbb{H}_n \to V$ に対して，

$$f|_\rho[g](\tau) = \rho\,(c\tau + d)^{-1} f(g\tau), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}).$$

と置く．Γ を $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ の指数有限部分群とし，χ を Γ の位数有限の指標とする．正則関数 $f : \mathbb{H}_n \to V$ は，

$$f|_\rho[\gamma] = \chi(\gamma) f, \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

を満たすとき，次数n，ウェイトρ，レベルΓ，指標χのSiegel保型形式と呼ばれる．ただし，$n=1$のときは，各カスプでの正則性の条件を加える．また，Siegel保型形式fが$\Gamma\backslash\mathbb{H}_n$の佐武コンパクト化の境界で消えているとき，$f$をカスプ形式と呼ぶ．ウェイト$\rho$，レベル$\Gamma$，指標$\chi$のカスプ形式の空間を$S_\rho(\Gamma,\chi)$で表す．指標$\chi$が自明のとき，$S_\rho(\Gamma,\chi)$を単に，$S_\rho(\Gamma)$と書く．また，$\lambda\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$が$\rho$の最高ウェイトのとき，$S_\rho(\Gamma)$を$S_\lambda(\Gamma)$と記す．

2.2. **ベクトル値多重調和多項式付きのテータ関数．** 次に，ベクトル値多重調和多項式付きのテータ関数の定義をする．Sをm次の正定値，偶整数対称行列とする．ここで，偶整数対称行列とは，すべての成分が整数であって，対角成分はすべて偶数であるような対称行列である．NS^{-1}も偶整数対称行列であるような最小の正の整数NをSのレベルと呼ぶ．$X=(x_{i\nu})_{1\leq i\leq n,1\leq\nu\leq m}$を成分が変数であるような$n$行$m$列の行列とする．添字$1\leq i\leq j\leq n$に対し，微分作用素$\Delta_{ij}$を

$$\Delta_{ij}(X)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_{i\nu}\partial x_{j\nu}}.$$

Xの(成分の)多項式$P(X)$は

$$\Delta_{ij}(X)P(X)=0$$

をすべての$1\leq i\leq j\leq n$であるような(i,j)について満たすとき，多重調和であると呼ばれる．これは，$P(AX)$が任意の$A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$について$X$の$mn$個の変数について調和であることと同値である．次に，$P(X)$をV値のXについての多項式とし(つまり各成分がXの多項式になっているようなV値の関数)，Pについて以下の条件を仮定する．

$$P(AX)=\rho(A)P(X)\quad\forall A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}). \tag{2.1}$$

上の述べたことから，この条件の元では，$P(X)$がXのmn個の変数について調和であることと，多重調和であることは同値である．このようなSとPに対し，テータ関数を以下で定義する．

$$\vartheta_{S,P}(\tau)=\sum_{G\in M_{nm}(\mathbb{Z})}P(GS^{1/2})\exp(\pi i Tr(GS\,{}^tG\tau)).$$

ここで$S^{1/2}$は$(S^{1/2})^2=S$となるような正定値対称行列である．NをSのレベルとするとき，$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$の部分群$\Gamma_0^{(n)}(N)$を

$$\Gamma_0^{(n)}(N)=\left\{g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})\mid c\equiv 0 \bmod N\right\}$$

で定義し，$\Gamma_0(N)$上の指標χ_Sを

$$\chi_S(\gamma)=\left(\frac{(-1)^{m/2}\det(S)}{\det(d)}\right),\qquad\left(\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0^{(n)}(N)\right).$$

で定義する．このとき次のよく知られた定理が成立する．

定理 2.1 ([2], [4]). m を偶数と仮定する．(ρ, V) を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約多項式表現，S を正定値，偶整数対称行列，N を S のレベル，$P(X)$ を V 値，多重調和多項式で, (2.1) を満たすものとする．このとき，$\vartheta_{S,P}$ は次数 n，ウェイト $\det^{m/2}\rho$，レベル $\Gamma_0^{(n)}(N)$，指標 χ_S の *Siegel* 保型形式である．

注意 2.2. m が奇数や，S がより一般の場合でも似た結果は成立する (cf. [4]).

後で使うので，テータ関数を格子の言葉を使って書きかえておく．行ベクトル $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{R}^m$ に対し，$(x, y) = \sum_{i=1}^m x_i y_i$ と置く．$L \subset \mathbb{R}^m$ を偶整数格子 (つまり，$(x, y) \in \mathbb{Z}$ がすべての $x, y \in L$ に成り立ち，$(x, x) \in 2\mathbb{Z}$ がすべての $x \in L$ について成立する) とする．P を (2.1) を満たす多重調和多項式とする．このとき，P と偶整数格子 L に付随するテータ関数を以下で定義する．

$$\vartheta_{L,P}(\tau) = \sum_{x_1,\ldots,x_n \in L} P(X) exp\left(\pi i \mathrm{Tr}(((x_i, x_j))\tau)\right),$$

ここで,

$$X = {}^t(x_1, \ldots, x_n).$$

である．このとき，定理 2.1 より，$\vartheta_{L,P}$ も次数 n，ウェイト $\det^{m/2}\rho$，レベル $\Gamma_0^{(n)}(N)$，指標 χ_S の Siegel 保型形式である．

3. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の多項式表現と多重調和多項式の構成

この節では，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の一般の既約多項式表現のある実現について，よく知られた事実を紹介し，定理 2.1 の仮定を満たす多重調和多項式 P の構成について述べる．この節で述べる結果の証明については，[5] や [8] などの教科書を参照されたい．

3.1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の多項式表現. 多項式表現の空間の基底が，"bideterminant" とよばれる小行列式の積で与えられるという事実が，この節の主な主張である．

まず，記号の準備をする．$1 \le r \le n$ となる整数 r に対し，集合 N_r を $\{1, 2, \ldots, n\}$ の元数 r のすべての部分集合からなる集合を表す．$\mathbb{C}[U]$ で，不定元 u_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ で生成される，n^2 変数の $\mathbb{C}$ 上の多項式環を表し，$n \times n$ 行列 U を $U = (u_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ で定義する．2 つの集合 $I, J \in N_r$ に対し，小行列式 U_{IJ} を

$$U_{IJ} = \begin{vmatrix} u_{i_1 j_1} & \cdots & u_{i_1 j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i_r j_1} & \cdots & u_{i_r j_r} \end{vmatrix},$$

で定める．但し，ここで $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, $J = \{j_1, j_2, \ldots j_r\}$, $(i_1 < i_2 < \cdots < i_r,\ j_1 < j_2 < \cdots < j_r)$ である．特別な場合として，$I = \{1, 2, \ldots, r\}$ であるときは, U_{IJ} を単に U_J で表す. $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ なるすべての集合 J について U_J が生成する $\mathbb{C}[U]$ の部分 $\mathbb{C}$-代数は，Plücker 代数と呼ばれ，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の $p(U) \mapsto p(UA)$，(ここで $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) と

いう作用で閉じている．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の任意の既約多項式表現 ρ は，この Plücker 代数の中に実現されることが知られているのだが，次に ρ の表現空間の実現となるような，Plücker 代数の部分空間を定義する．

ρ を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約多項式表現とすると，最高ウェイトをとることによって，そのような ρ と，優ウェイト (dominant weight) $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (つまり $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_n \geq 0$ となる整数の n 個の組) が対応している．λ を 優ウェイトとするとき，$V(\lambda)$ を以下で生成される Plücker 代数の有限次 $\mathbb{C}$-ベクトル空間とする

$$\left\{ \prod_{\nu=1}^{\lambda_1} U_{I_\nu} \mid (I_1, I_2, \ldots, I_{\lambda_1}) \in N_1^{\lambda_1-\lambda_2} \times N_2^{\lambda_2-\lambda_3} \times \cdots \times N_n^{\lambda_n} \right\}. \tag{3.1}$$

ここで，添字 I_ν のうち，N_i の元は，$\lambda_i - \lambda_{i+1}$ 回現れる．ただし，ここで $\lambda_{n+1} = 0$ と置いている．$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ と $P \in \mathbb{C}[U]$ に対し，$\pi(A)P(U) = P(UA)$ と置くと，定義より，$\pi(A)V(\lambda) = V(\lambda)$ である．$(\pi|_{V(\lambda)}, V(\lambda))$ は既約な $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の多項式表現で，その highest weight は λ であることが知られている．生成系 (3.1) は，一般には一次独立ではないが，分割 λ の半標準 Young 盤 (semi-standard Young tableaux) に対応するものだけを取れば，一次独立になる．ここで，分割 λ の半標準 Young 盤とは以下で定義されるような分割 λ の Young 盤のことである．

定義 3.1 (半標準 Young 盤). 分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ の半標準 Young 盤とは，分割 λ の Young 図形 (つまり，i 行目に λ_i 個の箱があるような図形) に，以下の制約の元で，整数 $1, 2, \ldots, n$ を埋めたものである．

(i) 埋められた数たちは，各行について，左から右に非減少である．

(ii) 埋められた数たちは，各列について，上から下に増加する．

例 3.2. $n = 3$，$\lambda = (2, 1, 0)$ のとき例を上げる．このとき，分割 λ の半標準 Young 盤は，以下で尽くされる．

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

$\mathcal{T}$ を分割 λ の Young 盤とし，整数 $1 \leq \nu \leq \lambda_1$ に対し，

$$I_\nu := \{a_1, a_2, \ldots, a_{m_\nu}\}$$

を $\mathcal{T}$ の第 ν 列とする．このとき，多項式 $P_{\mathcal{T}}(U)$ を以下の小行列の積で定義する．

$$\prod_{\nu=1}^{\lambda_1} U_{I_\nu}.$$

このように，(必ずしも半標準でない)Young 盤から，得られる小行列の積 $P_{\mathcal{T}}$ は “bideterminant” と呼ばれる．上でも少し述べたが，以上の準備の元で次が成立する．

定理 3.3 (cf. [5] の §4.5, 4.7). $(\pi|_{V(\lambda)}, V(\lambda))$ は最高ウェイト λ の，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約多項式表現であり，集合

$$\{P_{\mathcal{T}} \mid \mathcal{T} \text{ は分割}\lambda \text{ の半標準 } \textit{Young} \text{盤} \}$$

は $V(\lambda)$ の基底を与える．

注意 3.4. この定理は，複素数体を標数0の体に置きかえても成り立つ．また，任意標数の体上で，上で与えられた基底は一次独立である．

例 3.5. (i) $n=3$, $\lambda=(j,0,0)$ とする．このとき，すべての半標準 Young 盤は，$\boxed{i_1}\boxed{i_2}\boxed{\cdots}\boxed{i_j}$ $(1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_j\le 3)$ で尽くされる．このとき，対応する bideterminant は，$P_{\boxed{i_1}\boxed{i_2}\boxed{\cdots}\boxed{i_j}}=u_{1i_1}u_{1i_2}\cdots u_{1i_j}$ で与えられる．つまり，定理 3.3 で与えられて基底は u_{11},u_{12},u_{23} の次数 j の斉次単項式の集合と等しい．

(ii) $n=3$, $\lambda=(2,1,0)$ とする．半標準 Young 盤を，$\mathcal{T}_1=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$,

$\mathcal{T}_2=\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$ で定義すると，対応する bideterminant は以下で与えられる．

$$P_{\mathcal{T}_1}=\begin{vmatrix}u_{11}&u_{12}\\u_{21}&u_{22}\end{vmatrix}u_{11},\quad P_{\mathcal{T}_2}=\begin{vmatrix}u_{12}&u_{13}\\u_{22}&u_{23}\end{vmatrix}u_{12}.$$

3.2. **多重調和多項式の構成.** 次に，上で構成した表現空間 $V(\lambda)$ を用いた，定理 2.1 の仮定を満たす $V(\lambda)$ 値の多重調和多項式の構成について述べる．多重調和多項式を構成するのに，以下の命題を使う．正の整数 m は，§2.2 で使ったもの，つまり偶整数対称行列 S のサイズとする．

命題 3.6. $\lambda\in\mathbb{Z}^n_{\ge 0}$ を優ウェイト，$B\in M_{n,m}(\mathbb{C})$ を $B\,{}^tB=0_n$ となるような行列とし，$X=(x_{i\nu})$ を n 行 m 列の行列変数とする．このとき，任意の $p(U)\in V(\lambda)$ について，X についての多項式 $p(B\,{}^tX)$ は多重調和である．

ベクトル空間 $V(\lambda)$ の次元を $d=d_\lambda$ と書き，$\{p_1(U),\dots,p_d(U)\}$ を $V(\lambda)$ の基底とする．$\mathbb{C}^d$ を表現空間にもつような表現 $\rho:\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\to\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ を以下で定める．

$$(3.2)\qquad (p_1(UA),\dots,p_d(UA))=(p_1,\dots,p_d)\,{}^t\rho({}^tA).$$

そうすると，2つの表現 $A\mapsto\rho(A)$ と $A\mapsto{}^t\rho({}^tA)$ は，どちらも最高ウェイト λ の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約表現である．$B\in M_{n,m}(\mathbb{C})$ を $B\,{}^tB=0_n$ であるような行列とする．このような B に対し，$\mathbb{C}[X]^d$ 値の行ベクトルを以下で定義する．

$$(3.3)\qquad P_B(X)={}^t\big(p_1(B\,{}^tX),\dots,p_d(B\,{}^tX)\big).$$

定義より，$P_B(X)$ は，任意の $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に対して，

$$P_B(AX)=\rho(A)P_B(X)$$

を満たし，また命題 3.6 より多重調和である．従って，定理 2.1 より ϑ_{S,P_B} は $\mathbb{C}^d$ 値のベクトル値 Siegel 保型形式を与える．

基底 $\{p_1(U),\dots,p_d(U)\}$ の取り方については，実際の計算が容易なので，論文 [7] では § 3.1 で紹介した bideterminant による基底を選んでいる．以下では，bideterminant による基底の順番を適当に決めて，それを $\{p_1(U),\dots,p_d(U)\}$ と書く．この基底に付随して決まる (3.2) の ρ も同じ記号で書く．論文 [7] では，ほとんど使われていないが，他の

基底の選択についても紹介しておく．2 つの表現 ρ と $A \mapsto {}^t\rho({}^tA)$ は同値なので，${}^t\rho({}^tA)Q = Q\rho(A)$ がすべての $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ について成り立つような行列 $Q \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ がスカラー倍の違いを除いて一意的に存在する．$V(\lambda)$ の別の基底 $\{e_1(U), \dots, e_d(U)\}$ を以下で定める．

$$(e_1(U), \dots, e_d(U)) = (p_1(U), \dots, p_d(U))Q.$$

$\mathbb{C}[U]$ 値の関数 $f(\tau, U)$ を

$$f(\tau, U) = (e_1(U), \dots, e_d(U))\vartheta_{S,P}(\tau)$$

で定義すると，

$$f(\gamma\tau, U) = \chi_S(\gamma)\det(c\tau + d)^{m/2} f(\tau, U(c\tau + d))$$

が任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(n)}(N)$ に対して成り立つ．

例 3.7. $n = 2$, $\lambda = (l, 0)$ とする．．このとき，$p_i(U) = u_1^{l-i}u_2^i$ と取ることができ，$e_i(U)$ は $e_i(U) = \binom{l}{i}p_i(U)$ で与えられる．

4. リフトについての予想

この節では，Bergström, Faber, van der Geer [3] らによる楕円保型形式の組から次数 3 のベクトル値 Siegel 保型形式へのリフトについての予想を述べる．

$\rho = \rho_\lambda$ を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の多項式表現で，最高ウェイトが $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ のものとする．Hecke 固有形式 $F \in M_\lambda(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ と素数 p に対し，$(\alpha_{0,p}, \alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{n,p})$ を p-佐武パラメーターとする．ここで，佐武パラメーターは

$$\alpha_{0,p}^2\alpha_{1,p}\cdots\alpha_{n,p} = p^{\sum_{i=1}^n \lambda_i - n(n+1)/2}$$

となるようとっている．不定元 t についての，多項式 $Q_p(t, F, \mathrm{Sp})$ と $Q_p(t, F, \mathrm{St})$ を以下で定義する．

$$Q_p(t, F, \mathrm{Sp}) = \prod_{J \subset \{1,2,\dots,n\}} \left(1 - \alpha_{0,p}\left(\prod_{j \in J}\alpha_{j,p}\right)t\right),$$

$$Q_p(t, F, \mathrm{St}) = (1 - t)\prod_{i=1}^n (1 - \alpha_{i,p}t)(1 - \alpha_{i,p}^{-1}t).$$

F の標準 L 関数，スピノル L 関数をそれぞれ，次で定義する．

$$L(s, F, \mathrm{Sp}) = \prod_{p:\ \text{prime}} Q_p(p^{-s}, F, \mathrm{Sp})^{-1},$$

$$L(s, F, \mathrm{St}) = \prod_{p:\ \text{prime}} Q_p(p^{-s}, F, \mathrm{St})^{-1}.$$

次に，$f \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ を楕円カスプ形式とし，$\beta_{p,1}(f)$, $\beta_{p,2}(f)$ を f の佐武パラメーターとする (ここで，$\beta_{p,1}(f)\beta_{p,2}(f) = p^{k-1}$)．$f$ の 2 次の

対称 L 関数 $L(s,f,Sym(2))$ を

$$\prod_{p:prime}(1-p^{k-1-s})^{-1}(1-\beta_{p,1}(f)^2p^{-s})^{-1}(1-\beta_{p,2}(f)^2p^{-s})^{-1},$$

で定義する．また，2 つの楕円カスプ形式 $g \in S_{k_1}(SL_2(\mathbb{Z}))$ と $h \in S_{k_2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ に対し，g と h のテンソル積の L 関数を

$$L(s,g\otimes h)=\prod_{p:prime}\prod_{i,j=1}^{2}(1-\beta_{p,i}(g)\beta_{p,j}(h)p^{-s})^{-1}.$$

で定義する．Bergström, Faber と van der Geer [3] が予想したリフトは 3 種類あるが，最も興味深いものを述べる．

予想 4.1 (Bergström, Faber, van der Geer [3] Conjecture 7.7 (i)). *$a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $a \geq b \geq c$ となる整数の 3 つ組とする．3 つの Hecke 固有形式 $f \in S_{b+3}(SL_2(\mathbb{Z}))$, $g \in S_{a+c+5}(SL_2(\mathbb{Z}))$, $h \in S_{a-c+3}(SL_2(\mathbb{Z}))$ に対し，次数 3 の Hecke 固有形式 $F \in S_{(a+4,b+4,c+4)}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ が存在して，以下を満たす．*

$$L(s,F,Sp)=L(s,f\otimes g)L(s-c-1,f\otimes h),$$
$$L(s,F,St)=L(s+b+2,f,Sym(2))L(s+a+3,g\otimes h).$$

注意 4.2. $L(s,F,St)$ の形は，[3] には書かれていないが，[6] の p.15 に書いてある式を使えば容易に計算できる．

数値例の計算において，Fourier 係数を Hecke 作用素の計算が必要な分だけ計算したが，例にでてくる表現空間の次元はかなり大きいので，紙幅の都合上，Fourier 係数の表は載せないことにする．Fourier 係数の表については，例えばウェイト $(14,13,5)$ の場合は，`https://github.com/stakemori/e8theta_degree3/blob/master/results/wt14_13_5/wt14_13_5.org` を参照のこと．

5. 数値例と合同式

この節では，次数 3 の場合に，具体的にテータ関数を構成することにより予想 4.1 を支持するような数値例を与える．具体的には，ウェイト λ が，$(14,13,5),(16,13,7),(18,13,5),(18,17,5)$ の場合の数値例を紹介する．論文 [3] でも，ある予想が成立することを仮定した上で，Hecke 固有値 $T(p)$ の $S_\lambda(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ におけるトレースが，素数 $p \leq 17$ と λ が $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \leq 72$ かつ $4 \leq \lambda_3$ を満たす場合に，Lefschetz 跡公式を用いて数値的に計算されている．彼らの方法は我々の方法と全く違うことと，彼らの方法では例えば Fourier 係数などは計算できないであろうということを述べておく．

5.1. 表現空間とカスプ形式の空間の次元.

ベクトル空間 $V(\lambda)$ の次元は，定理 3.3 を使うことで，容易に計算できる．$\lambda=(14,13,5),(16,13,7),(16,16,14),(18,13,5),(18,17,5)$ の場合のカスプ形式の空間の次元の数値については，Taíbi [11] の結果を使った．彼の結果は，Arthur の endoscopic classification に依存している．表 1 のカスプ形式についての

λ	$\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda)$	$\dim_{\mathbb{C}} S_\lambda(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$
(14, 13, 5)	99	1*
(16, 13, 7)	154	2*
(18, 13, 5)	405	2*
(18, 17, 5)	195	3*

TABLE 1. 表現空間とカスプ形式の空間の次元

次元は現時点で完全に証明されているというわけではないが，以下，この原稿の最後まで，この表が正しいことを仮定する．

5.2. **テータ関数のための記号．** 偶整数ユニモジュラー格子，E_8 を以下で定義する．

$$E_8 = \left\{ (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8 \mid \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{8} x_i \in 2\mathbb{Z}, \\ 2x_i \in \mathbb{Z}, x_i - x_j \in \mathbb{Z}, (1 \le i, j \le 8) \end{array} \right\}.$$

行列 $B \in M_{3,8}(\mathbb{C})$ を $B\,{}^tB = 0$ を満たすものとし，$P_B(X)$ を (3.3) で定義したもの (ここで，基底 $\{p_1(U), \dots, p_d(U)\}$ の) は，§3.2 で述べたように，定理 3.3 で述べられたの bideterminant たちによる基底を適当な順番で並べたものとする．以上のような，B に対し，

$$\vartheta(\tau, E_8, \lambda + (4,4,4), B) = \vartheta_{E_8, \Re P_B}(\tau)$$

と置く．

5.3. **L 関数の Euler 因子の計算．** Hecke 固有形式 $F \in M_\rho(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ に対し，次数 3 の場合に，§4 で定義された多項式 $Q_p(t, F, \mathrm{Sp})$ をどのように計算するかを述べる．素数 p と整数 $i = 1, 2, \dots, n$ に対し，$M_\rho(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ に作用する Hecke 作用素を以下で定義する．

$$T(p) = Sp(n, \mathbb{Z}) \begin{pmatrix} 1_n & 0_n \\ 0_n & p1_n \end{pmatrix} Sp(n, \mathbb{Z}),$$

$$T_i(p^2) = Sp(n, \mathbb{Z}) \begin{pmatrix} p1_i & & & \\ & 1_{n-i} & & \\ & & p1_i & \\ & & & p^2 1_{n-i} \end{pmatrix} Sp(n, \mathbb{Z}).$$

$F \in M_\rho(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ を Heccke 作用素とし，$T(p)$ の Hecke 固有値を $\lambda(p)$, $T_i(p^2)$ の Hecke 固有値を $\lambda_i(p^2)$ $(i = 1, 2, 3)$ と置く．$Q_p(t, F, Sp) = \sum_{i=0}^{8} (-1)^i c_i(p) t^i$ と書いたとき，宮脇 [9] は [1] の結果を使って以下を

得た ([10] も参照のこと).

$$
\begin{aligned}
&c_0(p) = 1, \quad c_1 = \lambda(p),\\
&c_2(p) = p\left\{\lambda_1(p^2) + (p^2+1)\lambda_2(p^2) + (p^2+1)^2\lambda_3(p^2)\right\},\\
&c_3(p) = p^3\lambda(p)\left\{\lambda_2(p^2) + \lambda_3(p^2)\right\},\\
&c_4(p) = p^6\left\{\lambda(p)^2\lambda_3(p^2) + \lambda_2(p^2)^2 - 2p\lambda_1(p^2)\lambda_3(p^2)\right.\\
&\qquad\qquad \left.-2(p-1)\lambda_2(p^2)\lambda_3(p^2) - (p^6+2p^5+2p^3+2p-1)\lambda_3(p^2)^2\right\},\\
&c_5(p) = p^6\lambda_3(p^2)c_3(p), \quad c_6(p) = p^{12}\lambda_3(p^2)^2c_2(p),\\
&c_7(p) = p^{18}\lambda_3(p^2)^3c_1(p), \quad c_8(p) = p^{24}\lambda_3(p^2)^4.
\end{aligned}
$$

以下の例では，$p=2$ の場合に，固有値 $\lambda(p), \lambda_3(p^2)$ を計算し，8 次の多項式 $Q_p(t, F, Sp)$ を計算した．例えば $\lambda(2)$ を計算するのには以下の式を使った．ここで，$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ であり，V_ρ 値のベクトル値 Siegel 保型形式 G と 3 次の半整数対称行列 S について，$a(S,F) \in V_\rho$ で F の S 番目の Fourier 係数を表わしている．

$$
a(S_0, F|T(2)) = 2^{-3}\rho\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) a(1_3, F) + a(2S_0, F).
$$

$i = 1, 2, 3$ について，$a(S_0, F|T_i(4))$ を書くには紙幅が限られているのでこれらは省略する．

5.4. **ウェイト $(14,13,5)$ の場合．** まず，$\lambda = (14,13,5)$ の場合の例を挙げる．行列 $B_{(14,13,5)} \in M_{3,8}(\mathbb{C})$ を

$$
\begin{pmatrix} -7 & -5i & 6 & 8i & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7i & 4 & 2i & 4 & -2i & 0 & 0 \\ -5 & -7i & -2 & 0 & -6 & 4i & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

で定義する．そうすると $B_{(14,13,5)}\,{}^tB_{(14,13,5)} = 0$ である．保型形式 $G_{(14,13,5)}$ を

$$
G_{(14,13,5)}(\tau) = \vartheta(\tau, (14,13,5), B_{(14,13,5)})
$$

と置くと，$G_{(14,13,5)} \in S_{(14,13,5)}(\Gamma_3)$ である．§5.1 の次元公式から，$S_{(14,13,5)}(\Gamma_3)$ は $G_{(14,13,5)}$ で生成されることが言える．Hecke 固有形式 $G_{(14,13,5)}$ に付随する L 関数の 2 での Euler 因子は以下で与えられる．

命題 5.1. 素数 2 での *Euler* 因子 $Q_2(t, G_{(14,13,5)}, Sp)$ とは以下で与えられる．

$$
\begin{aligned}
Q_2(t, G_{(14,13,5)}, Sp) = &\left(1 - 2^{13}t\right)^2\left(1 + 2^8\cdot 5\cdot 11t + 2^{26}t^2\right)\\
&\times\left(1 + 2^6\cdot 3^4t - 2^{17}\cdot 151t^2 + 2^{32}\cdot 3^4t^3 + 2^{52}t^4\right).
\end{aligned}
$$

$$Q_2(t, G_{(14,13,5)}, St) = (1-t)\left(1 + 2^{-5}\cdot 5\cdot 11t + t^2\right) \\ \times \left(1 + 2^{-7}\cdot 3^4 t - 2^{-9}\cdot 151t^2 + 2^{-7}\cdot 3^4 t^3 + t^4\right).$$

注意 5.2. 命題 5.1 より，$Q_2(2^{-s}, G_{(14,13,5)}, Sp)^{-1}$ は $L(s, f_{12}\otimes f_{16})L(s-2, f_{12}\otimes f_{12})$ の 2 での Euler 因子に一致している．ここで，$f_{12}\in S_{12}(SL_2(\mathbb{Z}))$, $f_{16}\in S_{16}(SL_2(\mathbb{Z}))$ はそれぞれウェイト 12, 16 の楕円 Hecke 固有形式である．従って，この結果は予想 4.1 の $(a,b,c)=(10,9,1)$ の場合と整合性がある．

5.5. **ウェイト $(16,13,7)$ の場合．** 表 1 より，$\dim_{\mathbb{C}} S_{(16,13,7)}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z})) = 2$ である．この場合も，適当な行列 $B^{(i)}_{(16,13,7)}\in M_{3,8}(\mathbb{C})$ $(i=1,2)$ で $B^{(i)}_{(16,13,7)}\,{}^tB^{(i)}_{(16,13,7)} = 0$ となるものが存在し，$S_{(16,13,7)}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ は $\vartheta(\tau, E_8, (16,13,7), B^{(1)}_{(16,13,7)})$ と $\vartheta(\tau,, E_8, (16,13,7), B^{(2)}_{(16,13,7)})$ で生成される．

命題 5.3. $S_{(16,13,7)}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ に属する *Hecke* 固有形式 $G^{(1)}_{(16,13,7)}$，$G^{(2)}_{(16,13,7)}$ で以下を満たすものが存在する．

$$Q_2(t, G^{(1)}_{(16,13,7)}, Sp) = \left(1-2^{15}t\right)^2\left(1 + 2^{10}\cdot 5\cdot 11t + 2^{30}t^2\right) \\ \times \left(1 + 2^6\cdot 3^2\cdot 19t - 2^{17}\cdot 10831t^2 + 2^{36}\cdot 3^2\cdot 19t^3 + 2^{60}t^4\right),$$

$$Q_2(t, G^{(2)}_{(16,13,7)}, Sp) = \left(1-2^{15}t\right)^2\left(1 - 2^4\cdot 7\cdot 113t + 2^{11}\cdot 7\cdot 100927t^2 \right.\\ \left. -2^{23}\cdot 950401t^3 + 2^{41}\cdot 7\cdot 100927t^4 - 2^{64}\cdot 7\cdot 113t^5 + 2^{90}t^6\right),$$

$$Q_2(t, G^{(1)}_{(16,13,7)}, St) = (1-t)\left(1 + 2^{-5}\cdot 5\cdot 11t + t^2\right) \\ \times \left(1 + 2^{-9}\cdot 3^2\cdot 19t - 2^{-13}\cdot 10831t^2 + 2^{-9}\cdot 3^2\cdot 19t^3 + t^4\right),$$

$$Q_2(t, G^{(2)}_{(16,13,7)}, St) = (1-t)\left(1 - 2^{-11}\cdot 7\cdot 113t + 2^{-19}\cdot 7\cdot 100927t^2 \right.\\ \left. -2^{-22}\cdot 950401t^3 + 2^{-19}\cdot 7\cdot 100927t^4 - 2^{-11}\cdot 7\cdot 113t^5 + t^6\right).$$

注意 5.4. 命題 5.3 より，$Q_2(2^{-s}, G^{(1)}_{(16,13,7)}, Sp)^{-1}$ は $L(s, f_{12}\otimes f_{20})L(s-4, f_{12}\otimes f_{12})$ の 2 での Euler 因子と一致している．従って，この結果は予想 4.1 の $(a,b,c)=(12,9,3)$ の場合と整合性がある．

5.6. **ウェイト $(18,13,5)$ の場合．** 表 1 より，$S_{(18,13,5)}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ の次元は 2 である．この場合も，適当な行列 $B^{(i)}_{(18,13,5)}\in M_{3,8}(\mathbb{C})$ $(i=1,2)$ で $B^{(i)}_{(18,13,5)}\,{}^tB^{(i)}_{(18,13,5)} = 0$ となるものが存在し，$S_{(18,13,5)}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ は $\vartheta(\tau, E_8, (18,13,5), B^{(1)}_{(18,13,5)})$, $\vartheta(\tau, E_8, (18,13,5), B^{(2)}_{(18,13,5)})$ で生成される．

命題 5.5. $S_{(18,13,5)}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ に属する *Hecke* 固有形式 $G^{(1)}_{(18,13,5)}, G^{(2)}_{(18,13,5)}$ で以下を満たすものが存在する.

$$Q_2(t, G^{(1)}_{(18,13,5)}, Sp) = \left(1 + 2^6\cdot 3^2\cdot 19t - 2^{17}\cdot 10831t^2 + 2^{36}\cdot 3^2\cdot 19t^3 + 2^{60}t^4\right) \times \left(1 + 2^8\cdot 3^4 t - 2^{21}\cdot 151t^2 + 2^{38}\cdot 3^4 t^3 + 2^{60}t^4\right),$$

$$Q_2(t, G^{(2)}_{(18,13,5)}, Sp) = 1 - 2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7t - 2^{13}\cdot 5^2\cdot 17\cdot 19t^2 + 2^{26}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 89t^3 - 2^{40}\cdot 3\cdot 43\cdot 12163t^4 + 2^{56}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 89t^5 - 2^{73}\cdot 5^2\cdot 17\cdot 19t^6 - 2^{96}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7t^7 + 2^{120}t^8,$$

$$Q_2(t, G^{(1)}_{(18,13,5)}, St) = (1-t)\left(1 + 2^{-5}\cdot 5\cdot 11t + t^2\right) \times \left(1 - 2^{-11}\cdot 3^4\cdot 19t - 2^{-13}\cdot 1471t^2 - 2^{-11}\cdot 3^4\cdot 19t^3 + t^4\right),$$

$$Q_2(t, G^{(2)}_{(18,13,5)}, St) = (1-t)\left(1 + 2^{-10}\cdot 2003t + 2^{-17}\cdot 373621t^2 + 2^{-18}\cdot 894011t^3 + 2^{-17}\cdot 373621t^4 + 2^{-10}\cdot 2003t^5 + t^6\right).$$

注意 5.6. $Q_2(2^{-s}, G^{(1)}_{(18,13,5)}, Sp)^{-1}$ は $L(s, f_{12}\otimes f_{20})L(s-2, f_{12}\otimes f_{16})$ の 2 での Euler 因子に一致する. 従って, この結果は予想 4.1 の $(a,b,c) = (14,9,1)$ 場合と整合性がある.

5.7. **ウェイト $(18,17,5)$ の場合.** 表 1 より, $\dim_{\mathbb{C}} S_{(18,17,5)}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z})) = 3$ である. この場合も, $i = 1,2,3$ について, $B_i{}^tB_i = 0$ となるような $B_i \in M_{3,8}(\mathbb{C})$ が存在し, $\vartheta(\tau, E_8, (18,17,5), B_i)$ $(i = 1,2,3)$ で $S_{(18,17,5)}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ は生成される.

命題 5.7. $S_{(18,17,5)}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ に属するカスプ形式 $G^{(1)}_{(18,17,5)}$, $G^{(2)}_{(18,17,5)}$ で以下を満すものが存在する. ここで, $\omega = 1152(53+\sqrt{7361}) \in \mathbb{C}$ である.

$$Q_2(t, G^{(1)}_{(18,17,5)}, Sp) = \left(1 - 2^{17}t\right)^2\left(1 + 2^8\cdot 5\cdot 59t + 2^{34}t^2\right) \times \left(1 - 2^6\cdot 3^4\cdot 19t - 2^{21}\cdot 1471t^2 - 2^{40}\cdot 3^4\cdot 19t^3 + 2^{68}t^4\right),$$

$$Q_2(t, G^{(2)}_{(18,17,5)}, Sp) = \left(1 - 2^{17}t\right)^2\left(1 + (262144-\omega)t + 2^9(46979584 - 71\omega)t^2 + 2^{25}(30103040 + 263\omega)t^3 + 2^{43}(46979584 - 71\omega)t^4 + 2^{68}(262144-\omega)t^5 + 2^{102}t^6\right).$$

$$Q_2(t, G^{(1)}_{(18,17,5)}, St) = (1-t)\left(1 + 2^{-9}\cdot 5\cdot 59t + t^2\right) \times \left(1 - 2^{-11}\cdot 3^4\cdot 19t - 2^{-13}\cdot 1471t^2 - 2^{-11}\cdot 3^4\cdot 19t^3 + t^4\right),$$

$$
\begin{aligned}
Q_2(t, G^{(2)}_{(18,17,5)}, St) = (1-t) \\
\times \bigl(1 + 2^{-17}(262144-\omega)t + 2^{-25}(46979584-71\omega)t^2 \\
+2^{-26}(30103040+263\omega)t^3 + 2^{-25}(46979584-71\omega)t^4 \\
+2^{-17}(262144-\omega)t^5 + t^6\bigr).
\end{aligned}
$$

σ を $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})$ の非自明な元とし，残りのもう一つの固有形式を $G^{(3)}_{(18,17,5)}$ とすると，

$$
\begin{gathered}
G^{(3)}_{(18,17,5)} = \left(G^{(2)}_{(18,17,5)}\right)^{\sigma}, \\
Q_2(t, G^{(3)}_{(18,17,5)}, Sp) = Q_2(t, G^{(2)}_{(18,17,5)}, Sp)^{\sigma}, \\
Q_2(t, G^{(3)}_{(18,17,5)}, St) = Q_2(t, G^{(2)}_{(18,17,5)}, St)^{\sigma},
\end{gathered}
$$

が成立する．

注意 5.8. $Q_2(2^{-s}, G^{(1)}_{(18,17,5)}, Sp)^{-1}$ は $L(s, f_{16}\otimes f_{20})L(s-2, f_{16}\otimes f_{16})$ の 2 での Euler 因子と等しい．従って，この結果は予想 4.1 の $(a,b,c) = (14,13,1)$ の場合と整合性がある．

5.8. **合同式.** §5.5 と §5.7 で紹介した Hecke 固有形式は，Hecke 固有値の間の合同式をもつので，それを紹介する．

定理 5.9. *$\omega = 1152(53+\sqrt{7361})$ を § 5.7のものとする．$\mathfrak{p} = (\omega - 488, 757)$ を 757 の上にある $\mathbb{Q}(\omega)$ の素イデアルとする．l を任意の素数とし，T を §5.3で定義した，$T(l)$, $T_i(l^2)$ (ここで $i=1,2,3$)のいずれかの Hecke 作用素とする．このとき，Hecke 固有値の間の合同式*

$$
\lambda(T, G^{(1)}_{(16,13,7)}) \equiv \lambda(T, G^{(2)}_{(16,13,7)}) \mod 37,
$$

と

$$
\begin{aligned}
\lambda(T, G^{(1)}_{(18,17,5)}) &\equiv \lambda(T, G^{(2)}_{(18,17,5)}) \mod \mathfrak{p}, \\
\lambda(T, G^{(1)}_{(18,17,5)}) &\equiv \lambda(T, G^{(3)}_{(18,17,5)}) \mod \bar{\mathfrak{p}},
\end{aligned}
$$

が成立する．

注意 5.10.
(i) 定理の証明は，カスプ形式の基底として，整数係数の theta 関数がとれること，整数係数の Hecke 作用素を整数係数の Fourier 展開に作用させても，Fourier 係数は整数係数であることから従う．
(ii) このような Lift と別のものの間の合同式に現れる素数は，保型形式の L 関数の特殊値の代数部分を割ると期待される．37 や 753 が，どのような L 関数の特殊値と関係するのか予想するのは，今後の課題である．

References

1. A. N. Andrianov, *Shimura's hypothesis for Siegel's modular group of genus 3*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **177** (1967), 755–758.
2. A. N. Andrianov and G. N. Maloletkin, *Behavior of theta-series of genus n under modular substitutions. (Russian)*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **39** (1975), no. 2, 243–258, 471.
3. Jonas Bergström, Carel Faber, and Gerard van der Geer, *Siegel modular forms of degree three and the cohomology of local systems*, Selecta Mathematica **20** (2014), no. 1, 83–124.
4. E Freitag, *The transformation formalism of vector valued theta-functions with respect to the Siegel modular group*, J. Indian Math. Soc **52** (1987), 185–207.
5. J. A. Green, *Polynomial Representations of* GL_n, Lecture notes in Mathematics **830** (1980).
6. T. Ibukiyama, *Lifting conjectures from vector valued Siegel modular forms of degree two*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **61** (2012), 87–102.
7. T. Ibukiyama and S. Takemori, *Construction of theta functions of any vector valued weight and applications to lifts and congruences*, preprint, 2017.
8. E. Miller and B. Sturmfels, *Combinatorial commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics **227** (2004).
9. I. Miyawaki, *Numerical examples of Siegel cusp forms of degree 3 and their zeta-functions*, Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University. Series A, Mathematics **46** (1992), no. 2, 307–339.
10. A Panchishkin and K. Vankov, *Explicit Shimura's conjecture for* Sp_3 *on a computer*, Math. Res. Lett. **14** (2007), 173–187.
11. O. Taïbi, *Dimensions of spaces of level one automorphic forms for split classical groups using the trace formula*, arXiv preprint arXiv:1406.4247 (2014).

Department of Mathematics, Graduate School of Mathematics, Osaka University, Machikaneyama 1-1, Toyonaka,Osaka, 560-0043 Japan
E-mail address: ibukiyam@math.sci.osaka-u.ac.jp

Max Planck Institute for Mathematics, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany
E-mail address: stakemorii@gmail.com