数理解析研究所講究録
第2061巻 2018年 106-119

Source algebras and cohomology rings of blocks with extraspecial defect groups

Sasaki, Hiroki
佐々木 洋城
Shinshu University, Faculty of Education
信州大学 教育学部

1 はじめに

以下，k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とする．G を有限群とし，その位数は k の標数 p で割りきれるものとする．

目標は群環 kG のブロック・イデアルのコホモロジー環をそのブロックの defect 群のコホモロジー環からの適当な写像の像として表わすということである．この度，新たに位数 p^3，指数 p の extraspecial p-群

$$p_+^{1+2} = \langle a, b \mid a^p = b^p = [a, b]^p = 1, [[a, b], a] = [[a, b], b] = 1 \rangle$$

を defect 群とするブロック・イデアルについて結論が得られた．なお，他の extraspecial p-群（指数 p^2 またはランク 3 以上）については，Stancu [14] により，これらを defect 群にもつブロック・イデアルについては解決されている．

2 ブロック・イデアルのコホモロジー環

一般に，p-部分群 P とその中心化群 $C_G(P)$ のブロックべき等元 e の組 (P, e) を subpair とよぶ．$k[PC_G(P)]$ のブロック・イデアル $k[PC_G(P)]e$ の G への Brauer 対応が B であるとき，(P, e) を B-subpair とよぶ．(P, e) が B-subpair であり，さらに P が B の defect 群のとき，(P, e) を Sylow B-subpair とよぶ．

以下，B を kG のブロック・イデアルとし，S をその defect 群とする．S_γ を local pointed group とする．

$i \in \gamma$ をとると，$\mathrm{Br}_S(i) \in kC_G(S)$ は 0 でなく原始的べき等元である．よって，直既約 $kC_G(S)$ 加群 $kC_G(S)\,\mathrm{Br}_S(i)$ は $kC_G(S)$ の（ただひとつの）ブロック・イデアル $kC_G(S)e$ に属する．こうして，S_γ に対して Sylow B-subpair (S, e) が定められる．今後，この e を e_S と書くことにし，S_γ は (S, e_S) に属するという．

部分群 $Q \leqslant S$ に対して $(Q, e_Q) \leqslant (S, e_S)$ を満たす subpair (Q, e_Q) がただ一つ存在する．そこで，defect 群 S の部分群を object とし，Q, $R \leqslant S$ に対して $x \in G$ で ${}^x(Q, e_Q) \leqslant (R, e_R)$ をみたすものが引き起こす共役写像 $c_x : Q \to R; a \mapsto {}^x a$ を morphism $Q \to R$ として圏 $\mathscr{F}_{S_\gamma}(B)$ を定義し，これを Brauer 圏とよぶ．

定義 2.1 (Linckelmann [4]) いままでの記号の下で，ブロック B のコホモロジー環を次のように定義する．$\zeta \in H^*(S,k)$ が条件

(S) $$\mathrm{res}_R\,{}^g\zeta = \mathrm{res}_R\,\zeta \quad \forall Q,\ R \leqslant S\ \forall g \text{ such that } {}^g(Q,e_Q) \leqslant (R,e_R)$$

をみたすとき，ζ は $\mathscr{F}_{S_\gamma}(B)$-stable であるという．$H^*(S,k)$ の部分集合

$$H^*(G,B;S_\gamma) = \{\, \zeta \in H^*(S,k) \mid \zeta \text{ は } \mathscr{F}_{S_\gamma}(B)\text{-stable} \,\}$$

を B の（S_γ によって定められる）コホモロジー環とよぶ．

注意 conjugation family の理論により，安定条件 (S) は

(S(Q)) $$\mathrm{res}_Q\,{}^g\zeta = \mathrm{res}_Q\,\zeta \quad \forall Q \leqslant S\ \forall g \in N_G(Q,e_Q)$$

と同値である．

ここで，記号を定める．一般に，部分群 $H \leqslant G$ と $L \leqslant N_G(H)$ に対して

$$H^*(H,k)^L = \{\, \zeta \in H^*(H,k) \mid {}^x\zeta = \zeta\ \forall x \in L \,\}$$

とおく．この記号を用いれば安定条件 S(Q) は「$\mathrm{res}_Q\,\zeta \in H^*(Q,k)^{N_G(Q,e_Q)}$」と表現される．

また，一般に subpair (P,e) に対して $N_G(P,e)/PC_G(P)$ を $I_G(P,e)$ と書くことにする．

さて，$ikGi$ は B の source 多元環とよばれている．$ikGi$ は B と多くの環論的性質を共有している．$ikGi$ を (kS,kS)-両側加群とみて次の基本定理が得られる．

定理 2.1 (Linckelmann) 今までの記号の下で $\zeta \in H^*(S,k)$ について

$$\zeta \in H^*(G,B;S_\gamma) \Longrightarrow \delta_S\zeta \in HH^*(kS) \text{ は } {}_{kS}ikGi_{kS}\text{-stable である．}$$

この逆が成り立つ．

定理 2.2 (Sasaki [11]) 今までの記号の下で $\zeta \in H^*(S,k)$ について

$$\delta_S\zeta \in HH^*(kS) \text{ は } {}_{kS}ikGi_{kS}\text{-stable である} \Longrightarrow \zeta \in H^*(G,B;S_\gamma).$$

3 source 多元環と trace 写像，transfer 写像

source 多元環 $ikGi$ は (kS,kS)-両側加群として，$kG = \bigoplus k[SxS]$ の直和因子であるから，ある部分集合 $\mathscr{X} \subseteq S\backslash G/S$ により

$${}_{kS}ikGi_{kS} \simeq \bigoplus_{SxS \in \mathscr{X}} k[SxS]$$

と直和分解される．この分解により (kS,kS)-両側加群 $ikGi$ が定める Hochshildt コホモロジー環の transfer 写像 $t_{ikGi} : HH^*(kS) \to HH^*(kS)$ の diagonal embedding $\delta_S : H^*(S,k) \to$

$HH^*(kS)$ を通しての $H^*(S,k)$ への制限 $t : H^*(S,k) \to H^*(S,k)$

$$\begin{tikzcd} H^*(S,k) \arrow[r, "\delta_S"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & HH^*(kS) \arrow[d, "t_{ikGi}"] \\ H^*(S,k) \arrow[r, "\delta_S"'] & HH^*(kS) \end{tikzcd}$$

は

$$t : H^*(S,k) \to H^*(S,k); \zeta \mapsto \sum_{SxS \in \mathscr{X}} \mathrm{tr}^S \mathrm{res}_{S\cap {}^xS}\, {}^x\zeta$$

と表わされる．定理 2.1，2.2 に鑑み，次を予想している．

予想 $\mathrm{Im}\, t = H^*(G,B;S_\gamma)$ が成り立つ．

例 3.1 $N_G(S,e_S)$ が Brauer 圏 $\mathscr{F}_{S_\gamma}(B)$ における fusion を統制する場合は予想が成り立つ．例えば，次の場合が該当する．

(1) S が G の正規部分群である．
(2) S が可換である．
(3) S が exponent p^2，位数 p^3 のの extraspecial p-群
(4) S がランク 3 以上の extraspecial p-群（Stancu [14]）
(5) B の hyper focal subgroup が巡回群である（Watanabe [16, Theorem 3]）．

S が extraspecial の場合は指数 p，位数 p^3 の場合だけが $N_G(S,e_S)$ が fusion を統制しない．

$ikGi$ は次のように直和分解されることが知られている：

$$ikGi \simeq \bigoplus_{gSC_G(S)\in I_G(S)} k[Sg] \oplus N.$$

ここで，N はいくつかの $x \in G \setminus N_G(S)$ による $k[SxS]$ の直和，と表わされる．従って，transfer 写像 t は $\zeta \in H^*(S,k)$ を次のように写像する：

$$\zeta \mapsto \sum_{gSC_G(S)\in I_G(S)} {}^g\zeta + \Big(\mathrm{tr}^S \mathrm{res}_{S\cap {}^xS}\, {}^x\zeta,\ x \in G \setminus N_G(S),\ \text{の形の和}\Big).$$

$x \in G \setminus N_G(S)$ による $k[SxS]$ が $ikGi$ の直和因子として現れるかどうかを判定し，直和因子に同型ならばその重複度を求めることが課題である．

この課題のために次は基本的である．

命題 3.1 (例えば，Külshammer, Okuyama and Watanabe [2]) $k[SgS]$ が $ikGi$ の直和因子に同型であるとする．$P = S^g \cap S$, $Q = S \cap {}^gS$ とおく．$(P,e_S),(Q,e_Q) \leqslant (S,e_S)$ について

$${}^g(P,e_P) = (Q,e_Q).$$

つまり，subpairs の fusion のあり様を調べることにより，source 多元環の直和因子についての情報が得られる．

4 source 多元環の加群構造

定義 4.1 一般に，有限群 G の部分群 H について

(1) $p \mid |H|$
(2) $\forall x \in G \setminus H \quad H \cap {}^{x}H$ は p'-群

が成り立つとき，H は G において strongly p-embedded であるという．

G が strongly p-embedded な真部分群を含むとき，G の任意の p-部分群に対してそれを含む strongly p-embedded な真部分群が存在する．

定義 4.2 subpair (T, f) について

(1) (T, f) は self-centralizing（T は $k[TC_G(T)]$ の block $k[TC_G(T)]f$ の defect 群）であり
(2) $N_G(T, f)/TC_G(T)$ が strongly p-embedded proper subgroup をもつ

が成り立つとき，(T, f) は essential であるという．このとき $\mathrm{Aut}\,T$ は p-群ではない．

essential subpairs は実に本質的である．すなわち，Linckelmann [5] により

定理 4.1 $\mathscr{F} = \{ (T, e_T) \leqslant (S, e_S) \mid (T, e_T)$ は essential$\} \cup \{ (S, e_S) \}$ は conjugation family である．

さらに，次の重要な定理が成り立つ．

定理 4.2 (Okuyama and Sasaki [7]) $(T, e_T) \leqslant (S, e_S)$ を essential とする．$M \leqslant N_G(T, e_T)$ を $N_S(T)C_G(T)$ を含み，$M/TC_G(T) < N_G(T, e_T)/TC_G(T)$ が strongly p-embedded proper subgroup であるようにとる．このとき，任意の $x \in N_G(T, e_T) \setminus M$ に対して $k[SxS]$ は $ikGi$ の直和因子に同型であり，重複度は p を法として 1 に合同である．

例 4.1 ブロック B がテイム表現型ならば，essential な subpairs が特定され，前節の予想は成立することが確認される．この場合，S の自己同型群は 2-群であるから，$N_G(S, e_S)/SC_G(S)$ は自明である．さて，例えば，defect 群 S が二面体群のとき，essential subpair は four-group T で $N_G(T, e_T)/C_G(T) \simeq \mathrm{GL}(2, 2) \simeq S_3$ のときに限る．S に含まれる four-group の S における共役類のひとつの代表系を $\{ T_0, T_1 \}$ とする．subpairs (T_0, e_{T_0})，(T_1, e_{T_1}) はともに essential である場合を考える．$N_G(T_j, e_{T_j})/C_G(T_j)$ の strongly embedded subgroup は $N_S(T_j, e_{T_j})C_G(T_j)/C_G(T_j)$ であり，$x_J \in N_G(T_j, e_{T_j}) \setminus N_S(T_j, e_{T_j})C_G(T_j)$ をとると

$$ikGi \simeq l_1 k[Sx_1S] \bigoplus l_2 k[Sx_2S] \bigoplus Z$$

と直和分解される．ここで，l_1, l_2 は重複度を表わし，ともに奇数である．Z の直和因子が導く transfer 写像は 0 写像である．よって，$ikGi$ が導く transfer 写像は Kawai-Sasaki[1] で構成した trace 写像と一致し，その像はブロックのコホモロジー環である．すなわち，予想が成り立つことが確かめられた．

以下，本節ではこの定理の証明の概略を述べる．まず，両側加群 $k[PxP]$ の同型について次は基本である．

補題 4.3 (Sasaki [13, Proposition 3]) $P \leqslant G$ を p-部分群とする．$x, y \in G$ について

$$
\begin{aligned}
&{}_{kP}k[PxP]_{kP} \simeq {}_{kP}k[PyP]_{kP} \\
&\qquad\qquad \Longleftrightarrow \exists z \in C_G(P^x \cap P) \;\; P^x \cap P = P^{xz} \cap P,\; PyP = PxzP.
\end{aligned}
$$

このとき，$P \cap {}^xP = P \cap {}^{xz}P$ であり，$P \cap {}^xP$ と $P \cap {}^yP$ は P で共役である．

以下，記号は定理 4.2 のものである．さらに，$R = N_S(T)$, $L = RC_G(T) = C_G(T)R$ とおく．

$x \notin M$ であり，$M/TC_G(T)$ が $I_G(T, e_T)$ において strongly p-embedded であることなどを使って次が確かめられる.（以下ではこれを使う場面を具体的には示すことはできませんが，基本なのです）

Step 1 $R \cap {}^xL = R \cap {}^xR = S \cap {}^xS = S^x \cap S = T$.

$j = \mathrm{Br}_T(i) \in (kC_G(T))$ とおく．$T \lhd R$ であるから，j は R-不変である．kG が p-permutation $k[G \times G]$-加群であることから，$N = N_G(T, e_T)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&(k[S \times S]\text{-加群 } k[SxS] \text{ の } ikGi \text{ における重複度}) \\
&=(k[R \times R]\text{-加群 } k[RxR] \text{ の } jkNj \text{ における重複度})
\end{aligned}
$$

であることがわかる．さらに，補題 4.3 により，$k[RxR]$ は $N \setminus LxL$ で生成される $k[R \times R]$-部分加群の直和因子としては現れない．よって

Step 2 次の等式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&(k[S \times S]\text{-加群 } k[SxS] \text{ の } ikGi \text{ における重複度}) \\
&=(k[R \times R]\text{-加群 } k[RxR] \text{ の } jk[LxL]j \text{ における重複度}).
\end{aligned}
$$

従って，$jk[LxL]j$ について調べればよい．$L = RC_G(T)$ であることから，$jk[LxL]j = kR \otimes_{kT} jk[TC_G(T)]xj \otimes_{kT} kR$ であることが確かめられ，さらに，ある可逆元 $\theta_x \in kC_G(T)e_T$ により，${}^xj = {}^{\theta_x}j$ であることが確かめられる．このことから

Step 3 $jk[LxL]j = kR \otimes_{kT} jk[TC_G(T)]xj \otimes_{kT} kR$ であり，$k[T \times T]$-加群 $jk[TC_G(T)]xj$ は $jk[TC_G(T)]jx$ に同型である．

ここまででは (T, e_T) が self-centralizing であることを使ってこなかった．これは

Step 4 $k[T \times T]$-加群 $jk[TC_G(T)]j$ は kT のいくつかの直和に同型である．重複度は p を法として 1 に合同である．重複度を m とおく：$m \equiv 1 \pmod p$.

を示すのに使われる．以上をまとめて結論を得る．すなわち，Step 4 から $jk[TC_G(T)]xj \simeq jk[TC_G(T)]jx \simeq \bigoplus_{m\text{ 個}} kTx$ であるから

$$kR \otimes_{kT} jk[TC_G(T)]xj \otimes_{kT} kR \simeq kR \otimes_{kT} \left(\bigoplus_{m\text{ 個}} kTx \right) \otimes_{kT} kR \simeq \bigoplus_{m\text{ 個}} k[RxR].$$

よって

$$\begin{aligned} &(k[S \times S]\text{-加群 } k[SxS] \text{ の } ikGi \text{ における重複度}) \\ =&(k[R \times R]\text{-加群 } k[RxR] \text{ の } jk[LxL]j \text{ における重複度}) \\ =&(k[R \times R]\text{-加群 } k[RxR] \text{ の } kR \otimes_{kT} jk[TC_G(T)]xj \otimes_{kT} kR \text{ における重複度}) \\ =&\Bigl(k[R \times R]\text{-加群 } k[RxR] \text{ の } \bigoplus_{m\text{ 個}} k[RxR] \text{ における重複度}\Bigr) = m \equiv 1 \pmod p. \end{aligned}$$

Step 4 に関して一般的な命題を述べよう．

命題 4.4 (P, e) と (T, f) をともに self-centralizing な subpair とし，$(T, f) \leqslant (P, e)$ と仮定する．P_γ を (P, e) に属する（一意的な）local pointed group とする．$i \in \gamma$ を任意の原始的べき等元とし，$j = \mathrm{Br}_T(i) \in kC_G(T)$ とおく．

このとき，$k[T \times T]$-加群 $jk[TC_G(T)]j$ は kT のいくつかの直和に同型であり，その重複度は p を法として 1 に合同である．

この命題の証明の概略 (T, f) は self-centralizing であるから，(T, f) に属する local pointed group は一意的でそれを T_δ と表わすと，$j = \mathrm{Br}_T(i)$ は δ に含まれる直交する原始的べき等元 $j_1, \ldots, j_l$ を用いて

$$j = \mathrm{Br}_T(i) = \mathrm{Br}_T(j_1) + \cdots + \mathrm{Br}_T(j_l)$$

と表わされる．Puig [9, Proposition 3.5] により，上の l について $l \equiv \pm 1 \pmod p$（この事実が最も肝心なこと）である．さらに，$\mathrm{Br}_T(j_1), \ldots, \mathrm{Br}_T(j_l)$ は $k[TC_G(T)]$ のブロック・イデアル $k[TC_G(T)]f$ の sourde べき等元であるということから結論を得る． □

$ikGi$ の直和因子の同型問題について次が分かる．$H = N_G(S, e_S)$ とおき，さらに $M_0 = H \cap N = N_H(T) = N_H(T, e_T)$ とおく．

$RC_G(S)$ は M_0 で正規でありその指数は p と互いに素である．よって $M_0/C_G(S)$ における p-補群 $E_0/C_G(S)$（$E_0 \leqslant M_0$）をとることができる．$E_0 S = M_0$ である．部分群 $E \leqslant H$ を E_0 を含み $E/C_G(S)$ が $H/C_G(S)$ における p-補群となるものをとる．$ES = H$ である．左剰余類 $gE_0 \subset E$ の完全代表系をひとつ固定し，$[E/E_0] \ni 1$ とする．このとき，$[E/E_0]$ は $gE_0 S \subset H$ の完全代表系でもある．

命題 4.5 上の記号の下で次が成り立つ．

(1) $x, y \in N \setminus M$ について，$k[SxS] \simeq k[SyS] \Leftrightarrow k[RxR] \simeq k[RyR]$．これは，$y \in RxL$ のときしかもそのときに限って成立する．
(2) 代表元 $g, h \in [E/E_0]$ と $x, y \in N \setminus M$ について $k[SgxS] \simeq k[ShyS] \Leftrightarrow \big[g = h,\ k[SxS] \simeq k[SyS]\big]$.

$\mathscr{X}$ を両側剰余類 $RxL \subset N$ の完全代表系とし，$\mathscr{X}_0 \subset \mathscr{X}$ を

$$N \setminus M = \bigcup_{x \in \mathscr{X}_0} RxL$$

となるようにとると

系 4.6 source 多元環 $ikGi$ は各 $g \in [E/E_0]$ と各 $x \in \mathscr{X}_0$ に対して $k[SgxS]$ に同型な直既約な $k[S \times S]$-直和因子をもつ．その重複度は $k[SxS]$ の重複度と同じである．

これらの命題における両側加群の同型は次の議論に基づく．$P \leqslant G$ を p-部分群とし，$i \in (kG)^P$ を任意のべき等元とする．元 $g \in N_G(P)$ の i への作用がある可逆元 $\theta_g \in U((kG)^P)$ による作用と一致する，すなわち ${}^g i = {}^{\theta_g} i$ と仮定する．このとき

$$\eta_g = {\theta_g}^{-1} gi = i{\theta_g}^{-1} g \in ikGi$$

は $ikGi$ の可逆元で，その逆元は ${\eta_g}^{-1} = g^{-1}\theta_g i = ig^{-1}\theta_g$ である．さらに，

$${}^{\eta_g}u = {}^g u i, \quad u^{\eta_g} = u^g\, i \quad (u \in P)$$

が成り立つ．これから

命題 4.7 (1) 写像

$$\begin{aligned} \Phi_g &: gikGi \to ikGi;\, g\sigma \mapsto \eta_g\sigma \qquad (\sigma \in ikGi), \\ \Psi_g &: ikGi \to gikGi;\, \tau \mapsto g{\eta_g}^{-1}\tau \quad (\tau \in ikGi) \end{aligned}$$

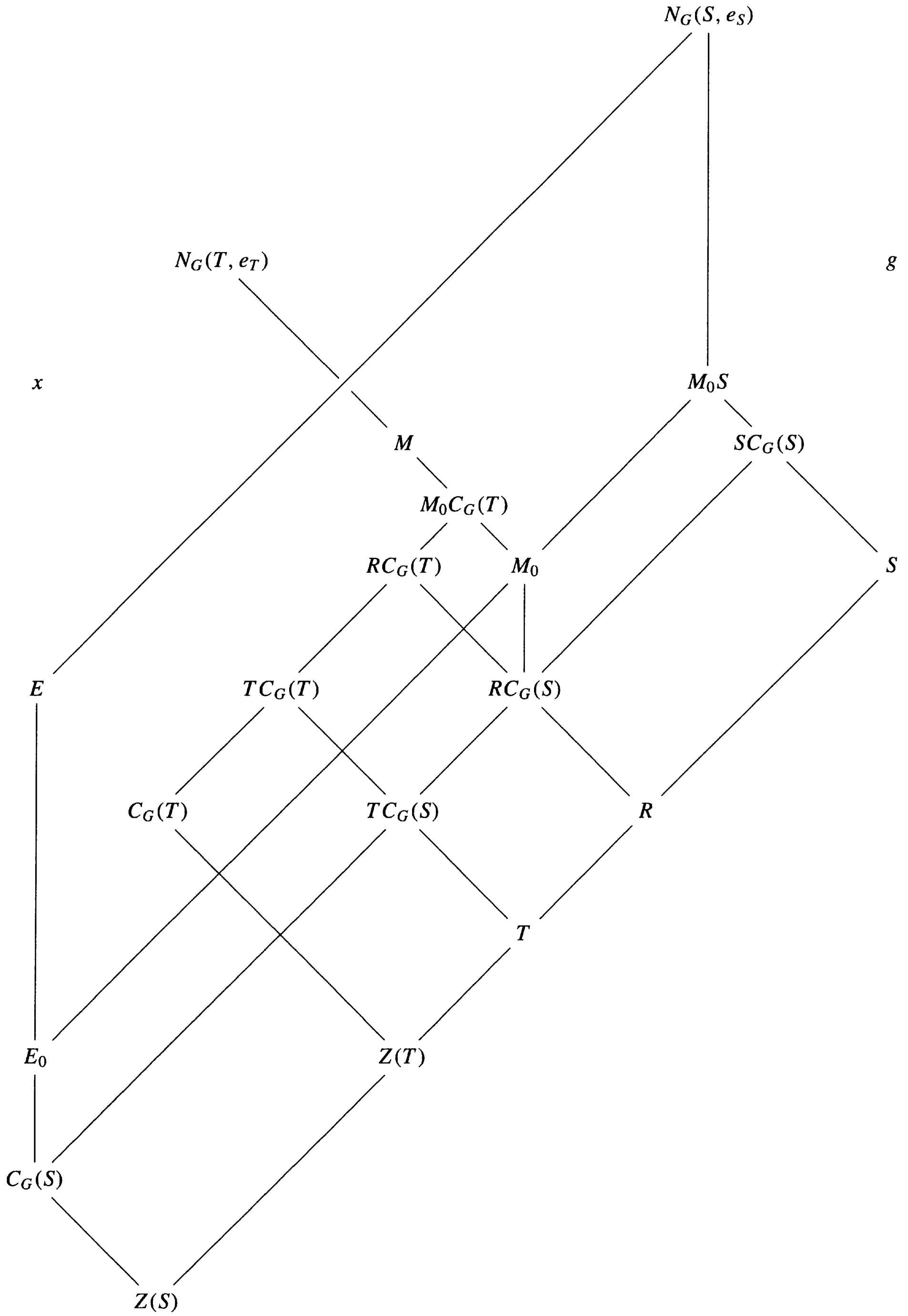
は $k[P \times P]$-加群の同型である; ${\Phi_g}^{-1} = \Psi_g$.
(2) 写像

$$\begin{aligned} \Phi'_g &: ikGig \to ikGi;\, \sigma g \mapsto \sigma\eta_g \qquad (\sigma \in ikGi), \\ \Psi'_g &: ikGi \to ikGig;\, \tau \mapsto \tau{\eta_g}^{-1}g \quad (\tau \in ikGi) \end{aligned}$$

は $k[P \times P]$-加群の同型である; ${\Phi'_g}^{-1} = \Psi'_g$.

系 4.8 上と同じ記号を用いる．任意の $x \in G$ について $k[P \times P]$-加群 $gk[PxP]$ と $k[PgxP]$ は同型である．特に $k[P \times P]$-加群 $k[PxP]$ が $ikGi$ の直和因子に同型ならば，$k[PgxP]$ もそうであり，$k[PxP]$ と同じ重複度をもつ．

これまでに登場した部分群とその包含関係をまとめると次のようになる.



5 extraspecial p-群を defect 群とするブロック・イデアル

以後，ブロック B の defect 群 S は位数 p^3，指数 p の extraspecial p-群 $p_+^{1+2} = \langle a, b \mid a^p = b^p = [a,b]^p = 1, [[a,b],a] = [[a,b],b] = 1 \rangle$ とする．$c = [a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ とおく．

この群上の fusion system は Ruiz-Viruel [10] により完全に分類されている．以下の議論では，Ruiz-Viruel の議論の初めの部分（特に，essential subpairs に関する部分）は共通のものがあるが，分類の結論に依存しているわけではない．

まず，$P, Q \leqslant S$ が (p,p) 型ならば，これらは S で正規であるから，$(P, e_P), (Q, e_Q) \leqslant (S, e_S)$ が G で共役ならば，$N_G(S, e_S)$ で共役であることに注意する．このゆえに，subpair の融合が容易に解析できる．また，$P \leqslant S$ が巡回群ならば $(P, e_P) \leqslant (S, e_S)$ は essential でない．

本節では，subpair (P, e_P) に対して $N_G(P, e_P)$ を単に N_P と書くことにする．

5.1 essential subpairs

命題 5.1 (1) $P \leqslant S$ が (p,p) 型ならば $I_G(P, e_P)$ は $\mathrm{GL}(2,p)$ に自然に埋め込まれ，$SC_G(P)/C_G(P)$ は $I_G(P, e_P)$ の Sylow p-部分群である．

(2) $P \leqslant S$ を (p,p) 型とする．$N_{N_P}(SC_G(P)) = (N_P \cap N_S)C_G(P)$ である．$M_P = (N_P \cap N_S)C_G(P)$ とおく．$N_{I_G(P,e_P)}\big(SC_G(P)/C_G(P)\big) = M_P/C_G(P)$ である．さらに，$C_G(P) \cap N_S = PC_G(S)$ である．

(3) $(P, e_P) \leqslant (S, e_S)$ が essential $\Leftrightarrow$ $N_P \not\leqslant N_S$．このとき $M_P/C_G(P) \leqslant I_G(P, e_P)$ は strongly p-embedded である．

(4) $(T, e_T) \leqslant (S, e_S)$ が essential ならば $I_G(T, e_T) \geqslant \mathrm{SL}(2,p)$．従って，ある $x_T \in N_T \setminus M_T$ で ${x_T}^2 \in M_T$ となるものがある．さらに $|N_T : M_T| = p+1$ であり，$s \in S \setminus T$ をとると

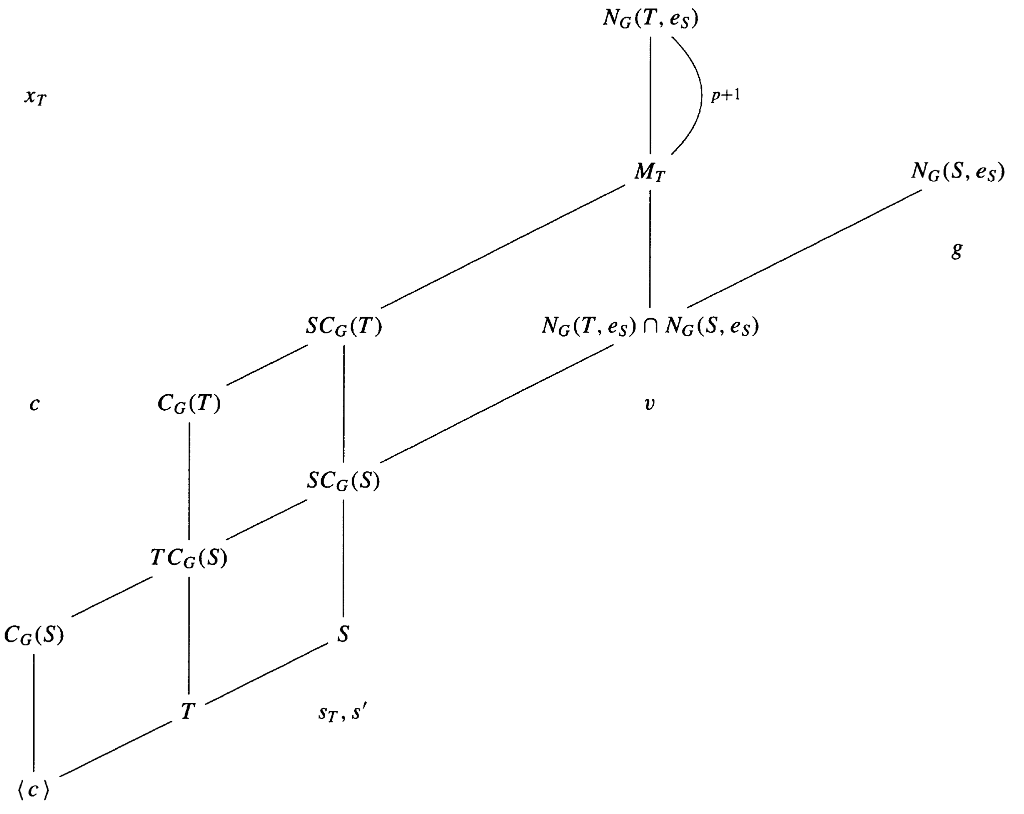
$$N_T = M_T \bigcup \left(\bigcup_{j=0}^{p-1} s^j x_T M_T \right).$$

また，$M_T = \displaystyle\bigcup_{vSC_G(S) \in (N_T \cap N_S)/SC_G(S)} \; \bigcup_{zT \in C_G(T)/T} vzS$．以後，上の $s \in S \setminus T$ をひとつ固定して用い s_T と書く．

従って

$$(*) \qquad N_T \setminus M_T = \bigcup_{j=0}^{p-1} {s_T}^j x_T M_T.$$

$(T, e_T) \leqslant (S, e_S)$ が essential のとき，関係する部分群の包含関係は（一般の場合は前節のように複雑であったが）次のとおり簡単である．(E, E_0 は省略したが $[E/E_0]$ は $N_S/(N_T \cap N_S)$ の完全代表系である）



5.2 ソース多元環の加群構造

$(T, e_T) \leqslant (S, e_S)$ を essential とし，$x_T \in N_T \setminus M_T$ をこれまでと同様にとる．どの $x \in N_T \setminus M_T$ も (*) により，$j\ (0 \leqslant j \leqslant p-1)$，$vSC_G(S) \in (N_T \cap N_S)/SC_G(S)$，$cT \in C_G(T)/T$，$s' \in S$ により，$x = s^j x_T v c s'$ と表わされる．定理 4.2，補題 4.3 により次が得られる．

定理 5.2 (1) $x \in N_T \setminus M_T$ に対し $k[SxS]$ は $ikGi$ の直和因子に同型であり，その重複度は p を法として 1 に合同である．

(2) $x \in N_T \setminus M_T$ に対してある $v \in N_T \cap N_S$ により $k[SxS] \simeq k[Sx_TvS]$ となる．

さらに，系 4.8 により

定理 5.3 $x \in N_T \setminus M_T$ とする．任意の $g \in N_S \setminus N_S \cap N_T$ に対して $k[SgxS]$ も $ikGi$ の直和因子に同型であり，その重複度は $k[SxS]$ の重複度と一致する．

定義 5.1 両側剰余類 SgS について写像 $t_{SgS} : H^*(S,k) \to H^*(S,k)$ を

$$t_{SgS} : \zeta \mapsto \mathrm{tr}^S \mathrm{res}_{S\cap {}^gS}\, {}^g\zeta$$

により定義する．$ikGi$ が導く $t : H^*(S,k) \to H^*(S,k)$ は t_{SgS} の和である．

$t_{SgS} : H^*(S,k) \to H^*(S,k)$ が 0 写像でないとき，SgS（または $k[SgS]$）は nontrivial transfer condition （NTC) をみたすという（ことにする）．

さて，$g \in G$ について $k[SgS]$ は $ikGi$ の直和因子に同型であるとする．$P = S^g \cap S, Q = S \cap {}^gS$ とおき，$(P, e_P), (Q, e_Q) \leqslant (S, e_S)$ とする．P（従って，Q も）が巡回群ならば，t_{SgS} は 0 写像である．よって，SgS が NTC をみたすならば P（従って，Q も）は巡回群でない．

命題 3.1 により，${}^g(P, e_P) = (Q, e_Q)$ であるから，g による共役写像は P 上では N_S の元による共役写像と，essential subpair の normalizer の元による共役写像との合成として表される．これを用いて解析することにより次が得られる．

命題 5.4 上と同じ記号の下で，P（従って，Q も）は巡回群でないとする．

(1) (P, e_P) が essential でなければ（(Q, e_Q) も essential でなく），$g \in N_S$.
(2) (P, e_P) が essential とする（(Q, e_Q) も essential であり，$g \notin N_S$ である）．$k[SgS]$ が NTC をみたすならば，$\exists w \in N_S$，$\exists v \in N_P \cap N_S$ により $SgS = Swx_PvS$ であり，$k[SgS] \simeq k[Swx_PvS] \simeq wk[Sx_PvS]$．重複度は p を法として 1 に合同である．

これらの直和因子の同型問題については，命題 4.5 は次のようになる．

命題 5.5 (1) $g, h \in G \setminus N_S$ について $k[SgS], k[ShS]$ は $ikGi$ の直和因子に同型であり，$(S \cap {}^gS, e_{S\cap {}^gS})$,
$(S \cap {}^hS, e_{S\cap {}^hS}) \leqslant (S, e_S)$ はともに essential subpairs で，NTC をみたすと仮定する．このとき，$k[SgS] \simeq k[ShS]$ ならば $S \cap {}^gS = S \cap {}^hS$ であり，かつ $S^g \cap S = S^h \cap S$.
(2) $(T, e_T) \leqslant (S, e_S)$ を essential とする．$v, v' \in N_T \cap N_S$ について

$$(kS, kS)\text{-両側加群として } k[Sx_TvS] \simeq k[Sx_Tv'S] \Longleftrightarrow vSC_G(S) = v'SC_G(S).$$

(3) $(T, e_T) \leqslant (S, e_S)$ を essential とし，$x_T \in N_T \setminus M_T$ をこれまでと同様にとる．$w(N_S \cap N_T) \in N_S/(N_S \cap N_T)$，$vSC_G(S) \in I_G(S, e_S)$ に対して (kS, kS)-両側加群 $wk[Sx_PvS]$ は $ikGi$ の直和因子に同型であり，その重複度は p を法として 1 に合同である．
$N_S = \bigsqcup_\alpha w_\alpha (N_T \cap N_S)$ とすると

$$w_\alpha k[Sx_TvS] \simeq w_\beta k[Sx_Tv'S] \Longleftrightarrow \alpha = \beta,\ vSC_G(S) = v'SC_G(S).$$

$\mathscr{E}$ を essential subpair $(T, e_T) \leqslant (S, e_S)$ の共役類の完全代表系とする．$(T, e_T) \in \mathscr{E}$ に対して，$\mathscr{W}_T$ を剰余類 $w(N_T \cap N_S)\,(w \in N_S)$ の完全代表系とする．このとき，集合 $\{{}^x(T, e_T) \mid (T, e_T) \in \mathscr{E}, x \in \mathscr{W}_R\}$ は essential subpairs の全体のなす集合である．よって

定理 5.6 B の source 多元環 $ikGi$ は (kS, kS)-加群として

$$
\begin{aligned}
ikGi \simeq & \bigoplus_{gSC_G(S)\in N_S/SC_G(S)} k[gS] \\
& \oplus \left(\bigoplus_{(T,e_T)\in\mathscr{E}} \bigoplus_{w_\alpha,\, w_\beta\in\mathscr{W}_T} \bigoplus_{vSC_G(S)\in(N_S\cap N_T)/SC_G(S)} m_R^{\alpha,\beta,v} k[Sw_\beta w_\alpha x_R v w_\beta{}^{-1}S] \right) \\
& \oplus Z
\end{aligned}
$$

と直和分解される．上の直和分解において，$k[gS]$, $k[Sw_\beta w_\alpha x_R v w_\beta{}^{-1}S]$ は互いに同型でない．また，$k[Sw_\beta w_\alpha x_R v w_\beta{}^{-1}S]$ の重複度を $m_R^{\alpha,\beta,v}$ とした．$m_R^{\alpha,\beta,v} \equiv 1 \pmod p$ である．

Z の直和因子はその引き起こす transfer 写像は 0 写像である．

5.3 $\mathrm{Tr}_S^B : H^*(S,k) \to H^*(G,B;S_\gamma)$ の構成

定理 5.6 により $ikGi$ が導く $H^*(S,k)$ の transfer 写像は $\zeta \in H^*(S,k)$ を

$$t : \zeta \mapsto \sum_{(T,e_T)\in\mathscr{E}} \bigoplus_{w_\alpha,\, w_\beta\in\mathscr{W}_T} \bigoplus_{vSC_G(S)\in(N_S\cap N_T)/SC_G(S)} {}^{w_\beta w_\alpha}\mathrm{tr}^S\, \mathrm{res}_T{}^{x_T v w_\beta{}^{-1}}\zeta$$

と写像する．この写像の像が B のコホモロジー環 $H^*(G,B;S_\gamma)$ と一致することを確かめたい．

そのためには，まずは，上の記述は念頭におきつつも，写像 $\mathrm{Tr}_S^B : H^*(S,k) \to H^*(G,B;S_\gamma)$ を構成していく．まず，$\zeta \in H^*(S,k)$ が $H^*(G,B;S_\gamma)$ に属するためには

(1) $\zeta \in H^*(S,k)^{N_S}$
(2) 任意の essential subpair $(T,e_T) \leqslant (S,e_S)$ について $\mathrm{res}_T\,\zeta \in H^*(T,k)^{N_T}$

であることが必要十分であることに注意する（定理 4.1）．

(S,e_S) は Sylow B-subpair であるから，$I_G(S,e_S)$ は p'-群である．よって，$H^*(S,k)^{N_S}$ は次のように得られる．

$$H^*(S,k)^{N_S} = \mathrm{Im}\left[H^*(S,k) \to H^*(S,k); \zeta \mapsto \sum_{gSC_G(S)\in I_G(S,e_S)} {}^g\zeta \right].$$

そこで

定義 5.2 写像 $\Delta : H^*(S,k) \to H^*(S,k)$ を $\Delta : \zeta \mapsto \displaystyle\sum_{gSC_G(S)\in I_G(S,e_S)} {}^g\zeta$ により定義する．

essential subpair についての安定条件を満たす元については次の通りである．essential subpair の normalizer の構造（命題 5.1）により次が成り立つ．以下，記号は命題 5.1 のものである．

補題 5.7 $(T,e_T) \leqslant (S,e_S)$ を essential subpair とする．

(1) $H^*(S,k)^{N_S\cap N_T} = \mathrm{Im}\left[H^*(S,k) \to H^*(S,k);\ \zeta \mapsto \sum_{gSC_G(S)\in(N_S\cap N_T)/SC_G(S)} {}^{g}\zeta \right].$
(2) $\zeta \in H^*(S,k)^{N_S\cap N_T}$ ならば $\mathrm{res}_R\,\zeta \in H^*(R,k)^{M_R}$.
(3) $\zeta \in H^*(S,k)^{N_S\cap N_T}$ について

$$\mathrm{res}_T\,\zeta \in H^*(T,k)^{N_T} \iff {}^{x_T}\mathrm{res}_T\,\zeta = \mathrm{res}_T\,\zeta.$$

次の写像が決め手のパーツである.

定義 5.3 $(T,e_T) \leqslant (S,e_S)$ を essential とする. 写像 $\Gamma_T : H^*(S,k) \to H^*(S,k)$ を

$$\Gamma_T : \zeta \mapsto \zeta + \mathrm{tr}^S\,\mathrm{res}_T\,{}^{x_T}\zeta$$

により定義する.

次の命題が鍵となる事実である. 証明には補題 5.7(3) の条件を用いる.

命題 5.8 $(T,e_T) \leqslant (S,e_S)$ が essential ならば $\mathrm{res}_T\,\Gamma_T\left(H^*(S,k)^{N_S\cap N_T}\right) \leqslant H^*(T,k)^{N_T}$. 特に, $\mathrm{res}_T\,\mathrm{Im}\,\Gamma_T\circ\Delta \leqslant H^*(T,k)^{N_T}$.

命題 5.9 $T, U < S$ を (p,p) 型で $T \neq U$ とする. $(T,e_T), (U,e_U) \leqslant (S,e_S)$ がともに essential ならば

$$\Gamma_U\circ\Gamma_T = \Gamma_T\circ\Gamma_U : \zeta \mapsto \zeta + \mathrm{tr}^S\,\mathrm{res}_T\,{}^{x_T}\zeta + \mathrm{tr}^S\,\mathrm{res}_U\,{}^{x_U}\zeta.$$

定義 5.4 $(T_1,e_1),\ldots,(T_l,e_l) \leqslant (S,e_S)$ を essential subpairs の全部とする. 写像 $\Gamma_{T_1}\circ\cdots\circ\Gamma_{T_l}\circ\Delta : H^*(S,k) \to H^*(S,k)$ を Tr^B と定義する. すなわち, $\zeta \in H^*(S,k)$ に対して (命題 5.9 により)

$$\mathrm{Tr}^B(\zeta) = (\Gamma_{T_1}\circ\cdots\circ\Gamma_{T_l}\circ\Delta)(\zeta) = \Delta(\zeta) + \sum_{j=1}^{l} \mathrm{tr}^S\,\mathrm{res}_{T_j}\,{}^{x_{T_j}}\Delta(\zeta).$$

命題 5.8, 5.9 により

命題 5.10 $\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}^B \leqslant H^*(G,B;S_\gamma)$.

次の図式は可換であることがわかる.

$$\begin{tikzcd}
H^*(G,B;S_\gamma) \arrow[rr, "\cdot|I_G(S,e_S)|"] \arrow[dr, hook] & & H^*(G,B;S_\gamma) \\
& H^*(S,k) \arrow[ur, "\mathrm{Tr}^B"'] &
\end{tikzcd}$$

ゆえに, 次の結論を得る.

定理 5.11 $\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}^B = H^*(G,B;S_\gamma)$.

定理 5.12 B の source 多元環 $ikGi$ が引き起こす写像 $t : H^*(S,k) \to H^*(S,k)$ は $\mathrm{Tr}^B : H^*(S,k) \to H^*(S,k)$ と一致し, 従って, $\mathrm{Im}\,t = H^*(G,B;S_\gamma)$ が成り立つ.

参考文献

[1] H. Kawai and H. Sasaki, Cohomology algebras of 2-blocks of finite groups with defect groups of rank two, J. Algebra **306** (2006), no. 2, 301–321.

[2] B. Külshammer, T. Okuyama, and A. Watanabe, A lifting theorem with applications to blocks and source algebras, J. Algebra **232** (2000), 299–309.

[3] M. Linckelmann, On derived equivalences and local structure of blocks of finite groups, Turkish J. Math. **22** (1988), 93–107.

[4] ———, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.

[5] M. Linckelmann, Introduction to fusion systems, Group representation theory, EPFL Press, Lausanne, 2007, pp. 79–113.

[6] H. Nagao and Y. Tsushima, Representations of finite groups, Academic Press, New York, London, 1989.

[7] T. Okuyama and H.Sasaki, A note on module structures of source algebras of block idealsof finite groups, preprint.

[8] L. Puig, Pointed groups and construction of modules, J. Algebra **116** (1988), 7–129.

[9] ———, The hyperfocal subalgebra of a block, Invent. Math. **141** (2000), 365–397.

[10] A. Ruiz and A. Viruel, The classification of p-local finite groups over the extraspecial group of order p^3 and exponent p, Math. Z. (2004), 45–65.

[11] H. Sasaki, Cohomology of block ideals of finite group algebras and stable elements, Algebr. Represent. Theory, online-first (2012), DOI: 10.1007/s10468-012-9345-3.

[12] H. Sasaki, Cohomology of block ideals of finite group algebras and stable elements, Algebr. Represent. Theory **16** (2013), 1039–1049.

[13] ———, Source algebras and cohomology of block ideals of fintie group algebras, Proc. 46 Symp. Ring Theory and Representation Theory (I. Kikumasa, ed.), 2014, pp. 209–215.

[14] R. Stancu, Control of fusion in fusion systems, J. Algebra Appl **5** (2006), 817–837.

[15] J. Thévenaz, G-algebras and modular representation theory, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 1995.

[16] A. Watanabe, The number of irreducible Brauer characters in a p-block of a finite group with cyclic hyperfocal subgroup, J. Algebra (2014), 167–183.