数理解析研究所講究録
第2060巻 2018年 49-56

A Borsuk-Ulam type theorem and equivariant simplicial maps

大阪大学大学院理学研究科　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)
Graduate school of Sience, Osaka University

1 序

グラフの彩色数について, グラフの近傍複体や箱複体を考え, Borsuk-Ulam の定理を用いて調べる手法は Lovász([8]) の Kneser graph の彩色数の研究に始まる. その後のグラフ準同型の位相幾何的な手法による研究の発展については, Matoušek([9]), Kozlov([6]), Longueville([7]) などの解説がある. Kneser グラフ $KG_{n,k}$ の円彩色数 $\chi_c(KG_{n,k})$ については, Johnson, Holroyd, Stahl が [5] において $\chi_c(KG_{n,k})=\chi(KG_{n,k})$ を予想し, Chen が [3] でこの式が成り立つことを証明した (その後 [2] で少しやさしい証明がされた). この定理の証明は, Borsuk-Ulam の定理を直接用いた手法では n が偶数の場合しかできず, n が奇数の場合に同様にはできない ([4]).

本稿では $\chi_c(KG_{n,k})=\chi(KG_{n,k})$ の位相幾何学的な証明を与えることが目的となるが, まず, 次の Borsuk-Ulam 型の定理を証明する.

定理 1.1. Y を弧状連結な n 次元 regular cell complex($n\geqq 2$) で, Y の $\boldsymbol{Z}_2$ 係数 p 次ホモロジー群 $H_p(Y;\boldsymbol{Z}_2)$ は $1\leqq p\leqq n-1$ で 0 となるものとする ($\boldsymbol{Z}_2$ は 0 と 1 からなる体を表す). また 位数 2 の巡回群 C_2 が Y 上に cell の構造を保つように作用しているものとする (g を C_2 の生成元とするとき, $y\mapsto g\cdot y$ が cellular map である). $e_1,\ldots,e_k$ を Y の n-cell で $\bigcup_{i=1}^k ge_i=\bigcup_{i=1}^k e_i$ を満たすものとし, Y の部分複体 X を $X=Y\setminus(\bigcup_{i=1}^n e_i)$ により定める. このとき, Y の C_2 作用を X に制限することにより得る X 上の C_2 が自由ならば, 任意の C_2 写像 $f\colon X\to S^{n-1}$ に対して, $Y\setminus X$ の n-cell e_i で次をみたすものが存在する: f を e_i の境界 ∂e_i に制限した写像 $f|\partial e_i$ から誘導される $(n-1)$ 次ホモロジーの準同型 $(f|\partial e_i)_*\colon H_{n-1}(\partial e_i;\boldsymbol{Z}_2)\to H_{n-1}(S^{n-1};\boldsymbol{Z}_2)$ は同型写像である.

Kneser グラフの円彩色数に関する等式 $\chi_c(KG_{n,k})=\chi(KG_{n,k})$ は次の補題から証明することができる.

補題 1.2([3]). n と k を $n\geqq 2k>0$ をみたす整数とする. $c\colon \binom{[n]}{k}\to[n-2k+2]$ を $KG_{n,k}$ の彩色とするとき, $S\cap T=\emptyset$ を満たすような $[n](=\{1,2,\ldots,n\})$ の二つの $(k-1)$-部分集合 S,T で次をみたすものが存在する: $[n]\setminus(S\cup T)$ の $n-2k+2$ 個の元に適当に番号をつけ $i_1,\ldots,i_{n-2k+2}$ とすると, $c(S\cup\{i_j\})=c(T\cup\{i_j\})=j$ $(j=1,2,\ldots,n-2k+2)$ をみたす.

彩色数や円彩色数についての定義や基本的な性質についての説明は第 3 節で説明することにする. 第 4 節において, この補題 1.2 から $\chi_c(KG_{n,k})=\chi(KG_{n,k})$ が導かれることを近傍複体を用いて証明し, 補題 1.2 の定理 1.1 を用いた証明をする.

2 定理 1.1 の証明と応用

以下では, 位数 2 の巡回群を C_2 と書くことにする. 定理 1.1 の証明のために, 次の補題を証明する.

補題 2.1. n を自然数とし, X を弧状連結な C_2 空間で, その作用は自由であり, $1 \leqq p \leqq n-1$ で $H_p(X; \boldsymbol{Z}_2) = 0$ をみたすものとする. このとき, C_2 写像 $f\colon X \to S^n$ が存在すれば, f から誘導される n 次ホモロジー群の準同型 $f_*\colon H_n(X; \boldsymbol{Z}_2) \to H_n(S^n; \boldsymbol{Z}_2)$ は非自明な準同型である.

証明. 以下, ホモロジー群の係数はすべて $\boldsymbol{Z}_2$ とする. Gysin-Smith 完全系列を考えることにより次のホモロジーの可換図式を得る.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\to & H_{n+1}(X/C_2) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_n(X/C_2) & \xrightarrow{\pi_!^X} & H_n(X) & \xrightarrow{\pi_*^X} & H_n(X/C_2) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_{n-1}(X/C_2) & \to & \cdots \\
 & \bar{f}_* \downarrow & & \bar{f}_* \downarrow & & f_* \downarrow & & \bar{f}_* \downarrow & & \bar{f}_* \downarrow & & \\
\to & H_{n+1}(\boldsymbol{RP}^n) & \xrightarrow{\partial_*^S} & H_n(\boldsymbol{RP}^n) & \xrightarrow{\pi_!^S} & H_n(S^n) & \xrightarrow{\pi_*^S} & H_n(\boldsymbol{RP}^n) & \xrightarrow{\partial_*^S} & H_{n-1}(\boldsymbol{RP}^n) & \to & \cdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
\xrightarrow{\partial_*^X} & H_1(X/C_2) & \xrightarrow{\pi_!^X} & H_1(X) & \xrightarrow{\pi_*^X} & H_1(X/C_2) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_0(X/C_2) & \xrightarrow{\pi_!^X} & H_0(X) & \xrightarrow{\pi_*^X} & H_0(X/C_2) & \to \\
 & \bar{f}_* \downarrow & & f_* \downarrow & & \bar{f}_* \downarrow & & \bar{f}_* \downarrow & & f_* \downarrow & & \bar{f}_* \downarrow & \\
\xrightarrow{\partial_*^S} & H_1(\boldsymbol{RP}^n) & \xrightarrow{\pi_!^S} & H_1(S^n) & \xrightarrow{\pi_*^S} & H_1(\boldsymbol{RP}^n) & \xrightarrow{\partial_*^S} & H_0(\boldsymbol{RP}^n) & \xrightarrow{\pi_!^S} & H_0(S^n) & \xrightarrow{\pi_*^S} & H_0(\boldsymbol{RP}^n) & \to
\end{array}
$$

X は弧状連結なので, $\pi_*^X\colon H_0(X) \to H_0(X/C_2)$ が同型で $\pi_!^X\colon H_0(X/C_2) \to H_0(X)$ が自明な準同型である. したがって, $\partial_*^X\colon H_1(X/C_2) \to H_0(X/C_2)$ が全射で, $(\bar{f}_*)_0\colon H_0(X/C_2) \to H_0(\boldsymbol{RP}^n)$ が同型写像であることと, $\bar{f}_* \circ \partial_*^X = \partial_*^S \circ \bar{f}_*$ より, $\bar{f}_*\colon H_1(X/C_2) \to H_1(\boldsymbol{RP}^n)$ が非自明な準同型であることがわかる. これを繰り返し, $\bar{f}_*\colon H_n(X/C_2) \to H_n(\boldsymbol{RP}^n)$ が非自明な準同型であることがわかる. このことと, $\pi_!^S\colon H_n(\boldsymbol{RP}^n) \to H_n(S^n)$ が同型写像であることおよび $f_* \circ \pi_!^X = \pi_!^S \circ \bar{f}_*$ であることより, $f_*\colon H_n(X) \to H_n(S^n)$ は非自明であることがわかる. ∎

定理 1.1 の証明. 以下もホモロジー群の係数はすべて $\boldsymbol{Z}_2$ とする. n 次元 regular cell complex Y と Y の n-cell $e_1, \ldots, e_k$, および X を定理 1.1 の仮定をみたすものとする. Y は弧状連結で $H_p(Y)$ は $1 \leqq p \leqq n-1$ で 0 であり, X と Y は $(n-1)$-skelton は同じであることから, X は弧状連結であり, $1 \leqq p \leqq n-2$ で $H_p(X) = 0$ となることがわかる. このことと X に C_2 が自由に作用することから, 補題 2.1 より, C_2 写像 $f\colon X \to S^{n-1}$ から誘導される $(n-1)$ 次ホモロジー群の準同型 $f_*\colon H_{n-1}(X) \to H_{n-1}(S^{n-1})$ は非自明である. $H_{n-1}(Y) = 0$ なので, 空間対 (Y, X) のホモロジー完全系列を考えれば, $\partial_*\colon H_n(Y, X) \to H_{n-1}(X)$ は全射である. : $H_n(Y, X) \cong \oplus_{i=1}^k H_n(e_i, \partial e_i) \cong \oplus_{i=1}^k H_{n-1}(\partial e_i)$ であり, これより $\oplus_{i=1}^k H_{n-1}(\partial e_i)$ から $H_{n-1}(X)$ への包含写像から誘導される準同型の和として定まる準同型は全射である. したがって, $f_*\colon H_{n-1}(X) \to H_{n-1}(S^{n-1})$ が非自明であることから, n-cell e_i のうちのいずれかで, その f を e_i の境界 $\partial e_i (\approx S^{n-1})$ に制限してできる写像から誘導される準同型 $(f|\partial e_i)_*\colon H_{n-1}(\partial e_i) \to H_{n-1}(S^{n-1})$ は非自明である. $H_{n-1}(S^{n-1}; \boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ であることを考えると, これは同型写像である. ∎

定理 1.1 の簡単な応用例を挙げておこう. $I = [-1, 1]$ とし, $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする. S と T を $[n]$ の部分集合で $S \cap T = \emptyset$ をみたすものとする. このような $[n]$ の部分集合 S, T に

対して I^n の部分集合 $e_{S,T}$ を

$$e_{S,T} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in I^n \mid x_i = 1 \text{ for } i \in S,\ x_j = -1 \text{ for } j \in T, -1 < x_k < 1 \text{ for } k \notin S \cup T\}$$

により定義する. I^n の cell 分割を cell の集合 $\{e_{S,T} \mid S \subset [n], T \subset [n], S \cap T = \emptyset\}$ を考えることにより与える. $S_k(I^n)$ を I^n の k-skelton とし, $S_k(I^n)$ 上の C_2 作用を, $g \cdot x = -x$ により与える (g は C_2 の生成元). $k < n$ ならばこの作用は自由な作用である. I^n が可縮だから, その k-skelton $S_k(I^n)$ は $1 \leqq p \leqq k-1$ において $H_p(S_k(I^n)) \neq 0$ をみたす. したがって, 定理 1.1 より次が証明できる.

系 2.2. $k < n$ のとき, $f\colon S_k(I^n) \to S^k$ を C_2 写像とする. このとき, $(k+1)$-cell $e_{S,T}$ で f を $\partial e_{S,T}$ に制限した写像から誘導されるホモロジーの準同型 $(f|\partial e_{S,T})_*\colon H_k(\partial e_{S,T}; \boldsymbol{Z}_2) \to H_k(S^k; \boldsymbol{Z}_2)$ が同型写像になるようなものが存在する.

3 グラフの彩色数

3.1 グラフの彩色数と円彩色数

本節ではグラフの彩色数や円彩色数および Kneser グラフの定義など本稿で用いるグラフに関する基本的事項を述べる.

以下では, 頂点集合 V と辺集合 E からなる $G = (V, E)$ をグラフと呼ぶ. ここで, V は空でない有限集合であり, E は V の異なる 2 点からなる集合を要素として持つようなものである. これは通常, 多重辺とループがない単純グラフと呼ばれるものである. グラフ G の頂点集合を $V(G)$ と書き, 辺集合を $E(G)$ と書くこともある. また, n を自然数とするとき, $[n]$ により n 以下の自然数全体の集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を表すことにする. グラフ $G = (V, E)$ に対して, $c\colon V \to [n]$ が $\{u, v\} \in E$ ならば $c(u) \neq c(v)$ を満たすとき, c を**彩色** (coloring) という. また, 彩色 $c\colon V \to [n]$ が存在するような最小の n を**彩色数** (chromatic number) といい, $\chi(G)$ により表すことにする.

どの 2 つの頂点も隣接している（辺で結ばれている）グラフを**完全グラフ**とよび, 頂点の個数が n 個の完全グラフを K_n で表すことにする. 容易にわかるように $\chi(K_n) = n$ である.

次に円彩色数について説明しよう. p, q を自然数で, $p \geqq 2q$ を満たすものとする. グラフ $G = (V, E)$ に対して, G の (p, q)**-彩色** ((p, q)-coloring)$c\colon V \to \{0, 1, \ldots, p-1\}$ を彩色であり,

$$\{x, y\} \in E \text{ のとき}, \ q \leqq |c(x) - c(y)| \leqq p - q$$

を満たすものとする (あとの説明のために, $[p]$ でなく $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ を用いる). G の**円彩色数** (circular chromatic number) を

$$\chi_c(G) = \inf\{\frac{p}{q} \mid G \text{ の } (p, q)\text{-彩色が存在する}\}$$

により定義する.

円彩色数には別の定義の仕方もあるが, それらについては [4] に書いてある. 円彩色数の基本的な性質として, まず次の命題がある.

命題 3.1([1]). (1) グラフ G が (p,q)-彩色をもち, 自然数 p', q' が $\frac{p}{q} \leqq \frac{p'}{q'}$ を満たすとき, G には (p',q')-彩色が存在する.

(2) グラフ G の頂点の数が n 個で, $\gcd(p,q)=1$, $p>n$ を満たすような G の (p,q)-彩色が存在するとき, $p'<p$, $\frac{p'}{q'}<\frac{p}{q}$ をみたすような (p',q')-彩色が存在する.

この命題からグラフ G の (p,q)-彩色に対し, p が G の頂点の数より大きければ, $\frac{p'}{q'} \leqq \frac{p}{q}$, $p'<p$ をみたすような (p',q')-彩色が存在するので, 結局, 円彩色数の定義において, (p,q)-彩色は p が G の頂点の数以下の場合のみ考えればよい. つまり, 有限個の (p,q)-彩色を考えればよいので, 実際には

$$\chi_c(G)=\min\{\frac{p}{q} \mid G \text{ の } (p,q)\text{-彩色が存在する. ただし, } p \leqq |V(G)|.\}$$

となることに注意しておこう. また, 通常の彩色数 $\chi(G)$ と円彩色数の間には

$$\chi(G)-1<\chi_c(G) \leqq \chi(G)$$

という関係があることにも注意しておこう ([1]).

3.2 グラフの近傍複体

以下では $G=(V,E)$ は 2 つ以上の頂点がある連結なグラフとし, その彩色数と関係する近傍複体について述べよう.

V の部分集合 A に対して, V の部分集合 $CN(A)$ を

$$CN(A)=\{v \mid \{v,a\} \in E \text{ for } \forall a \in A\} \, (\subset V)$$

により定義する. V の部分集合族 $N(G)$ を

$$N(G)=\{A \subset V \mid CN(A) \neq \emptyset, A \neq \emptyset\}$$

により定義する. CN の定義より, $B \subset A$ ならば $CN(B) \supset CN(A)$ が成り立つので, $A \in N(G)$ かつ $B \subset A \, (B \neq \emptyset)$ ならば, $B \in N(G)$ であり, $N(G)$ は単体複体（抽象複体）となり, 頂点集合は V と同一視できる. $N(G)$ を G の**近傍複体**と呼ぶ. 特に, n 頂点の完全グラフ K_n の近傍複体 $N(K_n)$ は $(n-1)$-単体の自分自身を除く辺単体からなる複体 $K(\dot{\sigma}_{n-1})$ となっていることに注意しておこう.

G, H を単純グラフとするとき, $f\colon V(G) \to V(H)$ が $\{u,v\} \in E(G)$ であれば常に $\{f(u),f(v)\} \in E(H)$ を満たすとき, f を G から H への**グラフ準同型**という. グラフ準同型を $f\colon G \to H$ とも書く. グラフ準同型 $f\colon G \to H$ は, 単体写像

$$N(f)\colon N(G) \to N(H),\ A \mapsto f(A)$$

を導く.

$\chi(G)=n$ であることは, G から K_n へのグラフ準同型が存在し, G から K_{n-1} へのグラフ準同型が存在しないということに他ならない. したがって, $\chi(G)=n$ であるとき, 彩色に対応するグラフ準同型 $G \to K_n$ より $N(G)$ から $N(K_n)$ への単体写像が誘導される.

$N(G)$ には $\boldsymbol{Z}_2$ 作用がないが, これとホモトピー同値な箱複体という複体が定義され, それに Borsuk-Ulam の定理を使うことにより次のことが証明できる.

定理 3.2([8],[6],[7],[9]). $|N(G)|$ が n-連結のとき, $\chi(G) \geqq n+3$.

4 Kneser グラフの円彩色数について

Kneser グラフは Lovász が [8] においてその彩色数を決定したものであるが, まずは, その定義をしておこう.

$\binom{[n]}{k}$ により [n] の部分集合で要素が k 個であるものの全体の集合を表すことにする.

Kneser グラフ $KG_{n,k}$ は頂点集合 $V(KG_{n,k})$ が $\binom{[n]}{k}$ であり, $u, v \in V(KG_{n,k})$ について, $\{u, v\} \in E(KG_{n,k})$ となるのは $u \cap v = \emptyset$ を満たすものとする ($u \cap v$ は $[n]$ の部分集合として考えている). Kneser グラフの彩色数について, $\chi(KG_{n,k}) \leqq n - 2k + 2$ はすぐわかる ($(n - 2k + 2)$-彩色が具体的に構成できる). Lovász は [8] で $|N(KG_{n,k})|$ が $(n - 2k - 1)$-連結であることを証明し, 定理 3.2 の不等式を用いて $\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$ が成り立つことを示した.

さて, 以下では本稿の目的である Kneser グラフの円彩色数について考えることにしよう.

補題 1.2 を再びここに書いておく.

補題 1.2([3]). n と k を $n \geqq 2k > 0$ をみたす整数とする. $c\colon \binom{[n]}{k} \to [n - 2k + 2]$ を $KG_{n,k}$ の彩色とするとき, $S \cap T = \emptyset$ を満たすような二つの $[n]$ の $(k-1)$-部分集合 S, T で次をみたすものが存在する: $[n] \setminus (S \cup T)$ の $n - 2k + 2$ 個の元に適当に番号をつけ $i_1, \dots, i_{n-2k+2}$ とすると, $c(S \cup \{i_j\}) = c(T \cup \{i_j\}) = j$ $(j = 1, 2, \dots, n - 2k + 2)$ をみたす.

Kneser グラフの円彩色数は補題 1.2 から, $\chi_c(KG_{n,k}) = \chi(KG_{n,k})$ が証明できる. これについてまず説明しよう.

p, q を自然数で $p > 2q$ をみたすものとするとき, $G_{p,q}$(p, q は自然数) を頂点集合が $\{0, 1, \dots, p-1\}$ であり, $p \leqq |i - j| \leqq p - q$ をみたすとき $\{i, j\} \in E(G)$ となるグラフとする. このとき, (p, q)-彩色 $c\colon V(G) \to \{0, 1, \dots, p-1\}$ が存在するということは, グラフ準同型 $f\colon G \to G_{p,q}$ が存在することと同値である. したがって, $\chi_c(KG_{n,k}) = \chi(KG_{n,k}) (= n - 2k + 2)$ を証明するためには, $p/q < n - 2k + 2$ をみたす自然数 p, q に対して, $KG_{n,k}$ から $G_{p,q}$ へのグラフ準同型がないことを示せばよい. これを背理法により示す.

$p/q < n - 2k + 2$ をみたす自然数 p, q に対して, $KG_{n,k}$ から $G_{p,q}$ へのグラフ準同型が存在すると仮定し, それを f とする. また, グラフ準同型 $g\colon G_{p,q} \to K_{n-2k+2}$ を $g(m) = \lfloor \frac{m}{q} \rfloor + 1$ により定義する (ここで, $V(K_{n-2k+2}) = [n - 2k + 2]$ としている). $0 \leqq m \leqq p - 1$ のとき, $p < (n - 2k + 2)q$ より $1 \leqq g(m) \leqq n - 2k + 2$ をみたしていて, $q \leqq |m_1 - m_2| \leqq p - q$ をみたすとき $g(m_1) \neq g(m_2)$ となり, 確かに g はグラフ準同型になっている. グラフ準同型 $g \circ f\colon KG_{n,k} \to K_{n-2k+2}$ は $(n - 2k + 2)$-彩色と考えることができて, 補題 1.2 を満たすような S, T および $i_1, \dots, i_{n-2k+2}$ が存在するとき, そのようなものを一組取る. このとき, $KG_{n,k}$ の頂点について, $a_j = S \cup \{i_j\}$, $b_j = T \cup \{i_j\}$$(j = 1, 2, \dots, n - 2k + 2)$ と記号をつける.

$KG_{n,k}$ を $\{a_1, \dots, a_{n-2k+2}, b_1, \dots, b_{n-2k+2}\}$ に制限してできる部分グラフを G^* とすると, a_j と結ばれる頂点が $b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_{n-2k+2}$($b_j$ を除いた b_l 全部), b_j と結ばれる頂点が $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_{n-2k+2}$($a_j$ を除いた a_l 全部) となっていて, その近傍複

体 $N(G^*)$ は $(n-2k+1)$ 単体の自分自身を除く辺単体全体からなる複体2個からなる $K(\dot\sigma_{n-2k+1})\coprod K(\dot\sigma_{n-2k+1})$ である．グラフ準同型 $g\circ f\colon KG_{n,k}\to K_{n-2k+2}$ を G^* に制限してできるグラフ準同型からできる近傍複体の単体写像は, $g\circ f(a_j)=g\circ f(b_j)=j$ が $j=1,\ldots,n-2k+2$ で成り立つことより, ふたつの $K(\dot\sigma_{n-2k+1})$ がそれぞれ $N(K_{n-2k+1})=K(\dot\sigma_{n-2k+1})$ にそのままうつることになる (つまり片方の $K(\dot\sigma_{n-2k+1})$ に制限すると恒等写像).

$N(G^*)$ において $a_1,\ldots,a_{n-2k+2}$ のうち一つを除くと $(n-2k)$-単体になっていて, $g\circ f$ から定まる単体写像でも $(n-2k)$-単体のままである. したがって, $f(a_1),\ldots,f(a_{n-2k+2})$ から一つを除くと $N(G_{p,q})$ の $(n-2k)$-単体の頂点であるはずである. したがって, $a_1,\ldots,a_{n-2k+2}$ の取り方と g の定め方より $f(a_1)<f(a_2)<\cdots<f(a_{n-2k+2})$ が成り立っていることに注意すると, $f(a_{n-2k+1})-f(a_1)\leqq p-2q$, $f(a_{n-2k+2})-f(a_2)\leqq p-2q$, $f(a_3)-f(a_1)\geqq 2q$, $f(a_4)-f(a_2)\geqq 2q,\ldots,f(a_{n-2k+2})-f(a_{n-2k})\geqq 2q$ が成り立つ.

n が偶数のとき, $f(a_4)-f(a_2)\geqq 2q, f(a_6)-f(a_4)\geqq 2q,\ldots,f(a_{n-2k+2})-f(a_{n-2k})\geqq 2q$ をすべて両辺加えると, $f(a_{n-2k+2})-f(a_2)\geqq(n-2k)q$ となるが,$(n-2k+2)q>p$ より $f(a_n)-f(a_2)>p-2q$ となり, 上の式の $f(a_n)-f(a_2)\leqq p-2q$ が成り立つことに矛盾する.

n が奇数のときには $f(a_3)-f(a_1)\geqq 2q, f(a_4)-f(a_2)\geqq 2q,\ldots,f(a_{n-2k+2})-f(a_{n-2k})\geqq 2q$ をすべて両辺加えると, $f(a_{n-2k+2})+f(a_{n-2k+1})-f(a_2)-f(a_1)\geqq 2(n-2k)q$ となるが, $(n-2k+2)q>p$ より $f(a_{n-2k+2})+f(a_{n-2k+1})-f(a_2)-f(a_1)>2(p-2q)$ となり, 上の式の $f(a_{n-2k+1})-f(a_1)\leqq p-2q$, $f(a_{n-2k+2})-f(a_2)\leqq p-2q$ が成り立つことに矛盾する.

したがって, $p/q<n-2k+2$ をみたす自然数 p,q に対して, $KG_{n,k}$ から $G_{p,q}$ へのグラフ準同型は存在しない. ∎

補題 1.2 の証明. まず, 定理 1.1 を利用するための regular cell complex を考えよう. $I=[-1,1]$ とし, $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ とする. 2節で考えたような, I^n の $(n-2k+2)$-skelton $S_{n-2k+2}(I^n)$ を考え, その $(n-2k+2)$-cell $e_{S,T}$ (S と T は $[n]$ の部分集合で $S\cap T=\emptyset$ をみたし, $|S|+|T|=2k-2$ を満たすもの) に含まれる新たな $(n-2k+2)$-cell $e'_{S,T}$ を

$$e'_{S,T}=\{(x_1,\ldots,x_n)\in I^n\,|\,x_i=1\text{ for }i\in S,\ x_j=-1\text{ for }j\in T,\ \sum_{k\notin S\cup T}|x_k|<1\}.$$

により定義する. Y を位相空間としては $S_{n-2k+2}(I^n)$ とし,

$$X=Y\setminus\bigcup_{\substack{|S|+|T|=2k-2\\ S\cap T=\emptyset}}e'_{S,T}$$

とする.

X を次のように単体分割する: まず, X の 0-単体 (頂点) 全体の集合は $\{-1,0,1\}^n\cap X$ とする. X の頂点 $v=(v_1,\ldots,v_n)$ に対し, $v_+=\{i\,|\,v_i=1\}$, $v_-=\{i\,|\,v_i=-1\}$ とし, v を (v_+,v_-) で表すことにする. $|v_+|$, $|v_-|$ はそれぞれ v_+, v_- の元の個数を表し. $|v|=|v_+|+|v_-|$ と定義する. つまり, $|v|$ は v の 0 でない座標の個数である. I^n の $(n-2k+2)$-skelton $S_{n-2k+2}(I^n)$ を考えた時点で, 0 となる成分の個数が $(n-2k+2)$ 個以下であり, さらに, $e'_{S,T}$ を除いているので 0 となる成分の個数が $(n-2k+1)$ 個以下である. つまり, X の頂点 v は $|v|\geqq 2k-1$ をみたすことに注意しておこう. また, X の頂点 u と v に対して,

$u_+ \subset v_+$ かつ $u_- \subset v_-$ をみたすとき, $u \subset v$ と書くことにし, $u \cap v = (u_+ \cap v_+, u_- \cap v_-)$, $u \cup v = (u_+ \cup v_+, u_- \cup v_-)$ と定義する. ただし, $(u_+ \cup v_+) \cap (u_- \cup v_-) \neq \emptyset$ のときには, $u \cup v$ は定義しないものとする.

$\{v_1, \ldots, v_m\}$ が単体になるのは

(i) $|v_i| = 2k-1$ となる i が 2 個以上ないときには, (適当に並べ替えて)$v_1 \subset v_2 \subset \cdots \subset v_m$ が成り立つときとする.

(ii) $|v_i| = 2k-1$ となる i が 2 個以上あるときには, $\{v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_m\}$ が $1 \leqq i \leqq s$ で $|v_i| = 2k+1$, $s+1 \leqq i \leqq l$ で $|v_i| > 2k-1$ を満たすとすると,

- $1 \leqq i \neq j \leqq s$ をみたす i, j に対して $|v_i \cap v_j| = 2k-2$ かつ $v_{i+} \cap v_{j-} = \emptyset$,
- $v_1 \cup \cdots \cup v_s \subset v_{s+1} \subset \ldots v_m$

をみたすときとする. このようにして X は単体分割できて, Y は $(n-2k+2)$-cell $e'_{S,T}$ のみが単体ではない regular cell complex と見ることができる. また, X は $S_{n-2k+1}(I^n)$ とホモトピー同値となることがわかる.

さて, 補題 1.2 の証明のために $c\colon V(KG_{n,k}) \to [n-2k+2]$ を彩色とする.

c の拡張 $c'\colon \{v \subset [n] \mid |v| \geqq k\} \to [n-2k+2]$ を $c'(v) = \max\{c(A) \mid A \subset v\}$ により定義する.

$[n]$ の部分集合で元の個数が k 以上であるもの全体を考え, それに, $|S| < |T|$ ならば $S \prec T$ となるような全順序 $\preceq$ をつける.

X の頂点 (0-単体) 全体から $\{1, -1, 2, -2, \ldots, n-2k+2, -(n-2k+2)\}$ への写像 λ を

$$\lambda(v) = \begin{cases} c'(v_+) & (v_- \prec v_+ \text{ のとき}) \\ -c'(v_-) & (v_+ \prec v_- \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定義する. λ より X から $\Gamma^{n-2k+1} = \{(x_1, \ldots, x_{n-2k+2}) \in I^{n-2k+2} \mid |x_1| + \cdots + |x_{n-2k+2}| = 1\}$ への単体写像が定まる. ただし, Γ の頂点の集合は, $\{-1, 0, 1\}^n \cap \Gamma^{n-2k+1}$ とし (つまり頂点は一つの座標が 1 または -1 でのこりはすべて 0), $(0, \ldots, \underset{i\text{ 番目}}{1}, \ldots, 0)$ を i, $(0, \ldots, \underset{i\text{ 番目}}{-1}, \ldots, 0)$ を $-i$ と同一視している. (Γ の頂点 $v_1, \ldots, v_m$ の中に $v_j = -v_i$ となるものがないとき, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ を $(m-1)$-単体とするするような Γ の単体分割を考えている.) また, X および Γ^{n-2k+1} 上の C_2 作用を対心作用とするとき, λ より決まる単体写像が同変写像であることもわかる. したがって, 定理 1.1 より $|S| + |T| = 2k-2, S \cap T = \emptyset$ をみたす $[n]$ の部分集合 S, T で $(\lambda|\partial e'_{S,T})_*\colon H_{n-2k+1}(\partial e'_{S,T}; \boldsymbol{Z}_2) \to H_{n-2k+1}(\Gamma^{n-2k+1}; \boldsymbol{Z}_2)$ が同型写像となるものが存在する. $\partial e'_{S,T}$ と Γ^{n-2k+1} の $(n-2k+1)$ 単体の数が同じなので, このようになるのは $(n-2k+1)$ 単体が 1 対 1 にうつっているときである. $|S| \geqq k$ のときには, λ の定義より, すべての $\partial e_{S,T}$ の頂点 v に対して $\lambda(v) > 0$ となるのでこの条件をみたさない. $|T| \geqq k$ のときも同様である. したがって, $|S| = |T| = k-1$ である. $[n] - (S \cup T) = \{i_1, \ldots, i_{n-2k+2}\}$ とすると, $\partial e_{S,T}$ の $(n-2k+1)$ 単体ですべての頂点が λ でうつしたとき正の数を取るのは $\{S \cup \{i_1\}, \ldots, S \cup \{i_{n-2k+2}\}\}$ だけだから, (適当に順番を入れ替えると)$\lambda(S \cup \{i_1\}) = 1, \ldots, \lambda(S \cup \{i_{n-2k+2}\}) = n-2k+2$ が成り立つ. これより, $c(S \cup \{i_1\}) = 1, \ldots, c(S \cup \{i_{n-2k+2}\}) = n-2k+2$ であり, $i_l \neq i_m$ のとき $(T \cup \{i_l\}) \cap (S \cup \{i_m\}) = \emptyset$ なので, 彩色 c の定義から, $c(T \cup \{i_1\}) = 1, \ldots, c(T \cup \{i_{n-2k+2}\}) = n-2k+2$ もわかる. ∎

References

[1] J. A. Bondy and P. Hell, A note on the star chromatic number. J. Graph Theory **14** (1990), 479–482.

[2] G. J. Chang, D. F. Liu and X. Zhu, A short proof for Chen's alternative Kneser coloring lemma. (English summary) J. Combin. Theory Ser. A 120 (2013), no. 1, 159–163.

[3] P-A. Chen, A new coloring theorem of Kneser graphs., J. Combin. Theory Ser. A 118 (2011), 1062–1071.

[4] 原靖浩, グラフの彩色数の変種とグラフから定まる複体の位相, 京大数理解析研究所講究録 2016 年,

[5] A. Johnson, F.C. Holroyd and S. Stahl, Multichromatic numbers, star chromatic numbers and Kneser graphs, J. Graph Theory 26 (3) (1997) 137–145.

[6] D. N. Kozlov, Combinatorial Algebraic Topology, Algorithms and Computation in Mathematics, 21. Springer(2008).

[7] Mark de Longueville, A course in topological combinatorics, Universitext, Springer(2013).

[8] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy, J. Combin. Theory Ser. A 25 (1978) 319–324.

[9] J. Matoušek, Using the Borsuk-Ulam theorem, Springer, Berlin(2003).

[10] 長崎生光, 川上智博, 原靖浩, 牛瀧文宏, The Smith homology and a generalized Borsuk-Ulam theorem, 京大数理解析研究所講究録 1670 換群論の新たな展開　2009 年, 34–39.