数理解析研究所講究録
第2060巻 2018年 154-163

超平面配置のSolomon-寺尾代数と応用

阿部 拓郎, 沼田 泰英, 前野 俊昭 (ver.01)

平成29年8月31日

概 要

本稿では, 準備中の論文 [3] の報告として, 超平面配置に付随する新しい代数たるSolomon-寺尾代数を紹介し, その性質と応用を調べる. 特に正則冪零ヘッセンベルグ多様体のコホモロジー環との関係について述べる.

1 序章

超平面配置の代数学といえば, 斎藤恭司により定義され寺尾宏明らによって研究され続けている対数的ベクトル場がその筆頭である. 本稿では, 対数的ベクトル場から構成される**Solomon-寺尾代数**を, 新しい超平面配置の代数的対象として定義する. Solomon-寺尾代数はもともと [8] において定義された η 複体から自然に定義される有限次元代数であるが, これまで誰も深くは研究してこなかった. 本稿ではこのSolomon-寺尾代数の性質を調べる. 実際, Solomon-寺尾代数は, 代数としての扱いは現状大変むずかしいものではあるものの, ワイル配置と関係する配置に対しては, ある多様体のコホモロジー環と同型になる, という著しい特徴を持つ（定理1.6参照）. いわば, Borelの理論により定式化された余不変式環の, 超平面配置的一般化とも呼べるものであり, 対数的ベクトル場と新たな幾何学との交わりを想起させる代数的対象となっている. 本稿ではSolomon-寺尾代数の定義と簡単な性質及び, その出自について簡単に述べる. 結果の証明やより詳しいSolomon-寺尾代数の性質については, [3] をご参照頂きたい. 本稿ではSolomon-寺尾代数についてのみ述べるが, [3] ではより一般的なSolomon-寺尾複体について論じている.

主題を述べるため, いくつか準備を行う. $\mathbb{K}$ を任意の体, $V=\mathbb{K}^\ell$ とし $S:=\mathrm{Sym}(V^*)$ を V の座標環とする. V の座標系として $x_1,\ldots,x_\ell$ を固定

する．この時 $S=\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_\ell]$ となる．$\mathbb{K}$ 線形な S 導分のなす階数が ℓ の自由 S 加群 $\mathrm{Der}\,S$ は, 座標を用いると

$$\mathrm{Der}\,S := \bigoplus_{i=1}^{\ell} S\partial_{x_i}.$$

と表せる．$\mathcal{A}$ を V 中の超平面配置, すなわち線形な超平面の有限族とする．$H\in\mathcal{A}$ それぞれに対し, $\alpha_H\in V^*$ をその定義式, すなわち $\ker\alpha_H=H$ を満たす線形形式として一つ固定する．この準備の下, 対数的ベクトル場 $D(\mathcal{A})$ を以下のように定義する：

定義 1.1

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta\in\mathrm{Der}\,S \mid \theta(\alpha_H)\in S\alpha_H\ (\forall H\in\mathcal{A})\}$$

と定める．

齋藤恭司により定義された古典的かつ極めて重要な代数である $D(\mathcal{A})$ を用いることで, 以下の定義と定理を得ることができる．詳細については第二章あるいは [3] を参照されたい．

定理 1.2 ([8])
d を非負整数, S_d を d 次斉次式全体のなすベクトル空間とする．$\eta\in S_d$ を一つ固定する．写像 $\partial: D(\mathcal{A})\to S$ を,

$$\partial(\theta) := \theta(\eta)$$

で定める．こうして得られる代数 $\mathrm{coker}(\partial)=S/\mathrm{Im}\partial$ を, $\eta\in S_d$ に関する d 次の **Solomon-寺尾代数**と呼び, $ST(\mathcal{A},\eta)$ と表す．この時, 空でない Zariski 開集合 $U_d\subset S_d$ が存在して, $\eta\in U_d$ に関する Solomon-寺尾代数 $ST(\mathcal{A},\eta)$ は $\mathbb{K}$ 上有限次元代数, 特にアルチン環.

$\mathfrak{a}(\mathcal{A},\eta) := \{\theta(\eta)\in S \mid \theta\in D(\mathcal{A})\} = \mathrm{Im}\,\partial$ と定義されるものを, **Solomon-寺尾イデアル**と呼ぶ．つまり $S/\mathfrak{a}(\mathcal{A},\eta)=ST(\mathcal{A},\eta)$ たるイデアルであり, この構造が $D(\mathcal{A})$ という超平面配置における古典的かつ極めて重要な代数的対象である対数的ベクトル場から決定されるということになる．特にこのことから, Solomon-寺尾代数は情報としては対数的ベクトル場より弱いものしかもっていないということに注意されたい．

さてそのような弱い情報を持つ代数をなぜ定義するのかという点であるが, それに対するもっともよい答えは, やはり超平面配置の起源といえ

るワイル配置の場合の Solomon-寺尾代数の考察であろう. その説明のために, 少し用語を導入する. 以下しばらく, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ とする.

階数 ℓ のワイル群 W が $V=\mathbb{R}^\ell$ に作用している状況を考える. この作用は自然に S へのそれへと拡張されるため, 不変部分 S^W を考えることができる. Chevalley の結果から, ある斉次不変式 $P_1,\ldots,P_\ell\in S^W$ が存在して,

$$S^W=\mathbb{R}[P_1,\ldots,P_\ell]$$

となることが知られている. また次数については,

$$2=\deg P_1<\deg P_2\leq\cdots\leq\deg P_{\ell-1}<\deg P_\ell,$$

かつ $(\deg P_1-1,\ldots,\deg P_\ell-1)$ はワイル群の指数と一致することが知られている. この時以下が成立する.

定理 1.3 ([2], 定理 3.9)
W に対応するルート系 Φ の正ルート α に直交する鏡映面 H_α 全体を集めたワイル配置 $\mathcal{A}$ に対して,

$$ST(\mathcal{A},P_1)\simeq H^*(G/B,\mathbb{R})$$

となる.

定理 1.3 中において, G は W に対応する複素線型半単純代数群, B はその Borel 部分群である. この定理は本質的に, Borel と齋藤恭司の結果を合わせることで直ちに得られるものである. 証明は上述の通り [2] の定理 3.9 にて与えられたが, 本稿では後に超平面配置寄りな言葉での証明を与えることとする.

よって, Solomon-寺尾代数は上記の場合においては余不変式環という極めて由緒正しい良い代数となることが分かった. ここでポイントとなるのは, P_1 の存在さえ認めれば, 不変式環論を経由せずとも余不変式環, よって結果的には旗多様体のコホモロジー環の情報を, ワイル配置という超平面配置の対数的ベクトル場の情報から復元することができるという点である. よって一般に, ワイル群作用がないような, すなわち不変式論が使えないような状況においても, 余不変式環のようなものを対数的ベクトル場と超平面配置から, Solomon-寺尾代数として構成する, という理論の可能性が生まれたといえる. この理論の一端を裏付けるものとして示された [2] での主定理を述べるために, 少し準備を行う.

定義 1.4
Φ を, ワイル群 W に関するルート系とし, 正ルートの集合 Φ^+ を固定する. $I \subset \Phi^+$ を**イデアル**とする, すなわち, $\beta \in I$, $\gamma \in \Phi^+$ で, かつ単純ルート $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ に対して $\beta - \gamma \in \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ が成り立つなら, $\gamma \in I$ となっているような集合である. この時 $\mathcal{A}_I := \{H_\alpha \mid \alpha \in I\}$ を**イデアル配置**と呼ぶ.

この定義の下, 定理 1.3 は, Solomon-寺尾代数及び正則冪零ヘッセンベルグ多様体の言葉で一般化することができる. まず正則冪零ヘッセンベルグ多様体を定義する.

定義 1.5 ([4])
G を Φ に対応する複素線形半単純代数群, B をその Borel 部分群として一つ固定する. $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}$ をそれぞれの対応するリー環とする. この時正則冪零元 $N \in \mathfrak{g}$ とイデアル $I \subset \Phi^+$ に対して,

$$X(N, I) := \left\{gB \in G/B \mid \mathrm{Ad}(g^{-1})(N) \in \mathfrak{b} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in I} \mathfrak{g}_{-\alpha})\right\}$$

を正則冪零ヘッセンベルグ多様体と呼ぶ. ここで $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ は $-\alpha$ に対応するルート空間.

これを用いて以下の一般化定理を得る.

定理 1.6 ([2], 定理 1.1)
$X(N, I)$ を, イデアル I と正則冪零元 $N \in \mathfrak{g}$ から定まる正則冪零ヘッセンベルグ多様体とする. 詳細については例えば [5] の第五章などを参照のこと. この時二次の基本不変式 P_1 に対して

$$ST(\mathcal{A}_I, P_1) \simeq H^*(X(N, I), \mathbb{R})$$

が成り立つ. 特にこれらの環は完全交差環であり,

$$\mathrm{Poin}(X(N, I), \sqrt{x}) = \prod_{i=1}^{\ell}(1 + x + \ldots + x^{d_i^I})$$

が成り立つ. ここで d_i^I の定義については定理 1.9 を参照.

[2] では Solomon-寺尾代数という言葉は使われていないので, そこだけ書き直したものが定理 1.6 であるが, 主張や証明はすべて [2] による. 本稿及び [3] では, そこで使われた代数に着目し, それをイデアル配置に限ら

ずすべての超平面配置において定式化し, その基礎づけを行い性質を調べること, およびそのほかの幾何学, 特にコホモロジー環の表示への道筋を作ることを目的とする.

しかしながら, 実際問題として Solomon-寺尾代数のアルチン環としての構造を決定することは一般には極めて難しく, それが完全交差か, あるいはポアンカレ双対代数か, といったことはおろか, そのヒルベルト多項式も一般にはわからない. しかしながら, 最も有名な超平面配置のクラスの一つである自由配置については, それらが見事に判明する. 本稿ではそれを主眼とする. まず自由性を定義する. 以下再び $\mathbb{K}$ を任意の体とする.

定義 1.7
超平面配置 $\mathcal{A}$ が**自由**であり, その指数が $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ であるとは, $D(\mathcal{A})$ が自由 S 加群であり, その斉次基底として $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$, $\deg \theta_i = d_i$ $(i = 1, \ldots, \ell)$ たるものが取れるときにいう. ここで $\theta \in \mathrm{Der}\, S$ が斉次であるとは, $\alpha \in V^*$ に対して $\theta(\alpha)$ が零でなければ全て斉次多項式であるときにいい, このとき $\deg \theta := \deg \theta(\alpha)$ として定める.

以下が主定理である.

定理 1.8 (自由性と完全交差性, [3])
$\mathcal{A}$ を $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ たる自由配置とし, $\eta \in U_d$ ととる. この時 $ST(\mathcal{A}, \eta)$ は完全交差. 更に, $\eta \in U_2$ であるならば,

$$\mathrm{Hilb}(ST(\mathcal{A}, \eta); x) = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + x + \cdots + x^{d_i})$$

が成立.

定理 1.8 から, 自由配置の Solomon-寺尾代数の構造は明確にわかり, かつ非常に良い性質を持っていることもわかる. 完全交差なので当然ポアンカレ双対代数であり, 何かの多様体のコホモロジー環である可能性はいきなりは否定されない上に, ベッチ数も自由配置の指数から決定される. 更にこれにより, 例えば空でない二次元中心的配置 $\mathcal{A}$ の Solomon-寺尾代数は常に完全交差環であり, 特に η が generic な二次式であれば,

$$\mathrm{Hilb}(ST(\mathcal{A}, \eta); x) = (1 + x)(1 + x + \cdots + x^{|\mathcal{A}|-1})$$

であることも超平面配置の簡単な議論からわかる. これは対数的ベクトル場でも似ていて, 二次元までならば対数的ベクトル場の構造は極めて容易にわかることが知られている. 問題はどちらも三次元からである.

ちなみに, イデアル配置は自由であることが以下で示された：

定理 1.9 ([1], 定理 1.1)
$I \subset \Phi^+$ をイデアルとする. この時 $\mathcal{A}_I$ は自由配置で, その指数 $(d_1^I, \ldots, d_\ell^I)$ は I 中の正ルートの高さ分布の双対分割と一致する.

よって定理 1.9 と 1.8 を組み合わせることで, 定理 1.6 のうち, イデアル配置の Solomon-寺尾代数の完全交差性及び, 正則冪零ヘッセンベルグ多様体のポアンカレ多項式の表示に関する別証明を得ることができる. とはいえ, 実際問題として定理 1.8 の証明は [2] における議論とほぼ並行して走っていることを注意しておく.

注意 1.10
[3] では Solomon-寺尾代数と Solomon-寺尾複体を, 自由配置より一般的（かつ実際 generic）なカテゴリーである tame 配置に対して定義し, 性質を調べる. しかし現状 Solomon-寺尾配置をうまく扱える配置は自由配置のみである.

本稿の構成は以下のとおりである. 第二章で, 超平面配置に関するいくつかの結果をおさらいする. 特に [8] の結果や定義を復習した上で, Solomon-寺尾代数が, 自由配置に対してはきちんと定義可能であることを示す. 定理 1.8 などの証明については, [3] を参照されたい.

2　準備と証明

本章では, [8] における様々な結果を中心に超平面配置の基本的な概念を準備する. 以下 $\mathcal{A}$ は $V = \mathbb{K}^\ell$ 中の中心的な超平面配置, すなわち原点を通る超平面たちの有限集合とする. まず超平面配置の基本として, [6] から幾つかの定義を思い出そう：

定義 2.1

$$L(\mathcal{A}) := \{ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \}$$

を $\mathcal{A}$ の交差格子と呼ぶ. $L(\mathcal{A})$ 上のメビウス関数 μ は, $\mu(V) = 1$ 及び関係式 $\mu(X) := -\sum_{V \supset Y \supsetneq X} \mu(Y)$ で定義される. $\mathcal{A}$ の**ポアンカレ多項式**を

$$\pi(\mathcal{A}; t) := \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X)(-t)^{\operatorname{codim} X}$$

で, 特性多項式を

$$\chi(\mathcal{A};t) := \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim X}$$

によって定義する.

定義 2.2
$0 \le p \le \ell$ に対して,

$$D^p(\mathcal{A}) := \{\theta \in \wedge^p \mathrm{Der}\, S \mid \theta(\alpha_H, f_2, \dots, f_p) \in S\alpha_H \ (\forall H \in \mathcal{A}, \forall f_2, \dots, f_p \in S)\}$$

と定義する.

[8] におけるもっとも重要な概念は, 以下の定義である.

定義 2.3 ([8], 第一章)
級数 $\Psi(\mathcal{A};x,t)$ を,

$$\Psi(\mathcal{A};x,t) := t^\ell \sum_{p=0}^{\ell} \mathrm{Hilb}(D^p(\mathcal{A});x)\bigl(\frac{1-x}{t} - 1\bigr)^p$$

で定義する.

これはオリジナルの定義とは異なっているが, 本稿の目的との兼ね合いを考えると, このほうが都合が良い. 上記級数は無論級数に見えるが, 実はこれが多項式であるというのが, [8] における極めて重要な帰結である.

定理 2.4 ([8], 命題 5.3)

$$\Psi(\mathcal{A};x,t) \in \mathbb{Q}[x,t].$$

定理 2.4 の証明はかなり難しく長くなるので原論文を当たられたい. しかしこの証明はかなり面白く, また数学的な意味も深いものだと考えている. この多項式性を出発点として [8] で証明されたのが, 以下の実に驚くべき結果である.

定理 2.5 ([8], 定理 1.2)

$$\Psi(\mathcal{A};1,t) = \pi(\mathcal{A};t).$$

上記結果を示すために, Solomon と寺尾が [8] で導入したものが第一章で述べた η 複体であり, その 0 次のホモロジー群が実は Solomon-寺尾代数である. 第一章で述べた通り, 一般的にこれは有限次元となるが, その証明を簡単に思い出すため, [8] からいくつかの定義と結果を思い出そう.

定義 2.6 ([8], 定義 4.5)
d を非負整数とし, $\mathcal{A}$ を V 中の超平面配置とする. $X \in L(\mathcal{A})$ に対し, S^X を X の座標環とする. $h \in S^X$ が X で**非退化**とは, $\mathrm{Jac}(h) := \{\theta(h) \in S \mid \theta \in \mathrm{Der}\, S^X\}$ に含まれる全ての多項式の零点の交わりが X での原点に含まれるときにいう.

$$U_d^X(\mathcal{A}) := \{f \in S_d \mid f|_X \text{ は } X \text{ で非退化 }\}$$

と定義する.

命題 2.7 ([8], 第四章及び系 3.6)
$\mathcal{A}$ を $V = \mathbb{K}^\ell$ 中の超平面配置とし, $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \nmid d$ と仮定する. すると
(1) $d > 0$ に対し, 空でない Zariski 開集合

$$U_d(\mathcal{A}) := \bigcap_{X \in L(\mathcal{A})} U_d^X(\mathcal{A}) \subset S_d$$

が存在し, Solomon-寺尾代数 $ST(\mathcal{A}, \eta)$ は $\eta \in U_d(\mathcal{A})$ に対し $\mathbb{K}$ 上で有限次元.
(2) $\mathcal{A}$ が指数 $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \dots, d_\ell)$ を持つ自由配置であるなら,

$$\Psi(\mathcal{A}; x, t) = \prod_{i=1}^{\ell}(t(1 + x + \cdots + x^{d_i - 1}) + x^{d_i})$$

が成り立つ.

定理 1.2 の証明. 命題 2.7 (1) より有限次元性は直ちに従う. □

これにより, Solomon-寺尾代数の有限次元性が保証される. また詳細は [3] に譲るが, 命題 2.7 (2) から, 定理 1.8 の主張のうち, ヒルベルト多項式に関する結果も出てくる. ここまでの議論は本質的にすべて [8] で展開されているものであることではあるが, あまりこれまで注意を払われていない議論であり, かつ Solomon-寺尾代数の議論の基礎となる箇所なので, [8] の議論に沿ってこれらを紹介した. ここから更に進んだ Solomon-寺尾代数の一般論については [8] を参照されたい.

さて, 最後に定理 1.3 の証明を与えてこの章を終わる.

定理 1.3 の証明. $I : V \times V \to \mathbb{R}$ を W 不変な内積とする. この時 $I : \Omega_V^1 \to \mathrm{Der}\, S$ たる同一視があることに注意. この時 [7] より, ワイル配置 $\mathcal{A}$ の対数的ベクトル場 $D(\mathcal{A})$ の基底は,

$$IdP_1, \ldots, IdP_\ell$$

で与えられるのであった. さて, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ たる配置の基底は必ずオイラー微分 $\theta_E = \sum_{i=1}^{\ell} x_i \partial_{x_i}$ を含む. $\deg P_1 = 2 < \deg P_i$ $(i \neq 1)$ なので, $IdP_1 = \theta_E$ として良い. すると

$$IdP_i(P_1) = I(dP_i, dP_1) = I(dP_1, dP_i) = \theta_E(P_i) = P_i$$

が, 零でないスカラー倍をのぞいて成立. よって定義から

$$\mathfrak{a}(\Phi^+) = \{\theta(P_1) \mid \theta \in D(\mathcal{A})\} = \langle P_1, \ldots, P_\ell \rangle_S$$

となり, 証明が終わる. $\square$

3　いくつかのコメント

以上で本稿の内容を終える. 詳細は, まだ準備中である論文 [3] を参照されたい. しかしいろいろ書いてはいるが, Solomon-寺尾代数はまだまだ謎が多い代数であり, どれくらい使い道があるかは未知数である. 定理 1.6 があるため無下にするべきではないが, 他の幾何学とつながるかどうかは全く分からないし, 自由配置以外の場合における定義もできるにはできるが, 代数的構造が難しすぎてまだまだ基盤整備の段階である. 更に, $ST(\mathcal{A}, \eta)$ という表記からもわかる通り, 環構造が η という generic な多項式の選び方に依存してしまうことも大きな問題である. つまりある η で成り立つ環の性質が, 違う選び方をすると成り立たないという可能性が全く否定できない. 逆に言えば, 選び方によらない性質をきちんと精査するところにも問題が潜んでいるとも言え, 代数的には面白い研究対象といえる.

更に例えば, 定理 1.8 は以下の定理と比べられるべきでもある :

定理 3.1 (寺尾の分解定理, [9])
$\mathcal{A}$ が自由配置で $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ のとき,

$$\pi(\mathcal{A}; t) = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + d_i t).$$

このように自由性は二つの多項式の分解と関係しており，どちらも指数でそれが記述される．これらが深いところでどうつながっているのかというのもおそらく検討されるべき問題であろう．また，定理3.1の逆は正しくないことが反例により知られているが，定理1.8の逆の真偽はまだわからない．これも面白い問題だと思う．

謝辞．本研究は日本学術振興会科研費・基盤研究(B)（JP16H03924）の助成を受けている．

参考文献

[1] T. Abe, M. Barakat, M. Cuntz, T. Hoge and and H. Terao, The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements. *J. European Math. Soc.* **18** (2016), 1339–1348. `doi:10.4171/JEMS/615`

[2] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai and T. Sato, Hessenberg varieties and hyperplane arrangements. `arXiv:1611.00269`

[3] T. Abe, T. Maeno and Y. Numata, Theory of Solomon-Terao algebras. In preparation.

[4] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, Hessenberg varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.* **332** (1992), no. 2, 529–534.

[5] M. Harada and J. Tymoczko, Poset pinball, GKM-compatible subspaces and Hessenberg varieties. `arXiv:1007.2750v1`

[6] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[7] K. Saito, On the uniformization of complements of discriminant loci, AMS Summer Institute, Williams college, 1975, *RIMS Kokyuroku* **287** (1977), 117–137.

[8] L. Solomon and H. Terao, A formula for the characteristic polynomial of an arrangement. *Adv. in Math.* **64** (1987), no.3, 305–325.

[9] Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula. *Invent. math.* **63** (1981), 159–179.