数理解析研究所講究録
第2061巻 2018年 8-19

ある split metacyclic 群の整係数群環のホッホシルトコホモロジー環について
(On Hochschild cohomology ring of the integral group ring of a split metacyclic group)

速水 孝夫 (北海学園大学工学部)
Takao Hayami (Faculty of Engineering, Hokkai-Gakuen University)

Introduction

可換環上の多元環に対するコホモロジー論は Hochschild [5], MacLane [8], Cartan-Eilenberg [2] らによって体系化された．特に，体上の有限次元多元環のホッホシルトコホモロジー (Hochschild cohomology) については，表現論との関わりで様々な研究が行なわれている．しかしながら，特別な多元環に対してもホッホシルトコホモロジーを決定することは一般にかなり困難である．

R を可換環，Λ を R 上有限生成で射影的な R 上の多元環，M を両側 Λ-加群としたとき，各次元 $n \geq 0$ に対するホッホシルトコホモロジー群

$$H^n(\Lambda, M) := \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, M)$$

が定義される．さらに $M = \Lambda$ であるとき，

$$HH^*(\Lambda) := \bigoplus_{n\geq 0} H^n(\Lambda, \Lambda)(= \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, \Lambda))$$

にカップ積 (または米田積) によって次数付き環としての構造を導入することができ，これを一般に Λ のホッホシルトコホモロジー環とよぶ．ホッホシルトコホモロジー環 $HH^*(\Lambda)$ は graded-commutative，つまり，$\alpha \in HH^p(\Lambda), \beta \in HH^q(\Lambda)$ に対し，$\alpha\beta = (-1)^{pq}\beta\alpha$ が成立する．

G を有限群とする．可換環 R 上の群環 RG のホッホシルトコホモロジー環は興味深い対象の一つである．G がアーベル群の場合，Holm [6] 及び Cibils-Solotar [3] によって環同型

$$HH^*(RG) \simeq RG \otimes_R H^*(G, R)$$

が示された．しかし，G がアーベル群でないときはこのような明確な記述を得ることは難しいと思われる．また，環同型 $HH^*(RG) \simeq H^*(G, {}_\psi RG)(= \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Ext}^n_{RG}(R, {}_\psi RG))$ が存在することから (例えば [10, §3], [9] などを参照)，これを通して有限群のコホモロジーに帰着することができる．ここで，${}_\psi RG$ は共役によって RG を G-加群とみなしたものである．一方で，G_i を G の共役類の代表元の中心加群とするとき，加群としての同型

$$HH^*(RG) \simeq \bigoplus_i H^*(G_i, R)$$

は以前から知られていたが ([1, Theorem 2.11.2]), Siegel-Witherspoon はこの加法群としての同型が環同型になるように，右辺に特別な積が入れられることを示した ([10]). 同時に彼らはこの特別な積を用いて，$\mathbb{F}_3S_3, \mathbb{F}_2A_4, \mathbb{F}_2D_{2^n}$ のホッホシルトコホモロジー環の構造を決定している．

以下では，Siegel-Witherspoon によって示された環同型について，簡単にご紹介する．$g_1(=1)$, $g_2, g_3, \ldots, g_r$ は G の共役類の代表元とし，各 G_i を g_i の中心加群とする．次の 2 つの RG_i 準同型 $\theta_{g_i}: R \longrightarrow RG$; $\lambda \longmapsto \lambda g_i$, $\pi_{g_i}: RG \longrightarrow R$; $\sum_{a\in G}\lambda_a a \longmapsto \lambda_{g_i}$ はコホモロジーの写像 $\theta_{g_i}^*: H^n(G_i,R) \longrightarrow H^n(G_i, {}_\psi RG)$ と $\pi_{g_i}^*: H^n(G_i, {}_\psi RG) \longrightarrow H^n(G_i,R)$ を誘導する．

$$\gamma_i : H^n(G_i,R) \longrightarrow H^n(G, {}_\psi RG); \alpha \longmapsto \mathrm{cor}_{G_i}^G \theta_{g_i}^*(\alpha)$$

と定めると，次の加法群としての同型 (Additive Decomposition) を得る:

$$\Phi : H^*(G, {}_\psi RG) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_i H^*(G_i,R); \zeta \longmapsto \left(\pi_{g_i}^* \mathrm{res}_{G_i}^G(\zeta)\right)_i \tag{1.1}$$

逆写像は $\Phi^{-1}(\alpha) = \gamma_i(\alpha) \quad (\alpha \in H^n(G_i,R))$ によって与えられる．Siegel-Witherspoon により，この加法群としての同型が環同型になるように，右辺に特別な積が入れられることが示された (詳しくは [10, §5] 参照):

Theorem 1 (Product Formula). $H^*(G, {}_\psi RG)(\simeq HH^*(RG))$ において，次が成立する:

$$\gamma_i(\alpha) \smile \gamma_j(\beta) = \sum_{a\in D} \gamma_k \left(\mathrm{cor}_W^{G_k}\left(\mathrm{res}_W^{{}^bG_i} b^*\alpha \smile \mathrm{res}_W^{{}^{ba}G_j}(ba)^*\beta\right)\right)$$

ただし，$\alpha \in H^*(G_i,R)$, $\beta \in H^*(G_j,R)$ とし，D は両側剰余類 $G_i\backslash G/G_j$ の代表元の集合とする．また，$k = k(a)$ と $b = b(a)$ は $g_k = (bg_ib^{-1})((ba)g_j(ba)^{-1})$ を満たすようにとり，$W = {}^bG_i \cap {}^{ba}G_j$ とする．

特に，$\gamma_1 : H^*(G,R) \longrightarrow H^*(G, {}_\psi RG)$; $\alpha \longmapsto \theta_1^*(\alpha)$ (θ_1^* は $\theta_1 : R \to RG; r \mapsto r\cdot 1$ から誘導される) は単射環準同型である．

Siegel-Witherspoon の結果が示すことは，群環のホッホシルトコホモロジーにおけるカップ積は，有限群のコホモロジーにおけるカップ積とレストリクションやコレストリクションを用いて記述できるということである．

これまでは，一般四元数群や準二面体群などの群環のホッホシルトコホモロジーについて研究してきた．今回は，ある split metacyclic 群の整係数の群のコホモロジー環の構造を決定し，さらに整係数群環 $\mathbb{Z}G$ のホッホシルトコホモロジー環の構造を決定したので，ご報告したい ([4]).

§1. G の整係数のコホモロジー

G を次のような位数 8ℓ $(\ell \geq 2)$ の split metacyclic 群

$$G = \langle x, y \mid x^{4\ell} = y^2 = 1, yxy^{-1} = x^{2\ell+1}\rangle$$

とする．ここでは，まず G の整係数のコホモロジー環について考察する．

一般の split metacyclic 群に対しては，$\mathbb{Z}$ の自由分解が Wall [11] によって与えられている．Wall の自由分解を用いると，米田積の計算やレストリクションなどの計算をする際に，相当複雑な計算が必要になる．そこで，これらの計算を少しでもしやすくするため，Wall の自由分解よりも使いやすい自由分解を構成することを考えた．結果として，今回扱う split metacyclic 群 G の場合に，新たな自由分解を構成することができたので，それについてご紹介する．

$q \geq 0$ とし，$\mathbb{Z}G$ の $q+1$ 個のコピーの直和を Y_q とおき，$c_q^1, c_q^2, \ldots, c_q^{q+1} (\in Y_q)$ を，

$$c_q^k = (\underbrace{0, \ldots, 0, \overset{k}{\check{1}}, 0, \ldots, 0}_{q+1})$$

と定める．便宜上，$k < 0$ または $k > q+1$ のときは，$c_q^k = 0$ としておく．また，

$$N_k = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} x^i & (k \geq 1), \\ 0 & (k = 0), \end{cases} \quad M_k = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} x^{ti} & (k \geq 1), \\ 0 & (k = 0). \end{cases}$$

とおき，特に，$N = N_{4\ell}$ とする．左 $\mathbb{Z}G$ 準同型 $\delta_n : Y_n \to Y_{n-1} \ \ (n > 0)$ を次のように定義する:

(i) n が偶数のとき，

$$\delta_n(c_n^k) = \begin{cases} (x^t - 1)c_{n-1}^k + (N_t - y)c_{n-1}^{k-1} + (\ell + 1)c_{n-1}^{k-2} & \text{for } n - k \equiv 0 \pmod 4, \\ \quad N c_{n-1}^k + (M_t + y)c_n^{k-1} & \text{for } n - k \equiv 1 \pmod 4, \\ (x - 1)c_{n-1}^k - (y - 1)c_{n-1}^{k-1} & \text{for } n - k \equiv 2 \pmod 4, \\ \quad N c_{n-1}^k + (y + 1)c_{n-1}^{k-1} & \text{for } n - k \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

(ii) n が奇数のとき，

$$\delta_n(c_n^k) = \begin{cases} (x - 1)c_{n-1}^k - (M_t + y)c_{n-1}^{k-1} + (\ell + 1)c_{n-1}^{k-2} & \text{for } n - k \equiv 0 \pmod 4, \\ \quad N c_{n-1}^k - (N_t - y)c_n^{k-1} & \text{for } n - k \equiv 1 \pmod 4, \\ (x^t - 1)c_{n-1}^k - (y + 1)c_{n-1}^{k-1} & \text{for } n - k \equiv 2 \pmod 4, \\ \quad N c_{n-1}^k + (y - 1)c_{n-1}^{k-1} & \text{for } n - k \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

このとき，次が成立する:

Proposition 2. 上の記号の下で，

$$(Y, \delta) : \cdots \to Y_n \xrightarrow{\delta_n} Y_{n-1} \to \cdots \to Y_1 \xrightarrow{\delta_1} Y_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

は G に対する $\mathbb{Z}$ の自由分解を与える．ただし，ε は augmentation とする．

なお，もう少し一般の split metacyclic 群に対して，このような自由分解が構成できるかどうかは，今後継続して研究していく予定で，何か進展があれば，別の機会にでもご報告できればと思う．

次に，G の整係数コホモロジーや部分群の整係数コホモロジーとの間のレストリクションやコレストリクションなどについて述べ，G の整係数コホモロジー環の構造について考察する．以下では，ℓ が偶数の場合と奇数の場合に分けて述べることにする．

§1.1 ℓ が偶数のとき

関手 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-,\mathbb{Z})$ を自由分解 (Y,δ) に施し，同一視 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(Y_q,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}^{q+1}$ を通すことにより，次が得られる:

$$H^n(G,\mathbb{Z})=\begin{cases}\mathbb{Z} & \text{for } n=0,\\ 0 & \text{for } n=1,\ 3,\\ \mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z}\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k & \text{for } n=4k \qquad (k\neq 0),\\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k & \text{for } n=4k+1\ (k\neq 0),\\ \mathbb{Z}/2\ell\mathbb{Z}\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k+1} & \text{for } n=4k+2,\\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k & \text{for } n=4k+3\ (k\neq 0).\end{cases}$$

そして，$H^*(G,\mathbb{Z})$ の加群の生成元を次のようにとる:

$$\begin{aligned}&\xi:=(2,1,0),\ \beta:=(0,0,1)\in H^2(G,\mathbb{Z}),\\ &\zeta:=(1,0,0,0,0)\in H^4(G,\mathbb{Z}),\\ &\kappa:=(0,2\ell,-1,0,0,0)\in H^5(G,\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

次に，G の次の部分群

$$\begin{array}{lll}\langle x\rangle\ (\simeq\mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z}), & \langle x^2,y\rangle\ (\simeq\mathbb{Z}/2\ell\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), & \\ \langle xy\rangle\ (\simeq\mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z}), & \langle x^2\rangle\ (\simeq\mathbb{Z}/2\ell\mathbb{Z}), & \langle y\rangle\ (\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\end{array}$$

の整係数コホモロジー環

$$\begin{aligned}H^*(\langle x\rangle,\mathbb{Z})&=\mathbb{Z}[\sigma]/(4\ell\sigma), && (\deg\sigma=2),\\ H^*(\langle x^2,y\rangle,\mathbb{Z})&=\mathbb{Z}[\lambda,\mu,\nu]/(2\lambda,2\ell\mu,2\nu,\nu^2), && (\deg\lambda=\deg\mu=2,\ \deg\nu=3),\\ H^*(\langle xy\rangle,\mathbb{Z})&=\mathbb{Z}[\tau]/(4\ell\tau), && (\deg\tau=2),\\ H^*(\langle x^2\rangle,\mathbb{Z})&=\mathbb{Z}[\eta]/(2\ell\eta), && (\deg\eta=2),\\ H^*(\langle y\rangle,\mathbb{Z})&=\mathbb{Z}[\theta]/(2\theta), && (\deg\theta=2)\end{aligned}$$

について考える．G とこれらの部分群のコホモロジー環との間のレストリクションやコレストリクションなどの計算結果を表示すると次の通りである (これらは，ホッホシルトコホモロジーにおける積を計算する際にも用いる):

Lemma 3. 次が成立する.

(i) $\mathrm{res}^G_{\langle x\rangle}\beta = 0,\ \mathrm{res}^G_{\langle x\rangle}\xi = 2\sigma,\ \mathrm{res}^G_{\langle x\rangle}\zeta = t\sigma^2, \mathrm{res}^G_{\langle x\rangle}\kappa = 0.$

(ii) $\mathrm{res}^G_{\langle x^2,y\rangle}\beta = \lambda,\ \mathrm{res}^G_{\langle x^2,y\rangle}\xi = 2\mu,\ \mathrm{res}^G_{\langle x^2,y\rangle}\zeta = \lambda\mu+\mu^2,\ \mathrm{res}^G_{\langle x^2,y\rangle}\kappa = \lambda\nu.$

(iii) $\mathrm{res}^G_{\langle xy\rangle}\beta = 2\ell\tau,\ \mathrm{res}^G_{\langle xy\rangle}\xi = 2\tau,\ \mathrm{res}^G_{\langle xy\rangle}\zeta = \begin{cases}\tau^2 & (\ell\equiv 0\ (4)),\\ (2\ell+1)\tau^2 & (\ell\equiv 2\ (4)),\end{cases}\ \mathrm{res}^G_{\langle xy\rangle}\kappa = 0.$

(iv) $\mathrm{res}^{\langle x\rangle}_{\langle x^2\rangle}\sigma = \mathrm{res}^{\langle x^2,y\rangle}_{\langle x^2\rangle}\mu = \eta,\ \mathrm{res}^{\langle x^2,y\rangle}_{\langle x^2\rangle}\lambda = 0,\ \mathrm{res}^{\langle xy\rangle}_{\langle x^2\rangle}\tau = (\ell+1)\eta.$

(v) $\mathrm{res}^G_{\langle y\rangle}\beta = \theta,\ \mathrm{res}^G_{\langle y\rangle}\xi = 0,\ \mathrm{res}^G_{\langle y\rangle}\zeta = 0,\ \mathrm{res}^G_{\langle y\rangle}\kappa = 0.$

Lemma 4. 次が成立する.

$y^*(\sigma) = t\sigma,\ x^*(\lambda) = \lambda,\ x^*(\mu) = \lambda+\mu,\ y^*(\tau) = t\tau.$

これらは，自由分解 (Y,δ) 及び部分群に対する $\mathbb{Z}$ の自由分解との間の chain map を直接構成することなどにより得られる.

Lemma 5. 次が成立する．ただし，$k\geq 1$ とする.

(i) $\mathrm{cor}^G_{\langle x\rangle}\sigma = (\ell+1)\xi,\ \mathrm{cor}^G_{\langle x\rangle}\sigma^{2k} = 2\zeta^k.$

(ii) $\mathrm{cor}^G_{\langle x^2,y\rangle}\lambda = 0,\ \mathrm{cor}^G_{\langle x^2,y\rangle}\mu = \beta+\xi,\ \mathrm{cor}^G_{\langle x^2,y\rangle}\mu^2 = 2\zeta+\beta^2,\ \mathrm{cor}^G_{\langle x^2,y\rangle}(\lambda\mu) = \beta^2,$
$\mathrm{cor}^G_{\langle x^2,y\rangle}(\lambda\nu) = 0,\ \mathrm{cor}^G_{\langle x^2,y\rangle}(\mu\nu) = \kappa,\ \mathrm{cor}^G_{\langle x^2,y\rangle}(\mu^2\nu) = \mathrm{cor}^G_{\langle x^2,y\rangle}(\lambda\mu\nu) = \beta\kappa.$

(iii) $\mathrm{cor}^G_{\langle xy\rangle}\tau = (\ell+1)\xi,\ \mathrm{cor}^G_{\langle xy\rangle}\tau^{2k} = 2\zeta^k.$

(iv) $\mathrm{cor}^{\langle x\rangle}_{\langle x^2\rangle}\eta^k = 2\sigma^k,\ \mathrm{cor}^{\langle x^2,y\rangle}_{\langle x^2\rangle}\eta^k = 2\mu^k,\ \mathrm{cor}^{\langle xy\rangle}_{\langle x^2\rangle}\eta^k = 2(\ell+1)\tau^k.$

これらは，レストリクションの計算結果に，Double coset formula, Frobenius の相互律やその他の性質を用いて計算することにより得られる.

そして，$H^*(G,\mathbb{Z})$ の加群の生成元の間の米田積を計算したり，レストリクションの計算結果を用いることにより，コホモロジーの環構造が得られる.

Proposition 6. ℓ が偶数のとき，G の整係数コホモロジー環の構造は次の通り:

$$H^*(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\beta,\xi,\zeta,\kappa]/(2\beta, 2\ell\xi, 4\ell\zeta, 2\kappa, \beta\xi, \xi^2-4\zeta, \xi\kappa, \kappa^2).$$

ただし，$\deg\beta = \deg\xi = 2,\ \deg\zeta = 4,\ \deg\kappa = 5.$

Remark 7. $\ell = 2^r\ (r\geq 1)$ のとき，$H^*(G,\mathbb{Z})$ の環構造はすでに，[7] によって与えられている.

しかしながら，ℓ が 2 ベキ以外の場合に，整係数コホモロジー環の構造を決定している文献は見当たらない．

§1.2 ℓ が奇数のとき

以下では，ℓ が奇数の場合を考察する．G の整係数のコホモロジーの加群の構造は次の通り:

$$H^n(G,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{for } n=0, \\ 0 & \text{for } n=1, \\ \mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2k} & \text{for } n=4k \quad (k \neq 0), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2k} & \text{for } n=4k+1 \ (k \neq 0), \\ \mathbb{Z}/2\ell\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2k+1} & \text{for } n=4k+2, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2k+1} & \text{for } n=4k+3. \end{cases}$$

そして，$H^*(G,\mathbb{Z})$ の加群の生成元として，

$$\xi := (2,1,0),\ \beta := (0,0,1) \in H^2(G,\mathbb{Z}),$$
$$\rho := (0,\ell,-\frac{\ell+1}{2},0) \in H^3(G,\mathbb{Z}),\ \zeta := (1,0,0,0,0) \in H^4(G,\mathbb{Z})$$

をとり，G の次の部分群

$$\langle x\rangle\ (\simeq \mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z}), \qquad \langle x^2, y\rangle\ (\simeq \mathbb{Z}/2\ell\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$
$$\langle x^2, x^\ell y\rangle\ (\simeq \mathbb{Z}/2\ell\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \quad \langle x^2\rangle\ (\simeq \mathbb{Z}/2\ell\mathbb{Z}), \quad \langle y\rangle\ (\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

の整係数コホモロジー環

$$\begin{aligned} H^*(\langle x\rangle,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\sigma]/(4\ell\sigma), && (\deg\sigma = 2), \\ H^*(\langle x^2,y\rangle,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\lambda,\mu,\nu]/(2\lambda, 2\ell\mu, 2\nu, \nu^2), && (\deg\lambda = \deg\mu = 2,\ \deg\nu = 3), \\ H^*(\langle x^2,x^\ell y\rangle,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\lambda',\mu',\nu']/(2\lambda', 2\ell\mu', 2\nu', (\nu')^2), && (\deg\lambda' = \deg\mu' = 2,\ \deg\nu' = 3), \\ H^*(\langle x^2\rangle,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\eta]/(2\ell\eta), && (\deg\eta = 2), \\ H^*(\langle y\rangle,\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[\theta]/(2\theta), && (\deg\theta = 2) \end{aligned}$$

を考える．レストリクションやコレストリクションなどの計算結果を表示すると，次の通りである:

Lemma 8. 次が成立する．

(i) $\mathrm{res}^G_{\langle x\rangle}\beta = 0,\ \mathrm{res}^G_{\langle x\rangle}\xi = 2\sigma,\ \mathrm{res}^G_{\langle x\rangle}\rho = 0,\ \mathrm{res}^G_{\langle x\rangle}\zeta = t\sigma^2.$

(ii) $\mathrm{res}^G_{\langle x^2,y\rangle}\beta = \lambda,\ \mathrm{res}^G_{\langle x^2,y\rangle}\xi = 2\mu,\ \mathrm{res}^G_{\langle x^2,y\rangle}\rho = \nu,\ \ \mathrm{res}^G_{\langle x^2,y\rangle}\zeta = \lambda\mu + \mu^2.$

(iii) $\mathrm{res}^G_{\langle x^2, x^\ell y\rangle}\beta = \lambda',\ \mathrm{res}^G_{\langle x^2, x^\ell y\rangle}\xi = 2\mu' + \lambda',\ \mathrm{res}^G_{\langle x^2, x^\ell y\rangle}\rho = \nu',$

$$\mathrm{res}^G_{\langle x^2, x^\ell y\rangle}\zeta = \begin{cases} (\mu')^2 + \lambda'\mu' + (\lambda')^2 & (\ell \equiv 1\ (mod\ 4)), \\ (\mu')^2 + \lambda'\mu' & (\ell \equiv 3\ (mod\ 4)). \end{cases}$$

(iv) $\mathrm{res}^{\langle x\rangle}_{\langle x^2\rangle}\sigma = \mathrm{res}^{\langle x^2, y\rangle}_{\langle x^2\rangle}\mu = \mathrm{res}^{\langle x^2, x^\ell y\rangle}_{\langle x^2\rangle}\mu' = \eta,\ \mathrm{res}^{\langle x^2, y\rangle}_{\langle x^2\rangle}\lambda = \mathrm{res}^{\langle x^2, x^\ell y\rangle}_{\langle x^2\rangle}\lambda' = 0.$

(v) $\mathrm{res}^G_{\langle y\rangle}\beta = \theta,\ \mathrm{res}^G_{\langle y\rangle}\xi = 0,\ \mathrm{res}^G_{\langle y\rangle}\rho = 0,\ \mathrm{res}^G_{\langle y\rangle}\zeta = 0.$

Lemma 9. 次が成立する．

$$y^*(\sigma) = t\sigma,\ x^*(\lambda) = \lambda,\ x^*(\mu) = \lambda + \mu,\ x^*(\lambda') = \lambda',\ x^*(\mu') = \lambda' + \mu'.$$

Lemma 10. 次が成立する．ただし，$k \geq 1$ とする．

(i) $\mathrm{cor}^G_{\langle x\rangle}\sigma = (\ell + 1)\xi,\ \mathrm{cor}^G_{\langle x\rangle}\sigma^{2k} = 2\zeta^k.$

(ii) $\mathrm{cor}^G_{\langle x^2, y\rangle}\lambda = 0,\ \mathrm{cor}^G_{\langle x^2, y\rangle}\mu = \beta + \xi,\ \mathrm{cor}^G_{\langle x^2, y\rangle}\nu = 0,\ \mathrm{cor}^G_{\langle x^2, y\rangle}\mu^2 = 2\zeta + \beta\xi + \beta^2,$
$\mathrm{cor}^G_{\langle x^2, y\rangle}(\lambda\mu) = \beta\xi + \beta^2.$

(iii) $\mathrm{cor}^G_{\langle x^2, x^\ell y\rangle}\lambda' = 0,\ \mathrm{cor}^G_{\langle x^2, x^\ell y\rangle}\mu' = \xi,\ \mathrm{cor}^G_{\langle x^2, x^\ell y\rangle}\nu' = 0,\ \mathrm{cor}^G_{\langle x^2, x^\ell y\rangle}(\mu')^2 = 2\zeta + \beta\xi,$
$\mathrm{cor}^G_{\langle x^2, x^\ell y\rangle}(\lambda'\mu') = \beta\xi.$

(iv) $\mathrm{cor}^{\langle x\rangle}_{\langle x^2\rangle}\eta^k = 2\sigma^k,\ \mathrm{cor}^{\langle x^2, y\rangle}_{\langle x^2\rangle}\eta^k = 2\mu^k,\ \mathrm{cor}^{\langle x^2, x^\ell y\rangle}_{\langle x^2\rangle}\eta^k = 2(\mu')^k.$

そして，ℓ が偶数の場合と同様に，米田積やレストリクションを計算することにより，コホモロジーの環構造が得られる．

Proposition 11. ℓ が奇数のとき，G の整係数コホモロジー環の構造は次の通り：

$$H^*(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\beta, \xi, \rho, \zeta]/(2\beta, 2\ell\xi, 2\rho, 4\ell\zeta, \xi^2 - \beta\xi - 4\zeta, \rho^2 - \beta\zeta - \frac{\ell+1}{2}\beta^2\xi).$$

ただし，$\deg\beta = \deg\xi = 2,\ \deg\rho = 3,\ \deg\zeta = 4$ とする．

§2. 整係数群環 $\mathbb{Z}G$ のホッホシルトコホモロジー環

第2章では，G の整係数群環のホッホシルトコホモロジー環の構造についてご紹介する．積の計算は，第1章で得られたレストリクションやコレストリクションなどの計算結果と，Siegel-Witherspoon によって得られた環同型 (定理 1) を用いて得られる．以下では，ℓ が偶数の場合と奇数の場合に分けて述べる．

§2.1 ℓ が偶数の場合

G の中心化群の整係数コホモロジーの加群構造と，(1.1) の加法群としての同型 (Additive Decomposition) を用いると，$\mathbb{Z}G$ のホッホシルトコホモロジー加群が分かる．

$$HH^n(\mathbb{Z}G) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{5\ell} & (n=0), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{4k\ell} \oplus (\mathbb{Z}/2\ell\mathbb{Z})^{\ell} \oplus (\mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z})^{4\ell} & (n = 4k(\neq 0)), \\ 0 & (n=1), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{4k\ell} & (n = 4k+1\ (k \neq 0)), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{4k\ell+3\ell} \oplus (\mathbb{Z}/2\ell\mathbb{Z})^{3\ell} \oplus (\mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z})^{2\ell} & (n = 4k+2), \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{4k\ell+\ell} & (n=4k+3). \end{cases}$$

次に，G の共役類の代表元を次のようにとる:

$$g_i = x^{2i-2} \quad (1 \le i \le 2\ell),\ g_{2\ell+i} = x^{2i-1} \quad (1 \le i \le \ell),$$
$$g_{3\ell+i} = x^{2i-2}y \ \ (1 \le i \le \ell),\ \ g_{4\ell+i} = x^{2i-1}y \ \ (1 \le i \le \ell).$$

そして，これらの中心化群を次のようにおく:

$$G_i = G \quad (1 \le i \le 2\ell), \qquad G_{2\ell+i} = \langle x \rangle \ \ (1 \le i \le \ell),$$
$$G_{3\ell+i} = \langle x^2, y \rangle \ \ (1 \le i \le \ell),\ G_{4\ell+i} = \langle xy \rangle \ \ (1 \le i \le \ell).$$

積の計算について，0 次の生成元の間の積については，$\mathbb{Z}G$ の中心における通常の積に一致する．他の生成元の積は定理 1(Product Formula) 及び，§1.1 の補題 3,4,5 や定理 6 を使って計算することにより得られる．また，$HH^*(\mathbb{Z}G)$ は $H^*(G,\mathbb{Z})$ を部分環として含んでいることも用いる．

さらに，次のようにおく:

$$\begin{aligned} &A_2 = \gamma_1(\beta),\ B_2 = \gamma_1(\xi),\ A_4 = \gamma_1(\zeta),\ A_5 = \gamma_1(\kappa); \\ &D_0 = \gamma_2(1);\ C_0 = \gamma_{2\ell+1}(1),\ C_2 = \gamma_{2\ell+1}(\sigma); \\ &E_0 = \gamma_{3\ell+1}(1),\ E_2 = \gamma_{3\ell+1}(\mu),\ E_3 = \gamma_{3\ell+1}(\nu),\ E_5 = \gamma_{3\ell+1}(\mu\nu); \\ &F_0 = \gamma_{4\ell+1}(1),\ F_2 = \gamma_{4\ell+1}(\tau). \end{aligned}$$

このとき，$H^*(G, {}_\psi\mathbb{Z}G)(\simeq HH^*(\mathbb{Z}G))$ は，これらの元の積によって生成されることが確認できる．また，環構造を記述するために必要な生成元の間の関係式もすべて得ることができた．結果として次の定理を得る．

Theorem 12. ℓ が偶数のとき，ホッホシルトコホモロジー環 $H^*(G, {}_\psi\mathbb{Z}G)(\simeq HH^*(\mathbb{Z}G))$ は可換環であり，$\mathbb{Z}$ 上次の元の積で生成される:

$$D_0, C_0, E_0, F_0 \in H^0(G, {}_\psi\mathbb{Z}G);\quad A_2, B_2, C_2, E_2, F_2 \in H^2(G, {}_\psi\mathbb{Z}G);$$
$$E_3 \in H^3(G, {}_\psi\mathbb{Z}G);\quad A_4 \in H^4(G, {}_\psi\mathbb{Z}G);\quad A_5, E_5 \in H^5(G, {}_\psi\mathbb{Z}G).$$

以下，$I_0 = D_0^\ell + 1, J_0 = D_0^\ell - 1$ とおく．生成元の間の関係式は次の通り:

(i) degree-0 relations

$I_0J_0 = J_0C_0 = J_0E_0 = J_0F_0 = 0,\ C_0^2 = F_0^2 = 2D_0I_0,\ C_0E_0 = 2F_0,$
$C_0F_0 = 2D_0E_0,\ E_0F_0 = 2C_0,\ E_0^2 = 2I_0;$

(ii) degree-2 relations

$2A_2 = 2\ell B_2 = 4\ell C_2 = 2\ell E_2 = 4\ell F_2 = C_0A_2 = 0,\ C_0B_2 = F_0E_2 = 2C_2,$
$E_0B_2 = 2E_2,\ F_0A_2 = 2\ell F_2,\ F_0B_2 = 2F_2,\ C_0C_2 = F_0F_2 = (\ell+1)D_0I_0B_2,$
$E_0C_2 = C_0E_2 = 2(\ell+1)F_2,\ F_0C_2 = C_0F_2 = 2D_0E_2,\ D_0^\ell C_2 = tC_2,$
$D_0^\ell F_2 = tF_2,\ J_0E_2 = E_0A_2,\ E_0E_2 = I_0(A_2 + B_2),\ E_0F_2 = 2(\ell+1)C_2;$

(iii) degree-3 relations

$2E_3 = J_0E_3 = C_0E_3 = E_0E_3 = F_0E_3 = 0;$

(iv) degree-4 relations

$4\ell A_4 = 2\ell A_4E_0 = A_2B_2 = A_2C_2 = 0,\ B_2C_2 = 2C_0A_4,\ B_2E_2 = 2E_0A_4,$
$A_2F_2 = 2\ell F_0A_4,\ B_2F_2 = 2F_0A_4,\ C_2^2 = F_2^2 = 2D_0I_0A_4,\ C_2E_2 = 2(\ell+1)F_0A_4,$
$C_2F_2 = 2D_0E_0A_4,\ E_2^2 = 2I_0A_4 + A_2^2,\ E_2F_2 = 2(\ell+1)C_0A_4;$

(v) degree-5 relations

$2A_5 = 2E_5 = C_0A_5 = F_0A_5 = C_0E_5 = F_0E_5 = B_2E_3 = C_2E_3 = F_2F_3 = 0,$
$E_0A_5 = A_2E_3,\ E_0E_5 = E_2E_3 = I_0A_5;$

(vi) degree-6 relation

$E_3^2 = 0;$

(vii) degree-7 relations

$B_2A_5 = C_2A_5 = F_2A_5 = B_2E_5 = C_2E_5 = F_2E_5 = 0,\ A_2E_5 = E_2A_5,$
$E_2E_5 = A_2A_5;$

(viii) degree-8 relations

$E_3A_5 = E_3E_5 = 0;$

(ix) degree-10 relations

$A_5^2 = E_5^2 = A_5E_5 = 0.$

§2.2 ℓ が奇数の場合

ℓ が偶数のときと同様に，(1.1) の加法群としての同型 (Additive Decomposition) を用いると，$\mathbb{Z}G$ のホッホシルトコホモロジー加群が分かる．

$$HH^n(\mathbb{Z}G)=\begin{cases}\mathbb{Z}^{5\ell} & (n=0),\\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{8k\ell}\oplus(\mathbb{Z}/2\ell\mathbb{Z})^{2\ell}\oplus(\mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z})^{3\ell} & (n=4k(\neq 0)),\\ 0 & (n=1),\\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{8k\ell} & (n=4k+1\ (k\neq 0)),\\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{8k\ell+4\ell}\oplus(\mathbb{Z}/2\ell\mathbb{Z})^{2\ell}\oplus(\mathbb{Z}/4\ell\mathbb{Z})^{\ell} & (n=4k+2),\\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{8k\ell+4\ell} & (n=4k+3).\end{cases}$$

次に，G の共役類の代表元を次のようにとる:

$$g_i=x^{2i-2}\quad(1\leq i\leq 2\ell),\ g_{2\ell+i}=x^{2i-1}\quad(1\leq i\leq \ell),$$
$$g_{3\ell+i}=x^{2i-2}y\ \ (1\leq i\leq \ell),\ \ g_{4\ell+i}=x^{2i-1}y\ \ (1\leq i\leq \ell).$$

そして，これらの中心化群を次のようにおく:

$$G_i=G\quad(1\leq i\leq 2\ell),\qquad G_{2\ell+i}=\langle x\rangle\ \ (1\leq i\leq \ell),$$
$$G_{3\ell+i}=\langle x^2,y\rangle\ \ (1\leq i\leq \ell),\ G_{4\ell+i}=\langle x^2,x^{\ell}y\rangle\ \ (1\leq i\leq \ell).$$

さらに，次のようにおく:

$$\begin{aligned}&A_2=\gamma_1(\beta),\ B_2=\gamma_1(\xi),\ A_3=\gamma_1(\rho),\ A_4=\gamma_1(\zeta);\ D_0=\gamma_2(1);\\ &C_0=\gamma_{2\ell+1}(1),\ C_2=\gamma_{2\ell+1}(\sigma);\ E_0=\gamma_{3\ell+1}(1),\ E_2=\gamma_{3\ell+1}(\mu);\\ &F_0=\gamma_{4\ell+1}(1),\ F_2=\gamma_{4\ell+1}(\mu').\end{aligned}$$

ℓ が偶数の場合と同様にして，$H^*(G,{}_{\psi}\mathbb{Z}G)(\simeq HH^*(\mathbb{Z}G))$ は，これらの元の積によって生成されることが分かり，そして，環構造を記述するために必要な生成元の間の関係式もすべて得ることができた.

Theorem 13. ℓ が奇数のとき，ホッホシルトコホモロジー環 $H^*(G,{}_{\psi}\mathbb{Z}G)(\simeq HH^*(\mathbb{Z}G))$ は可換環であり，$\mathbb{Z}$ 上次の元の積で生成される:

$$D_0,C_0,E_0,F_0\in H^0(G,{}_{\psi}\mathbb{Z}G);\quad A_2,B_2,C_2,E_2,F_2\in H^2(G,{}_{\psi}\mathbb{Z}G);$$
$$A_3\in H^3(G,{}_{\psi}\mathbb{Z}G);\quad A_4\in H^4(G,{}_{\psi}\mathbb{Z}G).$$

以下では，$I_0 = D_0^\ell + 1, J_0 = D_0^\ell - 1$ とおく．生成元の間の関係式は次の通り：

(i) degree-0 relations

$$I_0J_0 = J_0C_0 = J_0E_0 = J_0F_0 = 0,\ C_0^2 = F_0^2 = 2D_0I_0,$$
$$C_0E_0 = 2F_0,\ C_0F_0 = 2D_0E_0,\ E_0F_0 = 2C_0,\ E_0^2 = 2I_0;$$

(ii) degree-2 relations

$$2A_2 = 2\ell B_2 = 4\ell C_2 = 2\ell E_2 = 2\ell F_2 = C_0A_2 = 0,\ C_0B_2 = E_0F_2 = F_0E_2 = 2C_2,$$
$$E_0B_2 = 2E_2,\ F_0B_2 = 2F_2 + F_0A_2,\ C_0C_2 = (\ell+1)D_0I_0B_2,$$
$$E_0C_2 = C_0E_2 = 2F_2,\ F_0C_2 = C_0F_2 = 2D_0E_2,\ D_0^\ell C_2 = tC_2,\ J_0E_2 = E_0A_2,$$
$$J_0F_2 = F_0A_2,\ E_0E_2 = I_0(A_2 + B_2),\ F_0F_2 = D_0I_0B_2;$$

(iii) degree-3 relations

$$2A_3 = C_0A_3 = 0;$$

(iv) degree-4 relations

$$4\ell A_4 = 2\ell E_0A_4 = 2\ell F_0A_4 = A_2C_2 = 0,\ B_2^2 = A_2B_2 + 4A_4,$$
$$B_2C_2 = E_2F_2 = 2C_0A_4,\ B_2E_2 = 2E_0A_4,\ B_2F_2 = 2F_0A_4 + A_2F_2,$$
$$C_2^2 = 2D_0I_0A_4,\ C_2E_2 = 2F_0A_4,\ C_2F_2 = 2D_0E_0A_4,\ E_2^2 = 2I_0A_4 + A_2B_2 + A_2^2,$$
$$F_2^2 = 2D_0I_0A_4 + D_0^{\ell+1}A_2B_2;$$

(v) degree-5 relations

$$C_2A_3 = 0,\ E_2A_3 = E_0B_2A_3,\ F_2A_3 = F_0B_2A_3;$$

(vi) degree-6 relation

$$A_3^2 = B_2A_4 + \frac{\ell+1}{2}A_2^2B_2.$$

謝辞

今回の研究集会において，発表の機会を与えて頂いた埼玉大学の飛田明彦先生には，大変にお世話になりました．改めまして，心よりお礼申し上げます．

参考文献

[1] D. J. Benson, *Representations and cohomology II: cohomology of groups and modules*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[2] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton. NJ., 1956.

[3] C. Cibils and A. Solotar, *Hochschild cohomology algebra of abelian groups*, Arch. Math. **68** (1997), 17–21.

[4] T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of a split metacyclic group*, preprint.

[5] G. Hochschild, *On the Cohomology Groups of an Associative Algebra*, Ann. of Math. **46** (1945), 58–67.

[6] T. Holm, *The Hochschild cohomology ring of a modular group algebra: the commutative case*, Comm. Algebra **24** (1996), 1957–1969.

[7] D. S. Larson, *The integral cohomology rings of split metacyclic groups*, Thesis (Ph.D.)—University of Minnesota (1988).

[8] S. MacLane, *Homology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1975.

[9] T. Nozawa and K. Sanada, *Cup products on the complete relative cohomologies of finite groups and group algebras*, Hokkaido Math. J. **28** (1999), 545–556.

[10] S. F. Siegel and S. J. Witherspoon, *The Hochschild cohomology ring of a group algebra*, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), 131–157.

[11] C. T. C. Wall, *Resolutions for extensions of groups*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **57** (1961), 251–255.