数理解析研究所講究録
第2062巻 2018年 60-67



# Right-angled Artin 群の間の埋め込みに関する障害について

広島大学大学院理学研究科数学専攻　片山 拓弥 *
Takuya Katayama
Department of Mathematics
Hiroshima University

本稿は right-angled Artin 群の間の埋め込みの障害について概説し，問題を提示するものである．

## 1 導入

$\Gamma$ を（単純な）有限グラフとし，$V(\Gamma)=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を $\Gamma$ の頂点集合，$E(\Gamma)$ を $\Gamma$ の辺集合とする．このとき，$\Gamma$ 上の right-angled Artin 群（RAAG）とは，次の群表示によって与えられる群である:

$$A(\Gamma)=\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \mid [v_i, v_j]=1 \text{ if } \{v_i, v_j\} \in E(\Gamma)\rangle.$$

例えば，有限階数の自由アーベル群（完全グラフ上の RAAG）と有限階数の自由群（辺のないグラフ上の RAAG）は RAAG の例である．また，有限グラフの同型類と RAAG の同型類は 1 対 1 に対応することが知られており，RAAG は自由群と自由アーベル群の中間に位置する群である．

よく知られているように，有限階数の自由アーベル群の（有限生成）部分群は再び有限階数の自由アーベル群であり，有限階数の自由群の有限生成部分群は再び有限階数の自由群である．RAAG の間の埋め込みの研究は，このような古典的な研究から始まっていると言っていいだろう．上記の特別な RAAG では，RAAG の有限生成部分群はまた RAAG である，という構図が成り立っている．一般の RAAG について同様のことを最

* tkatayama@hiroshima-u.ac.jp

初に研究したのは Baudisch の論文 [2] であり，そこでは RAAG の 2 元が生成する部分群は再び RAAG，すなわち無限巡回群か，階数 2 の自由アーベル群か，階数 2 の自由群のいずれかである，ということが示されている．ところが，RAAG の一般の有限生成部分群は必ずしも RAAG でない—実際，RAAG の有限生成部分群として RAAG でないものが存在する—ということが Droms（有限生成であるが有限表示ではない部分群を発見）らによって明らかにされた．現在では RAAG の有限生成部分群の研究として色々なものをあげることができるが，ここでは深く立ち入らない．一つの大きな成果として，Agol [1] と Wise [12] により，有限体積をもつ非常に多くの完備 3 次元双曲多様体の基本群が RAAG に埋め込まれているということが知られている．

RAAG の間の埋め込みの研究は，“与えられた 2 つの RAAG の間に埋め込みが存在するか否かを決定せよ”（cf. [8]）という古典的で素朴な問いに根差したものであるが，Baudisch の研究以降この方向の研究は 30 年ほど沈黙を保った．しかし近年になって Kim-Koberda [8] が写像類群の古典的な手法を RAAG の間の埋め込みの研究に持ち込み，発展のための口火を切った．そして RAAG の間の埋め込みの研究の土台—定理 2.1 及び定理 4.6—が与えられた．この 2 つの定理によって埋め込みの研究の指針が与えられたわけであるが，埋め込みの存在を言う研究も非存在を言う研究もまだまだやるべきことが非常に多くある．本稿は，まだ組織的な研究の少ない，埋め込みの非存在の研究に焦点をあて，結果の紹介と問題の提示を行う．

本稿は次のような構成で書かれている．2 章では，RAAG の間の埋め込みを研究するうえで基本的な役割を果たす extension graph について簡単な紹介を行う．3 章は，埋め込みの障害について知られている結果を紹介することに捧げられる．埋め込みの障害に関する問題の提示は 4 章において行われる．

## 2 Kim-Koberda の extension graph

以下は本稿全体に渡って使われているグラフの記号である．

- $K_n$： $n$ 頂点からなる完全グラフ，すなわち，$K_n$ は $n$ 個の頂点からなり，2 つの異なる頂点のペアは必ず辺を張る．
- $P_n$: $n$ 頂点からなる道グラフ，すなわち，$P_n$ は $n$ 個頂点からなり，かつ単位区間と同相である．
- $C_n$: $n$ $(\geq 3)$ 頂点からなる巡回グラフ，すなわち，$C_n$ は $n$ 個頂点からなり，かつ単位円周と同相である．

有限グラフ $\Gamma$ に対して，その extension graph $\Gamma^e$ とは，$A(\Gamma)$ の語のうち，$\Gamma$ の頂点と共役なもの全てからなる集合を頂点集合とし，その 2 つの語が辺を張るのは可換なときかつその時に限る，として定義されるグラフである．また，グラフ $\Lambda$ からグラフ $\Gamma$ へ誘導部分グラフとしての埋め込みが存在するとき，$\Lambda \leq \Gamma$ と書くことにする．

次の定理にあるように，extension graph は RAAG の間の埋め込みを与える．

**定理 2.1** ([8])**.** $\Lambda$, $\Gamma$ を有限グラフとする．もし $\Lambda \leq \Gamma^e$ ならば，$A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$.

定理 2.1 が一般にどれほどの埋め込みを与えているかは気になるところであるが，これについては次の事実が知られている．

**定理 2.2** ([4], [8])**.** 次の (1)，(2) が成り立つ．

(1) $\Lambda, \Gamma$ を有限グラフとする．もし $\Gamma$ が triangle-free (i.e., $C_3 \not\leq \Gamma$) ならば，$A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ なることと $\Lambda \leq \Gamma^e$ なることは同値である．
(2) $A(C_5) \hookrightarrow A(P_8^c)$ であるが，$C_5 \not\leq (P_8^c)^e$.

定理 2.2(1) において，$\Gamma$ が triangle-free であることと $A(\Gamma)$ に含まれる自由アーベル群の最高階数が 2 であることは同値であることに注意しておく．このような特別な RAAG $A(\Gamma)$ への埋め込みの存在性について考えるときには $\Gamma^e$ を見れば十分である，ということを定理 2.2(1) は主張している．一方，定理 2.2(2) は，extension graph からは誘導されない埋め込みが一般の状況では存在することを主張している．このような extension graph から誘導されない埋め込みは一般には非常に多く存在すると考えられる．この方向の研究については，[7]，[10]，[11] が知られている．

次の定理は，有限グラフ $\Lambda$ と $\Gamma$ が与えられたときに，$\Lambda \leq \Gamma^e$ と $\Lambda \not\leq \Gamma^e$ のいずれが成立するかという問題は決定可能であることを主張している．

**定理 2.3** ([3])**.** $\Lambda$ と $\Gamma$ を有限グラフとし，$n$，$M$，$K$ をそれぞれ $\Lambda$ の頂点数，$\Gamma$ 頂点数，$K$ を $\Lambda$ の連結成分の数とし，$R := 4Kn^2M^{K+1}$ とおく．もし $\Lambda \leq \Gamma^e$ ならば，$\Lambda \leq B(\Gamma, R)$．ここで $B(\Gamma, R)$ は，$\Gamma^e$ の頂点のうち $A(\Gamma)$ における word length が $R$ 以下の頂点たちが誘導する $\Gamma^e$ の誘導部分グラフである．

$B(\Gamma, 1) = \Gamma$ に注意しておこう．また，定理で与えられている定数 $R$ は特別なケースにおいては最良でない．例えば，$\Lambda$ が初めから $\Gamma$ の誘導部分グラフなら，$R = 1$ ととれるからである．

# 3 埋め込みの障害

この章では RAAG の間の埋め込みに関する非自明な障害を解説する．まず，知られている埋め込みの障害を以下にリストアップしておく．

- 他の RAAG に埋め込まれるときにその RAAG に制限を与える RAAG.
- 有限生成であるが有限表示でない群.
- グラフの彩色数.

これらを上の順番通りに説明していこう．

まず，埋め込まれるときに制限を与える RAAG について述べる．有限グラフ $\Lambda$ が linear forest であるとは，$\Lambda$ の各連結成分が道グラフのときをいう．次の定理は linear forest 上の RAAG の埋め込みに関する分類定理であるが，障害としても価値があるので紹介する．

**定理 3.1** ([6]). $\Lambda$ を linear forest の補グラフとし，$\Gamma$ を有限グラフとする．このとき，$A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ なるための必要十分条件は，$\Lambda \leq \Gamma$ なることである．

この定理を具体的な埋め込みの問題に適用してみる．

**例 3.2.** 自然数 $n, m \geq 3$ が $n < m$ を満たすとする．この場合に $A(C_m^c)$ が $A(C_n^c)$ に埋め込まれないことを定理 3.1 を使って証明してみよう．そこで $A(C_m^c) \hookrightarrow A(C_n^c)$ と仮定して矛盾を導く．まず，$P_{m-1} \leq C_m$ であるから $P_{m-1}^c \leq C_m^c$ である．従って，定理 3.1 より $A(P_{m-1}^c) \hookrightarrow A(C_m^c) \hookrightarrow A(C_n^c)$ である．よって再び定理 3.1 より，$P_{m-1}^c \leq C_n^c$ であるが，これは $n < m$ に反する．以上により $A(C_m^c)$ は $A(C_n^c)$ に埋め込まれない．

一方で，$n \geq m$ のときには，$A(C_m^c) \hookrightarrow A(C_n^c)$ が成り立つ [7].

定理 3.1 は次の定理を特別な場合に限って精密化したものである．

**定理 3.3** ([3]). $\Lambda$ を forest の補グラフとし，$\Gamma$ を有限グラフとする．このとき，$A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ なるための必要十分条件は，$\Lambda \leq \Gamma^e$ なることである．

この定理と，定理 2.3 によって，forest の補グラフ上の RAAG から別の RAAG への埋め込みがあるかないかを決定することが原理的にはできる．

次に，有限生成であるが有限表示でない部分群について解説する．

**定理 3.4** ([5]). $\Lambda$ を有限グラフとする．もし $\Lambda$ が長さ 4 以上の誘導巡回グラフをもつならば，$A(\Lambda)$ は部分群として有限生成だが有限表示でない群をもつ．

実例に適用してみよう．

**例 3.5.** $A(P_4)$ が $A(C_5)$ を部分群にもたないことを証明してみよう．定理 3.4 により $A(C_5)$ は部分群として有限生成だが有限表示でない群をもつ．一方，$A(P_4)$ は 3 次元球面から長さ 4 の chain link を除いて得られる 3 次元多様体の基本群である（cf. [5]）．従って $A(P_4)$ の任意の有限生成部分群は有限表示をもつ．以上により，$A(P_4)$ は $A(C_5)$ を部分群としてもたない．

この例は，定理 3.1 の適用限界を示しているように思われる．例 3.5 により，$A(P_4)$ は $A(C_5)$ を部分群として含まないことが分かっているが，今度は定理 3.1 を使って同じことを考えてみよう．$C_5$ の補グラフは自分自身であり，$P_4$ の補グラフも自分自身である．すぐに分かるように，$C_5$ に誘導部分グラフとして含まれる linear forest は，$P_4$ にも誘導部分グラフとして含まれる．従って，例 3.2 のような（標準的とも思える）使い方では $A(P_4)$ が $A(C_5)$ を持つかどうかは分からない．

最後の障害としてグラフの彩色数を紹介する．グラフ $\Gamma$ の頂点彩色に関する彩色数を $c(\Gamma)$ と記す．

**定理 3.6** ([8]). 任意の有限グラフ $\Gamma$ に対して $c(\Gamma^e) = c(\Gamma)$ が成り立つ．

この定理と定理 3.3 を組み合わせることで結論の情報は落ちるが扱いやすい系が得られる．

**系 3.7.** $\Lambda$ を forest の補グラフとする．このとき，$A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ が成り立つ任意の有限グラフ $\Gamma$ に対して，$c(\Lambda) \leq c(\Gamma)$ が成り立つ．

彩色数と埋め込みの関係の研究のアイデア自体は写像類群の研究から来たのではないかと思われる．重要なのは彩色数が有限であるグラフの "clique graph" の彩色数もまた有限であるという事実 [9] であると著者は考えている．これにより，"forest の補グラフ" という仮定のない，一般の RAAG の埋め込みの障害を構成できるが，これに関する有効な研究はまだない．

## 4 今後の課題

今後の課題について述べよう．次の問題は，与えられた RAAG が閉双曲的閉曲面の基本群を部分群にもつか否かという問題と深く関わっており，重要な問題であると思われる．この問題の性質を満たすグラフは現状では，“閉双曲的曲面の基本群を部分群として持たないと想定されている RAAG の定義グラフ”である．

**問題 4.1.** 次の性質をもつ有限グラフ $\Gamma$ を決定せよ．任意の $m \geq 5$ に対して，$A(\Gamma)$ は $A(C_m)$ を部分群にもたない．

実際に上の問題の性質をもつグラフの例を与えておこう．

**命題 4.2.** 有限グラフ $\Gamma$ が $P_4$ を誘導部分グラフに持たないならば，任意の $m \geq 5$ に対して $A(\Gamma)$ は $A(C_m)$ を部分群にもたない．

**証明.** ある $m \geq 5$ に対して $A(\Gamma)$ は $A(C_m)$ を部分群にもつならば，$\Gamma$ は $P_4$ を誘導部分グラフに持つことを示す．まず，$P_4 \leq C_m$ であるから，$A(P_4) \hookrightarrow A(C_m)$ である．従って，$A(P_4) \hookrightarrow A(\Gamma)$ が得られる．一方，$P_4 = P_4^c$ であるから $P_4$ は linear forest の補グラフであって，定理 3.1 より $P_4 \leq \Gamma$. □

$A(P_4)$ も任意の $m \geq 5$ に対して $A(C_m)$ を部分群にもたないので，上の命題は問題 4.1 の完全な解答にはならないことに注意しておく．

次の問題は問題 4.2 と類似の問題ではあるが，より具体的である．

**問題 4.3.** $m \geq 5$，$n$ を正整数とする．$A(C_m^c)$ が $A(P_n^c)$ に埋め込まれるかどうかを決定せよ．

例えば，$A(C_5^c) = A(C_5)$ が $A(P_n^c)$ $(5 \leq n \leq 7)$ に埋め込まれるか否かはまだ決定されていないと思われる．一般の場合には，次の定理が知られている．

**定理 4.4** ([6], [11]). 正整数 $m, n$ に対して，$2m - 2 \leq n$ ならば $A(C_m^c) \hookrightarrow A(P_n^c)$. 逆に，$A(C_m^c) \hookrightarrow A(P_n^c)$ ならば $m - 1 \leq n$.

定理 3.3 は色々な応用をもつので，一般化できるかできないかを検討することは有意義であると思われる．

**問題 4.5.** 次の性質をもつ有限グラフ $\Lambda$ を決定せよ．$A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ が成り立つ任意の有

限グラフ $\Gamma$ に対して，$\Lambda \leq \Gamma^e$ が成り立つ．

定理 3.1 についても同様の問題を考えることができるが，これについては既に解かれている [6]．また，Casals-Ruiz は定理 3.3 を得るために次の定理を用いている．従って，もし forest の補グラフ以外にも上の性質を満たすグラフがあるとすれば，次の定理から得られる可能性が十分にある．

**定理 4.6** ([8])**.** もし $A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ ならば，有限な誘導部分グラフ $\bar{\Gamma} \leq \Gamma^e$ と埋め込み $\psi : A(\Lambda) \hookrightarrow A(\bar{\Gamma})$ $(\hookrightarrow A(\Gamma))$ が存在して次が成り立つ：任意の頂点 $v \in V(\Lambda)$ に対して，$\psi(v) \in A(\bar{\Gamma})$ の $A(\bar{\Gamma})$ における最小表現 $g_{i_1}g_{i_2}\cdots g_{i_n}$ に現れる $\bar{\Gamma}$ の頂点 $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_n}$ は互いに可換である．

また，問題 4.5 の性質を満たすグラフは次の問題の性質をも満たす．

**問題 4.7.** 次の性質をもつ有限グラフ $\Lambda$ を決定せよ．$A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ が成り立つ任意の有限グラフ $\Gamma$ に対して，$c(\Lambda) \leq c(\Gamma)$ が成り立つ．

グラフの不変量と埋め込みの問題を結びつけるのも面白いだろう．ここでは頂点数との関係について問題を 1 つ提示しておく．

**問題 4.8.** 次の性質をもつ有限グラフ $\Lambda$ を決定せよ．$A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ と $|\Lambda| \geq |\Gamma|$ が同時に成り立つ有限グラフ $\Gamma$ は $\Lambda$ に限る．ここで，$|\cdot|$ はグラフの頂点数を表す．

定理 3.1 により，linear forest の補グラフは自動的にこの性質をもつことに注意せよ．また，証明なしで次の例を紹介しておく．

**命題 4.9.** $\Gamma$ を有限グラフとする．もし $A(P_1 \sqcup K_n) \hookrightarrow A(\Gamma)$ かつ $|P_1 \sqcup K_n| (= 1+n) \geq |\Gamma|$ ならば，$\Gamma = P_1 \sqcup K_n$.

グラフ $P_1 \sqcup K_n$ は forest の補グラフであるので，この方向から例を一般化することもできるだろう．実際，一部の forest の補グラフはこの性質をもつことが証明できる．しかし一般の forest の補グラフがこの性質をもつか否かはまだ分かっていない．また，forest の補グラフ以外のグラフはどうであるかいついては著者は何も知らない．

埋め込みの障害と言えるほどの結果がまだ発表されていないということと，著者の調査不足もあって，完備双曲多様体の基本群から RAAG への埋め込みについて何も書くことができなかった．しかし双曲多様体の基本群は埋め込みの障害の潜在的ではあるが非常に有力な候補である．これについては別の機会に詳しく書きたい．

## 謝辞

京都大学数理解析研究所にて開催された研究集会 “離散群と双曲空間のトポロジーと解析” で著者が講演した内容の一部と，それを発展させた論文 [6] が講究録執筆の動機となっている．その研究集会を組織してくださり，著者に講演の機会と講究録執筆の機会をくださった藤井道彦先生に心よりお礼申し上げます．

## 参考文献

[1] I. Agol, ‘The virtual Haken conjecture’, *Doc. Math.* 18 (2013) 1045–1087.

[2] A. Baudisch, ‘Subgroups of semifree groups’, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 38 (1981), no. 1-4, 19–28.

[3] M. Casals-Ruiz, ‘Embeddability and universal equivalence of partially commutative groups’, *Int. Math. Res. Not.* (2015) 13575–13622.

[4] M. Casals-Ruiz, A. Duncan and I. Kazachkov, ‘Embeddings between partially commutative groups: two counterexamples’, *J. Algebra* 390 (2013) 87–99.

[5] C. Droms, ‘Graph groups, coherence, and three-manifolds’, *J. Algebra*, 106 (1987) 484–489.

[6] T. Katayama, ‘Right-angled Artin groups and full subgraphs of graphs’, preprint, available at arXiv:1612.01732.

[7] S. Kim, ‘Co-contractions of graphs and right-angled Artin groups’, *Algebr. Geom. Topol.* 8 (2008) 849–868.

[8] S. Kim and T. Koberda, ‘Embedability between right-angled Artin groups’, *Geom. Topol.* 17 (2013) 493–530.

[9] S. Kim and T. Koberda, ‘An obstruction to embedding right-angled Artin groups in mapping class groups’, *Int. Math. Res. Not.* 2014 (2014) 3912–3918.

[10] S. Kim and T. Koberda, ‘Anti-trees and right-angled Artin subgroups of braid groups’, *Geom. Topol.* 19 (2015) 3289–3306.

[11] E. Lee and S. Lee, ‘Path lifting properties and embedding between RAAGs’, *J. Algebra* 448 (2016) 575–594.

[12] D. Wise, ‘The structure of groups with a quasiconvex hierarchy’, preprint (2011) available at http://www.math.mcgill.ca/wise/papers.html.