数理解析研究所講究録
第2061巻 2018年 81-92

交代群の部分バーンサイド環の単元群

近畿大学・理工学部　小田文仁 (Fumihito Oda)

本稿は，千葉大学教育学部澤辺正人氏との共同研究 [OS] に基づく．

1 Notation

G は，有限群とする．(g) は，$g \in G$ を含む G の共役類とする．$c\ell(G)$ は，G の共役類全体の集合とする．$W_G(H)$ (または WH) は，剰余群 $N_G(H)/H$，ただし，H は G の部分群，$N_G(H)$ は H の G における正規化群，とする．二つの部分群 $H, K \leq G$ に対し，$H\backslash G/K$ は G の H と K による両側剰余類，$[H\backslash G/K]$ は，その完全代表系とする．(H) は，G の部分群 H を含む共役類; すなわち，$(H) = \{{}^gH \mid g \in G\}$，ただし，$g \in G$ に対し，${}^gH := gHg^{-1}$，とする．G-集合 X に対し，$[X]$ は，X を含む G-集合の同型類，X が有限集合のとき，$|X|$ は，X の要素の個数とする．$\mathcal{D}$ は，G の部分群の collection を表す; すなわち，$\mathcal{D}$ は，G-共役をとる操作で閉じている G の部分群の集合である．$C(\mathcal{D})$ は，$\mathcal{D}$ の G-共役類全体の集合とする; すなわち，$C(\mathcal{D}) = \{(H) \mid H \in \mathcal{D}\}$．$\mathcal{D}$ が G の部分群全体のとき $C(\mathcal{D})$ を $C(G)$ と書く．包含関係に関するポセット $\mathcal{D}$ のメビウス関数を $\mu_{\mathcal{D}}$ と書く．本稿では，環は単位元を持つものとする．$\mathcal{O}^\times$ は，環 $\mathcal{O}$ の単元群とする．可換群 M に対し，$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ を $\mathbb{Q}M$ と書く．

2 Abstract

本稿では，対称群 S_n の Young subgroup Y と交代群 A_n との共通部分 $Y \cap A_n$ として得られる A_n の部分群の collection $\mathfrak{A}_n$ に関する部分バーンサイド環 $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$ の単元群の階数 3 の部分群の存在が示される．

3 Preliminaries

この節では，第 5 節で用いられる部分バーンサイド環の基本的性質を準備する．

3.1 Homomorphisms between Burnside Rings

はじめに，バーンサイド環の間の準同型写像について [Yo90a] から準備する．H が G の部分群であるとき，G 集合の圏から H 集合の圏への制限関手 Res^G_H を得る．その関手はバーンサイド環 $\Omega(G)$ から $\Omega(H)$ への環準同型を誘導するので，群準同型

$$\mathrm{Res}^G_H : \Omega(G)^\times \to \Omega(H)^\times \tag{3.1}$$

を誘導する．$\Omega(G)$ の単位元を $1 = [G/G]$ と書く．左 Gset X に対し，

$$\mathrm{inv}_H(X) = \{x \in X \mid hx = x \text{ for all } h \in H\}$$

と書く．[Di79, Proposition 1.2.2] により，任意の $(K) \in C(G)$ に対し

$$\varphi_H : [G/K] \mapsto |\mathrm{inv}_H(G/K)|, (H) \in C(G)$$

で与えられる写像

$$\varphi = (\varphi_H)_{(H)\in C(G)} : \Omega(G) \to \widetilde{\Omega}(G) := \prod_{(H)\in C(G)} \mathbb{Z}$$

は単射環準同型である．任意の元 $x \in \Omega(G)$ に対し，$x_H = \varphi_H(x)$ のとき，$\varphi(x) = (x_H)_{(H)\in C(G)} \in \widetilde{\Omega}(G)$ と書く．$\theta \in \Omega(G)$ と $(K) \in C(H)$ に対し，Res^G_H の定義は

$$\mathrm{Res}^G_H(\theta)_K = \theta_K \tag{3.2}$$

が成り立つことを示す．

3.2 Fundamental theorem

$\mathcal{D}$ を G の部分群の collection とする．$\mathcal{D}$ は共通部分をとる操作で閉じていて G を含むことを仮定する．このとき，$[G/D]$，ただし，$D\in\mathcal{D}$，で生成される $\Omega(G)$ の部分加群 $\Omega(G,\mathcal{D})$ は，部分環になる．$\Omega(G,\mathcal{D})$ を G の $\mathcal{D}$ に関する，部分バーンサイド環（PBR）と呼ぶ．ここで，$\mathcal{D}$ に関する PBR $\Omega(G,\mathcal{D})$ の基本定理と $\mathbb{Q}\Omega(G,\mathcal{D})$ の原始べき等元公式を準備する．[Yo90b, Section 2] により，任意の $(K)\in C(\mathcal{D})$ に対し，

$$\varphi_H : [G/K] \mapsto |\mathrm{inv}_H(G/K)|, (H)\in C(\mathcal{D})$$

で与えられる写像

$$\varphi^{\mathcal{D}} = (\varphi_H)_{(H)\in C(\mathcal{D})} : \Omega(G,\mathcal{D}) \to \widetilde{\Omega}(G,\mathcal{D}) := \prod_{(H)\in C(\mathcal{D})} \mathbb{Z}$$

は，単射環準同型である．

Lemma 3.1. *[Yo90b, Example 3.15] $\mathcal{D}$ が，共通部分をとる操作で閉じていて G を含む G の collection であるならば，$\Omega(G,\mathcal{D})$ は，PBR である．*

部分群 $H\in\mathcal{D}$ に対し，$\mathbb{Q}\Omega(G,\mathcal{D})$ の原始的べき等元

$$\varphi_K(e_H^{\mathcal{D}}) = \begin{cases} 1 & (H)=(K), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

ただし $(K)\in C(\mathcal{D})$，を $e_H^{\mathcal{D}}$ と書く．以下のように原始的べき等元 $e_H^{\mathcal{D}}$ の公式を得る．

Lemma 3.2. *[Yo90b, Theorem 4.2] Let $\mathcal{D}$ be a collection of subgroups of G. Assume that $\mathcal{D}$ is closed under taking intersection and $\mathcal{D}$ contains G. Let $e_H^{\mathcal{D}}$ be a primitive idempotent of $\mathbb{Q}\Omega(G,\mathcal{D})$ for $H\in\mathcal{D}$. Then*

$$e_H^{\mathcal{D}} = \frac{1}{|N_G(H)|}\sum_{D\in\mathcal{D}} |D|\mu_{\mathcal{D}}(D,H)[G/D]. \tag{3.3}$$

$$\mathrm{Obs}(G,\mathcal{D}) = \prod_{(H)\in C(\mathcal{D})} \mathbb{Z}/|W_G(H)|\mathbb{Z}$$

とおき，部分群 $H\le G$ に対し

$$\overline{H} = \begin{cases} \bigcap_{S\in\mathcal{D}(\ge H)} S & \mathcal{D}(\ge H)\ne\emptyset, \\ G & \mathcal{D}(\ge H)=\emptyset, \end{cases}$$

ただし，$\mathcal{D}(\ge H) = \{D\in\mathcal{D} \mid H\le D\}$ とする．

Theorem 3.3. *[Yo90b, Theorem 3.10] Let $\mathcal{D}$ be a collection of subgroups of G. Assume that $\mathcal{D}$ is closed under taking intersection and $G\in\mathcal{D}$. Then there exists an exact sequence of abelian groups:*

$$0 \to \Omega(G,\mathcal{D}) \xrightarrow{\varphi^{\mathcal{D}}} \widetilde{\Omega}(G,\mathcal{D}) \xrightarrow{\psi^{\mathcal{D}}} \mathrm{Obs}(G,\mathcal{D}) \to 0.$$

where (H)-component of $\psi^{\mathcal{D}}$ is defined by

$$\psi^{\mathcal{D}}(\theta) = \left(\sum_{gD\in W_G(D)} \theta_{\overline{\langle g\rangle D}} \mod |W_G(D)|\right)_{(D)\in C(\mathcal{D})}$$

for any $\theta = (\theta_D)_{(D)\in C(\mathcal{D})} \in \widetilde{\Omega}(G,\mathcal{D})$.

Lemma 3.1 より，Section 4.1 で応用される次の事実が得られる．

Proposition 3.4. *Let $\mathcal{D}$ be a collection of subgroups of G. Assume that $\mathcal{D}$ is closed under taking intersection and $G\in\mathcal{D}$. Let H be a subgroup of G. Write*

$$H\cap\mathcal{D} = \{H\cap D \mid D\in\mathcal{D}\}.$$

Then $\Omega(H, H\cap\mathcal{D})$ is a PBR relative to $H\cap\mathcal{D}$ of H.

3.3 Sign unit

$W = \langle S \rangle$ でコクセター系 (W, S) をもつコクセター群とする．元 $\prod_{x \in S} x \in W$ を W の *Coxeter element* という．W の Coxeter elements 全体は W の一つの共役類をつくる (see [Ca72, Theorem 10.3.1] for instance) ので，共役類 $(c_S) \in c\ell(W)$ で c_S が W の Coxeter element であり $c\ell(W)$ が W のひとつの共役類となるものがただ一つ存在する．任意の元 $s \in S$ に対し，$\varepsilon(s) = -1$ で定まる群準同型 $W \to \mathbb{R}^\times$ を ε で表す．本稿では，それを W の *signature* と呼ぶ．

Lemma 3.5. *Let (W, S) be a Coxeter system. Let P be a parabolic subgroup of W with $(P) = (W_J) \in C(\mathcal{P})$, where $J \subset S$. Then P includes an element σ_P with $(\sigma_P) = (c_J) \in c\ell(W)$, where c_J is a Coxeter element of the standard parabolic subgroup W_J. In particular, $\varepsilon(\sigma_P) = \varepsilon(c_J) = (-1)^{|J|}$.*

Proof. Since there exists an element $w \in W$ such that $P = {}^wW_J$ by assumption, the fact $(\sigma_P) = (c_J)$ is obtained by putting $\sigma_P = wc_Jw^{-1}$, where c_J is a Coxeter element of W_J. The definition of a Coxeter element shows the last equation. □

$\mathcal{P}$ で W のすべての parabolic subgroups の collection とする．任意の $H \leq W$ に対し，H を含むすべての parabolic subgroups の共通部分として定まる parabolic subgroup を P_H とする．Lemma 3.5 により，W の任意の parabolic subgroup P で $(P) = (W_J)$ を満たすものは $P = P_{\langle \sigma_P \rangle}$ であり $(\sigma_P) = (c_J)$ を満たすような元 σ_P を含む．

$$\gamma = \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|}[W/W_J] \in \Omega(W, \mathcal{P}).$$

とおく．元 γ は，また，$\Omega(W)$ に含まれる．

Lemma 3.6. *Let $\varphi^{\mathcal{P}}$ be the mark homomorphism of $\Omega(W, \mathcal{P})$ and let ε be the signature of W. If $\varphi^{\mathcal{P}}(\gamma) = (\gamma_H)_{(H) \in C(W)}$, then $\gamma_H = \gamma_{P_H}$ for all $(H) \in C(W)$, and $\gamma_P = \varepsilon(\sigma_P)$ for all $(P) \in C(\mathcal{P})$, where σ_P is a W-conjugate for some Coxeter element of P.*

Proof. If H is a subgroup of W, then by the definition of P_H,

$$\mathrm{inv}_{P_H}(W/W_J) = \{\sigma W_J \mid P_H \leq {}^\sigma W_J\} = \{\sigma W_J \mid H \leq {}^\sigma W_J\} = \mathrm{inv}_H(W/W_J)$$

for all $J \subset S$. Hence we have that $\gamma_H = \gamma_{P_H}$ for all $(H) \in C(W)$. Since $P = P_{\langle \sigma_P \rangle}$ for $P \in \mathcal{P}$, we have $\mathrm{inv}_P(W/W_J) = \mathrm{inv}_{\langle \sigma_P \rangle}(W/W_J)$ for all $J \subset S$. By [So66, Theorem 2], we obtain that for each $P \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma_P) &= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|}\pi_J(\sigma_P) \\
&= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|}\varphi_{\langle \sigma_P \rangle}([W/W_J]) \\
&= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|}\varphi_P([W/W_J]) \\
&= \varphi_P\left(\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|}[W/W_J]\right) \\
&= \gamma_P.
\end{aligned}$$

□

3.4 The tom-Dieck homomorphism

$R_{\mathbb{R}}(G)$ で G の実表現全体の環，$\Omega(G)^\times$ で $\Omega(G)$ の単元群とする．$\varphi(x) = (x_H)_{(H) \in C(G)}$ を満たす任意の $x \in \Omega(G)$ に対し，$x = \varphi^{-1}((x_H)_{(H) \in C(G)})$ と書く．[Di79, Proposition 5.5.9] により，群準同型 $u_G : R_{\mathbb{R}}(G) \to \Omega(G)^\times$ で任意の $\mathbb{R}G$-module V に対し

$$V \mapsto \varphi^{-1}\left(((-1)^{\dim V^H})_{(H) \in C(G)} \right)$$

ただし，V^H は V の H-invariants，が存在する．

$H \leq G$ とする．有限生成左 $\mathbb{C}G$ 加群 V が G の $\mathbb{C}$ 指標 χ を与えるとする．任意の $H \leq G$ に対し，V^H は $\mathbb{C}W_G(H)$ 加群と見なすことができる．V^H の次元 $\dim V^H$ は，内積 $\langle \chi|_H, 1_H\rangle_H$ に等しい．

$\overline{R}_{\mathbb{R}}(G)$ で，G の実数値をもつ $\mathbb{C}$ 指標全体の環とする．このとき，以前の議論と [Yo90a, Theorem A] から $u_G : R_{\mathbb{R}}(G) \to \Omega(G)^\times$ は，

$$\chi \mapsto \varphi^{-1}\big(\ ((-1)^{\langle \chi|_H, 1_H\rangle_H})_{(H)\in C(G)}\ \big)$$

により与えられる群準同型 $\overline{u}_G : \overline{R}_{\mathbb{R}}(G) \to \Omega(G)^\times$ に拡張できる．この準同型は，*tom Dieck homomorphism* と呼ばれている．本稿では，Mackey functor の定義はしないが，これらの準同型は $\overline{R}_{\mathbb{R}}$ から $\Omega^\times$ への G の Mackey functor としての射を与えていることに注意する (see [Yo90a, Lemma 3.5])．

$\overline{\ell}_G$ で，$[G/H] \mapsto \chi_{\mathbb{C}[G/H]}$ で定まる線形化写像 $\Omega(G) \to \overline{R}_{\mathbb{R}}(G)$ とする．置換指標なので，$\chi_{\mathbb{C}[G/H]}$ は，実数値 $\mathbb{C}$ 指標である．

Definition 3.7. [Yo90a, Lemma 3.6][Ba10, p. 356] An *exponential map* $\exp_G : \Omega(G) \to \Omega(G)^\times$ is the composition

$$\overline{u}_G \circ \overline{\ell}_G : \Omega(G) \to \overline{R}_{\mathbb{R}}(G) \to \Omega(G)^\times$$

of the linearlization map and the tom-Dieck homomorphism.

$\overline{u}_G$ は群準同型であり (see [Yo90a, p. 32] for instance) $\overline{\ell}_G$ は環準同型であるので $\exp_G$ は群準同型である．定義より，$\exp_G(0) = 1$ と $\exp_G(1) = -1$ が成り立つことがわかる．

Jnd_H^G で，

$$\mathrm{Jnd}_H^G(y) = \varphi^{-1}\left(\Big(\prod_{HgK\in H\backslash G/K} y_{H\cap {}^gK}\Big)_{(K)\in C(H)}\right)$$

で定義される乗法的写像 $\Omega(H) \to \Omega(G)$ とする ([Yo90a, p.40], [Ya05, p.111])．以下のように，tom Dieck homomorphisms と exponential maps は，バーンサイド環の単元群の研究に有用であることを復習する．

Theorem 3.8. *[Yo90a, Lemma 3.5, 3.6] Let H be a subgroup of G. Then the diagrams*

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega(G) & \xrightarrow{\overline{\ell}_G} & \overline{R}_{\mathbb{R}}(G) & \xrightarrow{\overline{u}_G} & \Omega(G)^\times \\
{\scriptstyle \mathrm{Res}_H^G}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{res}_H^G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_H^G} \\
\Omega(H) & \xrightarrow{\overline{\ell}_H} & \overline{R}_{\mathbb{R}}(H) & \xrightarrow{\overline{u}_H} & \Omega(H)^\times,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega(G) & \xrightarrow{\overline{\ell}_G} & \overline{R}_{\mathbb{R}}(G) & \xrightarrow{\overline{u}_G} & \Omega(G)^\times \\
{\scriptstyle \mathrm{Ind}_H^G}\uparrow & & {\scriptstyle \mathrm{ind}_H^G}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Jnd}_H^G} \\
\Omega(H) & \xrightarrow{\overline{\ell}_H} & \overline{R}_{\mathbb{R}}(H) & \xrightarrow{\overline{u}_H} & \Omega(H)^\times
\end{array}$$

are commutative.

3.5 The reduced Lefschetz invariant of a G-poset

順序関係 $\leq$ が与えられた有限左 G 集合は，G の作用で $\leq$ が不変であるとき，G-poset と呼ばれる．P を G-poset，$Sd_i(P)$ を P の元からなる基数 $i+1$ の鎖 $x_0 < x_1 < \cdots < x_i$ 全体の集合とする．$\Omega(G)$ は，有限左 G 集合の圏の Grothendieck group であり，有限左 G 集合 X の同型類 $[X]$ で生成されるアーベル群であった．P の *Lefschetz invariant* は，

$$\Lambda_P = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i[Sd_i(P)] \in \Omega(G),$$

P の *reduced Lefschetz invariant* $\widetilde{\Lambda}_P$ は $\widetilde{\Lambda}_P = \Lambda_P - 1$ (cf. [Di79] for instance) で定義されるものとする．

4 Units of PBR

n を正整数とする．部分集合 $\Lambda \subseteq [n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し，$S(\Lambda)$ (resp. $A(\Lambda)$) で Λ 上の対称群 (resp. 交代群) とする．$S_n := S([n])$，$A_n := A([n])$ とおく．$\Lambda = \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq [n]$ のとき，$S(i_1, \ldots, i_m)$ (resp. $A(i_1, \ldots, i_m)$) を $S(\Lambda)$ (resp. $A(\Lambda)$) と書く．$E = \{e\}$ を S_n の自明な部分群とする．

この節では，A_n の部分群の collection $\mathfrak{A}_n$ を導入し，$\mathfrak{A}_n$ の性質を述べる．次の Section 5 で，$\mathfrak{A}_n$ に関する単元群 $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$ を扱う．

4.1 Young subgroups and a collection $\mathfrak{A}_n$

$[n]$ の分割 π とは，集合 $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$，ただし，$\pi_i$ は空でない部分集合 $\pi_i \subseteq [n]$ で $\pi = \pi_1 \cup \cdots \cup \pi_k$ と $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$ を任意の $1 \leq i \neq j \leq k$ に対し満たすものである．π の型 $t(\pi)$ とは，$[n]$ の分割 $(1^{e_1} 2^{e_2} \cdots n^{e_n})$，ただし，$n = \sum_{i=1}^{k} |\pi_i|$ を満たすものである．S_n の部分群 $Y(\pi) := S(\pi_1) \times \cdots \times S(\pi_k)$ は，π に対応する Young 部分群と呼ばれる．$\mathfrak{Y}_n$ は，S_n のすべての Young 部分群の collection，また，A_n の部分群の collection を

$$\mathfrak{A}_n := \mathfrak{Y}_n \cap A_n = \{Y \cap A_n \mid Y \in \mathfrak{Y}_n\}$$

で定める．$\mathfrak{Y}_n$ は共通部分をとる操作で閉じていて $S_n \in \mathfrak{Y}_n$ を満たすことを注する．したがって Proposition 3.4 により，$\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$ は，A_n の $\mathfrak{A}_n$ に関する PBR になる．

Remark 1. Let π be a partition of $[n]$.

1. $Y(\pi) = E$ if and only if $t(\pi) = (1^n)$.
2. $Y(\pi) \cap A_n = E$ if and only if $t(\pi) = (1^n)$ or $t(\pi) = (1^{n-2}2^1)$.
3. For any $g \in S_n$, set $g(\pi) := \{g(\pi_1), \ldots, g(\pi_k)\}$. Then $g(\pi)$ is a partition of $[n]$, and $Y(g(\pi)) = {}^gY(\pi)$ holds.

4.2 Subgroups in $\mathfrak{A}_n$

はじめに，[Su82, (4.19)] から，直積群 $H \times K$ の部分群 U の構造について復習する．pr_H と pr_K を $H \times K$ の対応する射影，さらに，H_1，K_1 を

$$H_1 := U \cap H \trianglelefteq \mathrm{pr}_H(U) \leq H,$$
$$K_1 := U \cap K \trianglelefteq \mathrm{pr}_K(U) \leq K$$

とする．このとき，任意の $u \in U$ に対し，$\mathrm{pr}_H(u)H_1 \mapsto \mathrm{pr}_K(u)K_1$ で定義される群同型 $\varphi_U : \mathrm{pr}_H(U)/H_1 \longrightarrow \mathrm{pr}_K(U)/K_1$ を得る．また，U は，φ_U を通した $\mathrm{pr}_H(U)$ と $\mathrm{pr}_K(U)$ の引き戻し

$$\mathrm{pr}_H(U) \times^{\varphi_U} \mathrm{pr}_K(U) := \{(h, k) \in \mathrm{pr}_H(U) \times \mathrm{pr}_K(U) \mid \varphi_U(hH_1) = kK_1\}$$

として与えられる．

この事実を我々の Young subgroups の場合に適用する．$Y = Y(\pi) \in \mathfrak{Y}_n$，ただし，$\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ とする．$Y \neq S_n$ と $Y \neq E$，すなわち，$k \geq 2$ と $t(\pi) \neq (1^n)$ を仮定する．共通部分 $Y \cap A_n$ の構造が，以下のようになることがわかる．

(1) Suppose that $|\pi_1| \geq 2$ and $|\pi_i| = 1$ for all $2 \leq i \leq k$. Then, clearly $Y \cap A_n = A(\pi_1)$.

(2) Suppose that $|\pi_1| \geq 2$ and $|\pi_k| \geq 2$. Then by setting $H := S(\pi_1) \times \cdots \times S(\pi_{k-1}) \neq E$ and $K := S(\pi_k) \neq E$, we have that $Y = H \times K$ and

$$U := Y \cap A_n = (H \times K) \cap A_n \leq H \times K.$$

Note that $\mathrm{pr}_H(U) = H$ and $\mathrm{pr}_K(U) = K$ because of $S(\pi_1) \neq E$ and $S(\pi_k) \neq E$. Put

$$H_1 := U \cap H = H \cap A_n = (S(\pi_1) \times \cdots \times S(\pi_{k-1})) \cap A([n] \setminus \pi_k),$$
$$K_1 := U \cap K = K \cap A_n = S(\pi_k) \cap A_n = A(\pi_k).$$

Then we have a group isomorphism $\varphi_U : H/H_1 \longrightarrow K/K_1 \cong C_2$, and the pullback $U = \{(h,k) \in H \times K \mid \varphi_U(hH_1) = kK_1\}$. In particular, identifying two transpositions $(\alpha,\beta) \in S(\pi_1) \leq H$ and $(\gamma,\delta) \in S(\pi_k) \leq K$, we obtain that

$$\begin{aligned} Y \cap A_n = U &= \langle H_1, K_1, (\alpha,\beta)(\gamma,\delta)\rangle \\ &= \Big(\big(\ (S(\pi_1) \times \cdots \times S(\pi_{k-1})) \cap A([n] \setminus \pi_k)\ \big) \times A(\pi_k)\Big) \rtimes \langle(\alpha,\beta)(\gamma,\delta)\rangle. \end{aligned}$$

上のように明らかになった U の構造は collection $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{Y}_n \cap A_n$ が，$m < n$ をみたすより小さな collection $\mathfrak{A}_m$ から機能的に決定されることを示している．

4.3 Conjugacy classes of $\mathfrak{A}_n$

$[n]$ のふたつの分割 π，π' の順序 $\pi' \leq \pi$ は，π' が，π の細分であるとき，すなわち，任意の $\pi_i \in \pi$ が，いくつかの π' の和集合であるときとして定義される．有限群 G の二つの部分群 H，K に対し，H が K と G-共役であるとき，$H \sim_G K$ と書く．

Lemma 4.1. *Let $\pi' = \{\pi'_1,\ldots,\pi'_\ell\}$ and $\pi = \{\pi_1,\ldots,\pi_k\}$ be partitions of $[n]$. Suppose that $t(\pi') \neq (1^{n-2}2^1)$. Then $Y(\pi') \cap A_n \leq Y(\pi) \cap A_n$ implies $\pi' \leq \pi$. The converse implication always holds without any assumption.*

Proof. Assume that $\pi' \not\leq \pi$. Then there exist $\pi_i \in \pi$ and $\pi'_j \in \pi'$ such that $\pi_i \cap \pi'_j \neq \emptyset$ and $\pi'_j \not\subseteq \pi_i$. Take $\alpha \in \pi_i \cap \pi'_j$ and $\beta \in \pi'_j \setminus \pi_i$, so that, $\alpha \neq \beta$ and $|\pi'_j| \geq 2$

Suppose that $|\pi'_j| \geq 3$. Then $S(\pi'_j)$ contains a 3-cycle $\sigma := (\alpha,\beta,\gamma)$, and $\sigma \in Y(\pi') \cap A_n$. But since $\beta = \sigma(\alpha) \in \sigma(\pi_i)$ and $\beta \notin \pi_i$, we have that $\sigma(\pi_i) \neq \pi_i$ and $\sigma \notin Y(\pi) \cap A_n$. Thus $Y(\pi') \cap A_n \not\leq Y(\pi) \cap A_n$.

Suppose next that $|\pi'_j| = 2$. By our assumption $t(\pi') \neq (1^{n-2}2^1)$, there exists $\pi'_t \in \pi$ such that $\pi'_t \neq \pi'_j$ and $|\pi'_t| \geq 2$. Take transpositions $(\alpha,\beta) \in S(\pi'_j)$ and $(\gamma,\delta) \in S(\pi'_t)$. Then $\sigma := (\alpha,\beta)(\gamma,\delta) \in Y(\pi') \cap A_n)$. But since $\sigma(\pi_i) \neq \pi_i$ by the same way as above, we obtain that $Y(\pi') \cap A_n \not\leq Y(\pi) \cap A_n$. The proof is complete. □

Lemma 4.2. *Let π' and π be partitions of $[n]$ whose types are not $(1^{n-2}2^1)$. Then the followings are equivalent.*

1. *$Y(\pi') \sim_{S_n} Y(\pi)$.*
2. *$Y(\pi') \sim_{A_n} Y(\pi)$.*
3. *$Y(\pi') \cap A_n \sim_{A_n} Y(\pi) \cap A_n$.*

Proof. Let $\pi' = \{\pi'_1,\ldots,\pi'_\ell\}$. We may assume that $t(\pi') \neq (1^n)$ and $|\pi'_1| \geq 2$. First we note that $Y(\pi') \sim_{S_n} Y(\pi)$ implies $Y(\pi') \sim_{A_n} Y(\pi)$ since $S_n = A_n \rtimes \langle(\alpha,\beta)\rangle$ where $\alpha,\beta \in \pi'_1$. Thus it is enough to show that (3) $\Rightarrow$ (2).

Suppose that $Y(\pi') \cap A_n \sim_{A_n} Y(\pi) \cap A_n$. Then, for some $a \in A_n$, $Y(\pi') \cap A_n = {}^a(Y(\pi) \cap A_n) = Y(a(\pi)) \cap A_n$. By Lemma 4.1, $\pi' = a(\pi)$ and $Y(\pi') = Y(a(\pi)) = {}^aY(\pi)$. The proof is complete. □

ふたつの Young subgroups $Y(\pi')$ と $Y(\pi)$ が S_n-共役であることと $t(\pi') = t(\pi)$ が成り立つことが同値であることを注意する．以下は，Remark 1，2 そして Lemma 4.2 の帰結である．

Proposition 4.3. $|C(\mathfrak{A}_n)| = |C(\mathfrak{Y}_n)| - 1$ *where $|C(\mathfrak{Y}_n)|$ is given by the number of all partitions of n.*

4.4 Some Lemmas on subgroups in $\mathfrak{A}_n$

以下で，Section 5 で用いられる二つの補題を準備する．

Lemma 4.4. *Let n be an integer with $n \geq 5$ $(n-2 \geq 3)$. Put*

$$\begin{aligned} H &:= \big(S(1,2,\ldots,n-2) \times S(n-1,n)\big) \cap A_n \in \mathfrak{A}_n, \\ K &:= A(1,2,\ldots,n-2) \leq H,\ \ K \in \mathfrak{A}_n. \end{aligned}$$

Then we have the following.

1. $H \cong S_{n-2}$ and $N_{A_n}(H) = H$.
2. $K \cong A_{n-2}$ and $N_{A_n}(K)/K \cong S_2$.

Proof. Set $\Lambda := \{1, 2, \ldots, n-2\}$. Then $H = (S(\Lambda) \times S(n-1, n)) \cap A_n$ and $K = A(\Lambda)$. According to Section 4.2, a subgroup H can be expressed as

$$\begin{aligned} H &= \big(A(\Lambda) \times E\big) \rtimes \langle (1,2)(n-1,n) \rangle \\ &= A(\Lambda) \rtimes \langle (1,2)(n-1,n) \rangle \cong S_{n-2}. \end{aligned}$$

From this structure of H, it is clear that $N_{S_n}(H) = S(\Lambda) \times S(n-1, n)$. Thus $N_{A_n}(H) = N_{S_n}(H) \cap A_n = (S(\Lambda) \times S(n-1,n)) \cap A_n = H$. On the other hand, since $N_{S_n}(K) = S(\Lambda) \times S(n-1, n)$, we have that

$$N_{A_n}(K) = N_{S_n}(K) \cap A_n = H = K \rtimes \langle (1,2)(n-1,n) \rangle.$$

Thus $N_{A_n}(K)/K \cong \langle (1,2)(n-1,n) \rangle \cong S_2$. The proof is complete. □

Lemma 4.5. *Let n be an integer with $n \geq 6$ $(n-3 \geq 3)$. Put*

$$\begin{aligned} &H := \big(S(1, 2, \ldots, n-3) \times S(n-2, n-1)\big) \cap A_n \in \mathfrak{A}_n, \\ &K := A(1, 2, \ldots, n-3) \leq H, \ K \in \mathfrak{A}_n. \end{aligned}$$

Then we have the following.

1. $H \cong S_{n-3}$ and $N_{A_n}(H) = H$.
2. $K \cong A_{n-3}$ and $N_{A_n}(K)/K \cong S_3$.

Proof. Set $\Delta := \{1, 2, \ldots, n-3\}$. Then $H = (S(\Delta) \times S(n-2, n-1)) \cap A_n$ and $K = A(\Delta)$. By using the similar argument as in the proof of Lemma 4.4, we have that

$$\begin{aligned} H &= \big(A(\Delta) \times E\big) \rtimes \langle (1,2)(n-2,n-1) \rangle \\ &= A(\Delta) \rtimes \langle (1,2)(n-2,n-1) \rangle \cong S_{n-3}, \\ N_{S_n}(H) &= S(\Delta) \times S(n-2, n-1), \\ N_{A_n}(H) &= N_{S_n}(H) \cap A_n = (S(\Delta) \times S(n-2, n-1)) \cap A_n = H. \end{aligned}$$

On the other hand, $N_{S_n}(K) = S(\Delta) \times S(n-2, n-1, n)$. According to Section 4.2, we have that

$$\begin{aligned} N_{A_n}(K) &= N_{S_n}(K) \cap A_n \\ &= (A(\Delta) \times A(n-2, n-1, n)) \rtimes \langle (1,2)(n-2,n-1) \rangle \\ &= A(\Delta) \rtimes \langle (n-2, n-1, n), (1,2)(n-2, n-1) \rangle \\ &\cong A(\Delta) \rtimes S_3 = K \rtimes S_3 \end{aligned}$$

Thus $N_{A_n}(K)/K \cong S_3$. The proof is complete. □

5 Units of $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$

この節では，A_n の $\mathfrak{A}_n$ に関する単元群 $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$ の部分群を究明する．

5.1 Subgroup of rank 2

この部分節では，単元群 $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$ の基本可換群としての階数が 2 である部分群 T を構成する．ε_n を，S_n の符号とする．

Lemma 5.1. *[IO15, Corollary 5.2] Let $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ be a PBR relative to the Young subgroups $\mathfrak{Y}_n$ of S_n for $n \geq 2$ and*

$$\alpha = \sum_{(Y) \in C(\mathfrak{Y}_n)} \frac{1}{|W_{S_n}(Y)|} \left(\sum_{H \in \mathfrak{Y}_n} \mu_{\mathfrak{Y}_n}(Y, H) \varepsilon_n(H) \right) [S_n/Y],$$

where $\varepsilon_n(H)$ is the value $\varepsilon_n(g_H)$ and g_H is a representative of conjugacy class $(g_H) \in c\ell(S_n)$ which corresponds to the conjugacy class $(H) \in C(S_n)$. Then

$$\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)^{\times} = \langle -1, \alpha \rangle.$$

$$\nu := \mathrm{Res}^{S_n}_{A_n}(\alpha)$$

とおく．このとき Eq. (3.1) と A_n の collection $\mathfrak{A}_n$ の定義により，$\nu \in \Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^{\times}$ が成り立つ．$T = \langle -1, \nu \rangle$ とおく．

Proposition 5.3 を証明するため，以下の Lemma 5.2 が必要である．$H \leq S_n$ に対し，Young subgroup Y_H を，H を含むすべての Young subgrous の共通部分として定義する．S_n の任意の分割 $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_r\}$ に対応する Young subgroup$Y$ は，a product σ_Y of pairwise disjoint $|\pi_i|$-cycles for $i = 1, 2, \ldots, r$ satisfying $Y = Y_{\langle \sigma_Y \rangle}$.

Lemma 5.2. *[OTY16, Lemma 3.1] If $\varphi(\alpha) = (\alpha_H)_{(H)\in C(S_n)}$, then $\alpha_H = \alpha_{Y_H}$ for all $(H) \in C(S_n)$, and $\alpha_Y = \varepsilon_n(\sigma_Y)$ for all $(Y) \in C(\mathfrak{Y}_n)$.*

Proposition 5.3. *Let T be the subgroup of $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^{\times}$ defined above. Then T is an elementary abelian 2-group of rank 2.*

Proof. It is suffices to show that $\nu \neq \pm 1$. Since $Y_{A_k} = S_k$ for $k = n-1, n$,

$$\varphi_{A_k}(\alpha) = \alpha_{A_k} = \alpha_{Y_{A_k}} = \alpha_{S_k} = \varepsilon_k(\sigma_{S_k})$$

by Lemma 5.2. Trivially, $\varepsilon_{n-1}(\sigma_{S_{n-1}}) \neq \varepsilon_n(\sigma_{S_n})$, we have

$$\varphi_{A_{n-1}}(\mathrm{Res}^{S_n}_{A_n}(\alpha)) = \varphi_{A_{n-1}}(\alpha) \neq \varphi_{A_n}(\alpha) = \varphi_{A_n}(\mathrm{Res}^{S_n}_{A_n}(\alpha))$$

by Eq.(3.2). This shows $\mathrm{Res}^{S_n}_{A_n}(\alpha) \neq \pm 1$ and completes the proof. □

5.2 Some expressions of ν

この節では，Section 5.1 で現れる単元 $\nu := \mathrm{Res}^{S_n}_{A_n}(\alpha) \in \Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^{\times}$ のいくつかの表現方法について検討する．

5.2.1 Parabolic expression

任意の $1 \leq i \leq n-1$ に対し，$s_i := (i, i+1) \in S_n$，$S := \{s_1, \ldots, s_{n-1}\} \subseteq S_n$ とする．$W := S_n$ は Coxeter system(W, S) をもつ A_{n-1} 型の有限 Coxeter group である．任意の部分集合 $J \subseteq S$ に対し，J で生成された部分群 $W_J := \langle J \rangle$ を standard parabolic subgroup of W と呼ぶ．より一般的に，W の部分群は，ある $J \subseteq S$ に対し W_J と W 共役であるとき，parabolic subgroup という．W_J は，S_n の Young subgroup であり，$\mathfrak{Y}_n$ とすべての parabolic subgroups of W は等しいことを注意する．Coxeter systems の言葉を用いると，以下の結果が Lemmas 3.5 and 3.6 から得られる．

Proposition 5.4. *Let G be a finite Coxeter group with Coxeter system (G, Σ), and let γ be an element*

$$\sum_{J \subseteq \Sigma} (-1)^{|J|} [G/G_J]$$

of the PBR $\Omega(G, \mathcal{P})$ relative to $\mathcal{P}$ of G where G_J is a standard parabolic subgroup corresponding to J, and $\mathcal{P}$ is the set of all parabolic subgroups of G. Then γ is a non-identity unit of $\Omega(G, \mathcal{P})$.

$W := S_n$ のとき，上の結果を Coxeter system (W, S) に応用すると，$\alpha' := \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} [S_n/W_J]$ が，$\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の非自明な単元であることがわかる．ところが，Lemma 5.1 より $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)^{\times} = \langle -1, \alpha \rangle \cong C_2 \times C_2$ なので，二つを比較して $\alpha = \alpha'$ を得る．

$\nu := \mathrm{Res}^{S_n}_{A_n}(\alpha) \in \Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^{\times}$ であったので，α は $\sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} [S_n/W_J] \in \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)^{\times}$ のように表される．

$$W_J \backslash S_n / A_n = \begin{cases} \{W_J e A_n\} & J \neq \emptyset, \\ \{W_J e A_n,\ W_J (1,2) A_n\} & J = \emptyset \end{cases}$$

が成り立つ.

Mackey decomposition formula を応用して，α と同様に，ν の，S_n の parabolic subgroups を用いた表現を得る.

$$\begin{aligned}\nu = \operatorname{Res}^{S_n}_{A_n}(\alpha) &= \sum_{J\subseteq S}(-1)^{|J|}\operatorname{Res}^{S_n}_{A_n}([S_n/W_J])\\ &= \sum_{J\subseteq S}(-1)^{|J|}\Big(\sum_{W_JtA_n\in W_J\backslash S_n/A_n}[A_n/{}^tW_J\cap A_n]\Big)\\ &= [A_n/E]+[A_n/E]+\sum_{\emptyset\neq J\subseteq S}(-1)^{|J|}[A_n/W_J\cap A_n]\\ &= [A_n/E]+\sum_{J\subseteq S}(-1)^{|J|}[A_n/W_J\cap A_n]\in \Omega(A_n,\mathfrak{A}_n).\end{aligned}$$

5.2.2 Exponential expression

Proposition 5.6 を証明する以下の補題を思い出すことにする.

Lemma 5.5. *[OTY16, Corollary 4.3] Let α be the unit of Lemma 5.1. Then α is an image of the tom-Dieck homomorphism.*

Proposition 5.6. *Let ν be the unit $\operatorname{Res}^{S_n}_{A_n}(\alpha)$. Then ν is an image of the tom-Dieck homomorphism.*

Proof. Theorem 3.8 and Lemma 5.5 show the proposition. □

α を与える $\overline{R}_{\mathbb{R}}(A_n)$ の元を決定できる.

Proposition 5.7. *Let ν be the unit $\operatorname{Res}^{S_n}_{A_n}(\alpha)$. Then*

$$\nu = (-1)^n\operatorname{Jnd}^{A_n}_{A_n\cap S_{n-1}}(-1) = \exp_{A_n}(n[A_n/A_n]+[A_n/A_n\cap S_{n-1}]).$$

In particular, ν is an image of the exponential map $\exp_{A_n}$.

Proof. We have

$$\alpha = (-1)^n\overline{u}_{S_n}(p_{[n]})$$

by [OTY16, p.374], where $p_{[n]}$ is a permutation character obtained by the S_n-set $[n]$. Since it is easy to see that $[n]$ is isomorphic to S_n/S_{n-1} and $\operatorname{Ind}^{S_n}_{S_{n-1}}(1)\cong S_n/S_{n-1}$ as S_n-sets, we have

$$\alpha = (-1)^n\overline{u}_{S_n}(\overline{\ell}(S_n/S_{n-1})) = (-1)^n\exp_{S_n}(\operatorname{Ind}^{S_n}_{S_{n-1}}(1)).$$

Theorem 3.8 and Mackey decomposition [Yo90a, Lemma 3.1] show

$$\begin{aligned}\nu &= \operatorname{Res}^{S_n}_{A_n}(\alpha)\\ &= \operatorname{Res}^{S_n}_{A_n}((-1)^n)\operatorname{Res}^{S_n}_{A_n}(\operatorname{Jnd}^{S_n}_{A_n}(\exp_{A_n}(1)))\\ &= (-1)^n(\operatorname{Res}^{S_n}_{A_n}\circ\operatorname{Jnd}^{S_n}_{A_n})(-1)\\ &= (-1)^n\prod_{A_ngS_{n-1}\in A_n\backslash S_n/S_{n-1}}\operatorname{Jnd}^{A_n}_{A_n\cap {}^gS_{n-1}}\circ\operatorname{Res}^{{}^gS_{n-1}}_{A_n\cap {}^gS_{n-1}}\circ c^{S_{n-1}}_g(-1)\\ &= (-1)^n\operatorname{Jnd}^{A_n}_{A_n\cap S_{n-1}}(-1)\\ &= \exp_{A_n}(1)^n\operatorname{Jnd}^{A_n}_{A_n\cap S_{n-1}}(\exp_{A_n\cap S_{n-1}}(1))\\ &= \exp_{A_n}(n[A_n/A_n])\exp_{A_n}(\operatorname{Ind}^{A_n}_{A_n\cap S_{n-1}}(1))\\ &= \exp_{A_n}(n[A_n/A_n]+[A_n/A_n\cap S_{n-1}]).\end{aligned}$$

□

本質的には [Th87, Proposition 5.1] で証明された，以下の結果を思い出すことにする.

Lemma 5.8. *[OTY16, Proposition 4.1] Let X be a finite G-set. The reduced Lefschetz invariant $\widetilde{\Lambda}_{P(X)}$, where $P(X)$ is the poset which consisted of nonempty and proper subsets of X, is the image of $\exp_G$, more precisely,*

$$\widetilde{\Lambda}_{P(X)} = \exp_G([X]).$$

Corollary 5.9. *Let ν be the unit $\mathrm{Res}^{S_n}_{A_n}(\alpha)$. Let X be an A_n-set $n(A_n/A_n) \cup A_n/A_n \cap S_{n-1}$. Then*

$$\nu = \widetilde{\Lambda}_{P(X)} = \exp_G([X]).$$

Proof. This follows from Proposition 5.7 and Lemma 5.8. □

5.3 Subgroup of rank 3

この節では，一般バーンサイド環の理論を応用して，$\pm(2i-1) \notin T = \langle -1, \nu \rangle$ を満たす $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$ の単元に対応する原始的べき等元 i を構成する．これらの単元が $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$ の部分群 U を形成する．

Lemma 5.10. *Let n be a positive integer with $n \geq 5$. Then there is a unique subgroup H of $\mathfrak{A}_n$ up to conjugation in A_n such that*

1. *H is a self-normalizing subgroup of A_n,*
2. *H is isomorphic to a symmetric group S_k, where*
$$k = \begin{cases} n-2, & \text{if } n \text{ is odd,} \\ n-3, & \text{if } n \text{ is even,} \end{cases}$$
3. *H contains a subgroup $K \in \mathfrak{A}_n$ of index 2 with*
$$W_{A_n}(K) \cong \begin{cases} S_2, & \text{if } n \text{ is odd,} \\ S_3, & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

Proof. If n is an odd, then we have a subgroup $H \in \mathfrak{A}_n$ which satisfies all conditions of the lemma by Lemma 4.4. If n is even, then we have also a subgroup $H \in \mathfrak{A}_n$ which satisfies all conditions of the lemma by Lemma 4.5. □

Lemma 5.11. *Let H and K be subgroups in $\mathfrak{A}_n$ for $n \geq 5$ satisfying conditions of Lemma 5.10. If $(D) \in C(\mathfrak{A}_n)$, then there exists $gD \in W_{A_n}(D)$ such that $(\overline{\langle g \rangle D}) = (H)$ if and only if $(D) = (K)$ or (H).*

Proof. If $(D) = (H)$, then $(\overline{\langle g \rangle D}) = (H)$ by Lemma 5.10.1 clearly. If $(D) = (K)$, then there exists $g \in N_{A_n}(K)$ such that $gK \in W_{A_n}(K)$ has order 2 by Lemma 5.10.3. Then $\langle g \rangle D \cong H$. Since $\overline{\langle g \rangle D} = \langle g \rangle D$, we have $(\overline{\langle g \rangle D}) = (H)$.

On the other hand, we suppose that $gD \in W_{A_n}(D)$ satisfies $(\overline{\langle g \rangle D}) = (H)$. If $\langle g \rangle D \in \mathfrak{A}_n$, then we have $(\langle g \rangle D) = (H)$ because $\overline{\langle g \rangle D} = \langle g \rangle D$. The structure of H yields $D \cong A_k$ or S_k, so $(D) = (K)$ or (H). If $\langle g \rangle D \notin \mathfrak{A}_n$, we have $\langle g \rangle D \subsetneq H$, because

$$\overline{\langle g \rangle D} = \bigcap_{\langle g \rangle D \subseteq T \in \mathfrak{A}_n} T.$$

However, H has a maximal subgroup K with $K \in \mathfrak{A}_n$ by Lemma 5.10.3. This contradicts $(\overline{\langle g \rangle D}) = (H)$. We obtain the fact that $\langle g \rangle D \notin \mathfrak{A}_n$ did not happen. □

$\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$ の単元と $2i \in \Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$ をみたすべき等元 $i \in \mathbb{Q}\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$ との間には，一対一の関係がある．$\mathrm{Idem}(u)$ で，単元 $u \in \Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$ に対応する $\mathbb{Q}\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$ のべき等元，すなわち，

$$\mathrm{Idem}(u) = \frac{1}{2}(u+1)$$

とする．Eq. (3.3) と同様に，部分群 $H \in \mathfrak{A}_n$ に対し，$\mathbb{Q}\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$ の原始的べき等元ですべての $(K) \in C(\mathfrak{A}_n)$ に対し

$$\varphi_K(e_H^{\mathfrak{A}_n}) = \begin{cases} 1 & (H) = (K), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

を満たすものを $e_H^{\mathfrak{A}_n} \in \mathbb{Q}\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$ と書く．このとき，Eq. (3.3) により，原始的べき等元 $e_H^{\mathfrak{A}_n}$ の公式がえられる．

Lemma 5.12. *Let $e_H^{\mathfrak{A}_n}$ be a primitive idempotent of $\mathbb{Q}\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$ for $H \in \mathfrak{A}_n$. Then*

$$e_H^{\mathfrak{A}_n} = \frac{1}{|N_{A_n}(H)|} \sum_{D \in \mathfrak{A}_n} |H| \mu_{\mathfrak{A}_n}(D, H)[A_n/D].$$

Theorem 5.13. *Let H be a subgroup in $\mathfrak{A}_n$ for $n \geq 5$ satisfying all conditions of Lemma 5.10. Then $2e_H^{\mathfrak{A}_n}$ is an element of $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$. In particular, $2e_H^{\mathfrak{A}_n} - 1$ is an element of $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^{\times}$.*

Proof. Let $\widetilde{e}_H^{\mathfrak{A}_n}$ be an element of $\widetilde{\Omega}(A_n, \mathfrak{A}_n)$ defined by

$$(\widetilde{e}_H^{\mathfrak{A}_n})_{(D)} = \begin{cases} 1 & (D) = (H), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{5.1}$$

for all $(D) \in C(\mathfrak{A}_n)$. Then we have $e_H^{\mathfrak{A}_n} = \varphi^{\mathfrak{A}_n -1}(\widetilde{e}_H^{\mathfrak{A}_n}) \in \mathbb{Q}\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$. A (D)-component of an image of $e_H^{\mathfrak{A}_n}$ by $\psi^{\mathfrak{A}_n} \circ \varphi^{\mathfrak{A}_n}$ is presented as

$$(\psi^{\mathfrak{A}_n} \circ \varphi^{\mathfrak{A}_n}(e_H^{\mathfrak{A}_n}))_{(D)} = \sum_{gD \in WD} (\widetilde{e}_H^{\mathfrak{A}_n})_{\overline{\langle g \rangle D}} \mod |WD|.$$

Take a subgroup K of H satisfying Lemma 5.10.3. Then by Lemma 5.11.

$$(\overline{\langle g \rangle D}) = (H) \Leftrightarrow (D) = (K) \text{ or } (H)$$

for $(D) \in C(\mathfrak{A}_n)$ and $gD \in WD$, so we have that

$$(\psi^{\mathfrak{A}_n} \circ \varphi^{\mathfrak{A}_n}(e_H^{\mathfrak{A}_n}))_{(D)} = \begin{cases} 1 & \mod & |WD| & (D) = (H) \text{ or } (K) \text{ with } n \text{ even}, \\ 3 & \mod & |WD| & (D) = (K) \text{ with } n \text{ odd}, \\ 0 & \mod & |WD| & \text{otherwise}. \end{cases}$$

Since we have that

$$(\psi^{\mathfrak{A}_n} \circ \varphi^{\mathfrak{A}_n}(2e_H^{\mathfrak{A}_n}))_{(D)} = \begin{cases} 2 & \mod & |WD| & (D) = (H) \text{ or } (K) \text{ with } n \text{ even}, \\ 6 & \mod & |WD| & (D) = (K) \text{ with } n \text{ odd}, \\ 0 & \mod & |WD| & \text{otherwise}, \end{cases}$$

and that $|WH| = 1$,

$$|WK| = \begin{cases} 2 & (D) = (H) \text{ or } (K) \text{ with } n \text{ even}, \\ 6 & (D) = (K) \text{ with } n \text{ odd}, \end{cases}$$

by Lemma 5.11, we obtain that $\psi^{\mathfrak{A}_n} \circ \varphi^{\mathfrak{A}_n}(2e_H^{\mathfrak{A}_n}) = 0$. This completes the proof of the theorem. □

Lemma 5.13 のすべての条件を満たす部分群 $H \in \mathfrak{A}_n$ に対し，$\xi = 2e_H^{\mathfrak{A}_n} - 1 \in \Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^{\times}$ とおく．U で部分群 $\langle -1, \nu, \xi \rangle$ of $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^{\times}$ を表す．Theorem 5.13 から得られる結果の一つとして，U の階数が 3 であることがわかる．

Corollary 5.14. *Let U be the subgroup of $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^{\times}$ for $n \geq 5$ defined above. Then U is an elementary abelian 2-group of rank 3.*

Proof. Eq. (5.1) shows that

$$\varphi_D(\xi) = (2\widetilde{e}_H^{\mathfrak{A}_n} - 1)_{(D)} = \begin{cases} 1 & (D) = (H), \\ -1 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

for all $(D) \in C(\mathfrak{A}_n)$. This shows that $\xi \neq \pm 1$ and $\xi \neq \pm \nu$. □

Remark 2. It is checked that $\Omega(A_3, \mathfrak{A}_3)^{\times} = \langle -1 \rangle$ and $\Omega(A_4, \mathfrak{A}_4)^{\times} = \langle -1, \nu \rangle$. Furthermore, the computer calculation shows that, for $n = 5, 6, 7$, $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^{\times} = \langle -1, \nu, \xi \rangle$ of rank 3. So is it true that $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^{\times}$ for $n \geq 5$ is always of rank 3 ?

参考文献

[Ba10] Barker, L.: *Tornehave morphisms I: resurrecting the virtual permutation sets annihilated by linearization*, Comm. Algebra **39** (2010) 355–395.

[Ca72] Carter, R. W.: *Simple groups of Lie type*, Pure and Applied Mathematics, **28**, John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972.

[Di79] tom Dieck, T.: Transformation Groups and Representation Theory, Lecture Notes in Mathematics, **766**, Springer-Verlag, Berlin, (1979).

[IO15] Idei, H.; Oda, F.:*The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group*, J. Algebra **429** (2015), 318–323.

[OS] Oda, F.;Sawabe, M.:*Unit group of a partial Burnside ring of an alternating group*, preprint.

[OTY16] Oda, F.; Takegahara, Y.; Yoshida, T. :*The unit group of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of the symmetric group*, J. Algebra **460** (2016), 370–379.

[So66] Solomon, L.:*The orders of the finite Chevalley groups*, J. Algebra **3**, (1966), 376 – 393.

[Th87] Thévenaz, J.:*Permutation representations arising from simplicial complexes*, J. Combin. Theory Ser. A 46, (1987) 121–155.

[Su82] Suzuki, M.: Group theory I, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **247**, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Ya05] Yalçın, E.: *An induction theorem for the unit groups of Burnside rings of* 2*-groups*, J. Algebra **289** (2005), 105–127.

[Yo90a] Yoshida, T.: *On the unit groups of Burnside rings,* J. Math. Soc. Japan **42** (1990), 31–64.

[Yo90b] Yoshida, T.: *The generalized Burnside ring of a finite group,* Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.