数理解析研究所講究録
第2061巻 2018年 61-64

Simple modules in the stable Auslander-Reiten quivers for finite group algebras

Center for Frontier Science, Chiba University
e-mail koshitan@math.s.chiba-u.ac.jp
千葉大学 先進科学センター

Shigeo Koshitani 越谷 重夫

1. Introduction

これは Caroline Lassueur との共同研究である ([KL17] 参照)。以下、k を標数 $p>0$ の代数的閉体、G を有限群、kG をそれらの群代数（群多元環）とする。ただし以下ずっと $p \,\Big|\, |G|$ を仮定しておく。使われている語句の定義などは [NT88]、[Ben98] を参照のこと。さて、唐突だが、次の問題を考える。

問題 A. B を kG のブロックであって、*wild*-表現型だとする。このとき、B に属する単純（既約） kG-加群の、kG の安定 *Auslaner-Reiten* 箙の連結成分におけるその位置を考えたとき、必ず端に位置するのだろうか？

この問題に関しては、1980-90 年代に結構盛んに研究されていて、以下の関連する論文がある [Kaw97, KMU00, KMU01, BU01]。

我々もこれらの結果を鑑みて、上記の問題を考えた。具体的には、素数 p が奇数、そして G の Sylow-p 部分群は可換、また $B := B_0(kG)$ が主ブロックである場合を取り扱った。関係する結果としては Kawata-Michler-Uno [KMU00, Theorem 5] および [Erd95] などがある。

次に今回の我々の主定理、およびその系を述べる。

定理 B. まず、$N \trianglelefteq G$であってG/Nはp'位数を持つ可解群とする。そして　BとbをそれぞれkGとkNのブロックとして、どちらも *wilde* 表現型であって、更に$1_B = 1_b$　(つまり環としての単位元は同じもの) を仮定する。このとき、もしも 単純 b-加群がすべて安定 *Auslander-Reiten*箙の連結成分の端に位置するのであれば、同じことが単純 B-加群に対しても成り立つ。

定理 C. 素数pは奇数, Gの *Sylowp*-部分群は非巡回群である可換群、そして$O_{p'}(G) = 1$を仮定する。また、$O^{p'}(G) = Q \times H_1 \times \cdots \times H_m$ *(*$m \geq 0$*)* とする。ここでQは可換p群、そして$H_1, H_2, \cdots, H_m$はすべて非可換有限単純群で位数がpで割り切れるもの、とする。更には、以下の*3*つの条件のうち、どれか一つが満たされているとする。

(i) $Q \neq 1$*;*

(ii) $Q = 1$ かつ　$m \geq 2$*;*

(iii) $Q = 1$ かつ　$m = 1$、 その上、すべての 単純 $B_0(kH_1)$-加群は、kH_1の安定 *Auslander-Reiten*箙の連結成分の端に位置している。ここで$B_0(kH_1)$はkH_1の主ブロックである。

この時、すべての 単純 $B_0(kG)$-加群は、kGの安定 *Auslander-Reiten*箙の連結成分の端に位置している。ここで$B_0(kG)$はkGの主ブロックである。

系 D. pをやはり奇素数、そして、すべての非可換有限単純群Hに対して、すべての 単純 $B_0(kH)$-加群はkHの安定 *Auslander-Reiten*箙の連結成分の端に位置している、と仮定する。この時、非巡回かつ可換 *Sylow* p-部分群をもつどんな有限群Gに対して、すべての 単純 $B_0(kG)$-加群はkGの安定 *Auslander-Reiten* 箙の連結成分の端に位置している。ここで$B_0(*)$の意味は上記定理と同じである。

$p = 2$の場合には、Kawata-Michler-Uno [KMU00] で同様のことが証明されている。

最後に、上記定理の別の系として以下のことも得られた。これは $p=3$ の場合の [KMU00, Theorem 5(a)] と同値である。

定理 E. $p=3$ とする。 G を可換 *Sylow* 3-部分群をもつ有限群とする。もしも、主ブロック $B_0(kG)$ が *wild* 表現型であれば, すべての 単純 $B_0(kG)$-加群は、kG の安定 *Auslander-Reiten* 箙の連結成分の端に位置している。

Acknowledgements. 今回の研究集会世話人であった、飛田明彦さん、亀子正喜さんには大変感謝しています。

References

[Ben98] D.J. Benson. Representations and Cohomology I. Cambridge Univ. Press, 1998.

[BU01] C. Bessenrodt and K. Uno, *Character relations and simple modules in the Auslander-Reiten graph of the symmetric and alternating groups and their covering groups*, Algebr. Represent. Theory **4** (2001), 445–468.

[Dad73] E.C. Dade, *Block extensions*, Illinois J. Math. **17** (1973), 198–272.

[Erd90] K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.*, Lecture Notes in Mathematics, 1428. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1990.

[Erd95] K. Erdmann, *On Auslander-Reiten components for group algebras*, J. Pure Appl. Algebra **104** (1995), no. 2, 149–160.

[FH93] P. Fong and M.E. Harris, *On perfect isometries and isotypies in finite groups*, Invent. Math. **114** (1993), 139–191.

[Kaw97] S. Kawata, *On Auslander-Reiten components and simple modules for finite group algebras*, Osaka J. Math. **34** (1997), 681–688.

[KMU00] S. Kawata, G. O. Michler, and K. Uno, *On simple modules in the Auslander-Reiten components of finite groups*, Math. Z. **234** (2000), 375–398.

[KMU01] ———, *On Auslander-Reiten components and simple modules for finite groups of Lie type*, Osaka J. Math. **38** (2001), 21–26.

[KL17] S. Koshitani and C. Lassueur, *Simple modules in the Auslander-Reiten quivers of principal blocks with abelian defect groups.*.

[KY10] S. Koshitani and Y. Yoshii, *Eigenvalues of Cartan matrices of principal 3-blocks of finite groups with abelian Sylow 3-subgroups*, J. Algebra **324** (2010), 1985–1993.

[Kue90] B. Külshammer, *Morita equivalent blocks in Clifford theory of finite groups*, Astérisque **181–182** (1990), 181–182.

[Kue95] B. Külshammer, *Donovan's conjecture, crossed products and algebraic group actions*, Israel J. Math. **92** (1995), 295–306.

[NT88] 永尾 汎–津島行男, 有限群の表現, 裳華房,1987.

[OU94] T. Okuyama and K. Uno, *On the vertices of modules in the Auslander-Reiten quiver. II*, Math. Z. **217** (1994), no. 1, 121–141.