数理解析研究所講究録
第2062巻 2018年 94-107

A fixed point property of random groups

井関 裕靖 (慶應義塾大学・理工学部)
Hiroyasu Izeki
Faculty of Science and Technology, Keio University

2016年6月23日

1 序

本稿では, ランダム群の固定点性質に関して, Marc Bourdon 氏 (Lille 大学) との共同研究, および納谷信氏 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科), 近藤剛史氏 (鹿児島大学理学部) との共同研究により得られた結果を, その背景を含めて紹介する.

以下, 群としては可算離散群を考えることにする. 群 Γ が距離空間 (Y, d) への等長的作用に対する**固定点性質**をもつとは, Γ の Y への任意の等長的作用が固定点をもつ, すなわち, (Y, d) の等長変換群 $\mathrm{Isom}(Y, d)$ への任意の準同型写像 $\rho\colon \Gamma \longrightarrow \mathrm{Isom}(Y, d)$ に対し, ある $p \in Y$ が存在し, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し $\rho(\gamma)p = p$ をみたすことをいう. 以下, 距離空間 $Y = (Y, d)$ に対する固定点性質を $F(Y)$ と略記し, 「Γ は性質 $F(Y)$ をもつ」ということにする.

$\rho(\Gamma)$ の固定点 p が存在するとき, 任意の $q \in Y$, $\gamma \in \Gamma$ に対し $d(p, q) = d(\rho(\gamma)p, \rho(\gamma)q) = d(p, \rho(\gamma)q)$ が成り立つので, q を通る $\rho(\Gamma)$ の軌道 $\rho(\Gamma)q$ は p を中心とした距離球面上に存在する. とくに, 任意の $\rho(\Gamma)$ 軌道は有界である. 固定点性質を問題にするとき, Hilbert 空間, 単連結完備な非正曲率距離空間などの比較的大きな距離空間に対する無限群の等長的作用を考察の対象とすることが多い. その場合, すべての軌道が有界になってしまうような作用はほとんど自明な作用と言ってよい. 群 Γ がこのような大きな空間 (Y, d) に対して固定点性質 $F(Y)$ をもつということは, Γ は (Y, d) に対しある意味で自明な作用しかもたないということを意味している.

例えば, 群 Γ の「形」が距離空間 (Y, d) の形とは著しく異なり, かつ Γ が「硬い」と, Γ の作用の軌道は (Y, d) にうまく広がれそうにない. このようなときには, Γ が $Y = (Y, d)$ に対する固定点性質 $F(Y)$ をもつことが想像される. 実際, 固定点性質は, 群の硬さ (剛性) と深く関係した性質として理解されている. 一方で, 種々の距離空間に対する固定点性質はその

群の代数的な性質とも深く関わっている. 例えば, 距離空間 (Y, d) として樹木 A をとったとき, A に対する固定点性質は Serre の性質 $F(A)$ と呼ばれており, 群の融合積への分解と関係している ([29]). § 2 では, 距離空間として Hilbert 空間, あるいは L^p 空間といった無限次元の空間をとり, これらの空間に対する固定点性質について, 知られている事実の概要を紹介する.

2 固定点性質と超剛性

2.1 性質 $F(\mathcal{H})$

$\mathcal{H}$ を (無限次元, 複素または実)Hilbert 空間とする. 固定点性質を考える場合は, 群 Γ の $\mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ への準同型を考えるわけだが, $\mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ の線形等長変換 (実 Hilbert 空間とみなしたときの直交変換) と平行移動から生成される. 一方, Γ から複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ のユニタリ変換群への準同型は, Γ の**ユニタリ表現**と呼ばれ, Γ のユニタリ表現 π による像が恒等変換のみからなるとき, π は**自明表現**と呼ばれる.

定義 2.1 (Kazhdan の性質 (T) [19]). Γ が **Kazhdan の性質 (T)** をもつとは, Γ のユニタリ表現のなす空間において, 自明表現が Fell 位相に関して孤立していることをいう.

ここでは Fell 位相の定義は省略するが ([3] 参照), 「自明表現がユニタリ表現の集合の中で孤立している」という性質は, 自明表現の変形不可能性を意味しているという点で, 群の代数的なある種の「硬さ」を示唆する性質だと考えてよい. 実は, この性質は $F(\mathcal{H})$ と同値になることが知られている:

定理 2.2 (Delorme [8], Guichardet [12]). Γ が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への固定点性質 $F(\mathcal{H})$ をもつことと, Γ が Kazhdan の性質 (T) をもつことは同値である.

ここで, $\mathcal{H}$ が複素 Hilbert 空間であるか, 実 Hilbert 空間であるかは本質的な問題ではない (実 Hilbert 空間の場合は複素化して考えればよい). さらに, 次も比較的容易に示すことができる.

命題 2.3. Γ の任意のユニタリ表現 π に係数をもつ 1 次コホモロジー $H^1(\Gamma, \pi)$ が 0 であることと, Γ が性質 $F(\mathcal{H})$ をもつことは同値である.

1 次コホモロジーの消滅は, しばしば変形空間の接空間の自明性と関係するが, §1 で述べたように, $F(\mathcal{H})$ も幾何学的な意味で「群が硬い」ことを表す性質であることに注意しよう. 後で触れるように, Kazhdan の性質 (T) あるいは性質 $F(\mathcal{H})$ は, 超剛性と呼ばれる, 群の等長的作用に関する非常に強い剛性と深く関わっていることが知られている. 性質 $F(\mathcal{H})$ をもつ群, もたない群の例を挙げておく. 詳しい説明は [3] を参照されたい.

例 1. 有限群 Γ は性質 $F(\mathcal{H})$ をもつ. 実際, Γ の任意の作用 ρ に対し, $p \in \mathcal{H}$ を任意にとり, p の $\rho(\Gamma)$ 軌道 $\rho(\Gamma)p$ の重心 p_0 をとれば, $\rho(\Gamma)$ の作用が等長的であることから p_0 が固定点となる.

以下, 断らない限り Γ は無限群とする.

例 2. 無限巡回群 $\mathbb{Z}$ は性質 $F(\mathcal{H})$ をもたない. 実際, $\mathbb{Z}$ を $k\mathbf{v} \in \mathcal{H}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$) が与える平行移動のなす群にうつす準同型 ρ をとれば, ρ が与える Γ の作用は固定点をもたない. さらに, Γ が $\mathbb{Z}$ への全射準同型をもつならば, Γ は ρ を通して $\mathcal{H}$ に固定点をもたない作用をする. したがって, このような Γ は性質 $F(\mathcal{H})$ をもたない. 例えば, 自由群は性質 $F(\mathcal{H})$ をもたない.

例 3. アーベル群に近い群である, べき零群, 可解群, それらを含む従順群 (amenable groups) も性質 $F(\mathcal{H})$ をもたない.

例 4. $SO(n,1)$, $SU(n,1)$ の無限離散部分群は性質 $F(\mathcal{H})$ をもたない.

$SO(n,1)$, $SU(n,1)$ は階数 1 の非コンパクト単純 Lie 群で, $SO(n,1)$ は実双曲空間 $\mathbb{H}^n$ の等長変換群, $SU(n,1)$ は複素双曲空間 $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ の等長変換群とみなすことができる. これら以外の階数 1 の非コンパクト単純 Lie 群は $Sp(n,1)$, F_4^{-20} に限ることが知られている. これらは, それぞれ四元数双曲空間, ケーレー双曲平面の等長変換群とみなすことができる. いずれも負曲率の双曲的空間である. Lie 群 G の離散部分群 Γ が**格子**であるとは, 商空間 $\Gamma\backslash G$ が G の Haar 測度から誘導される有限な体積をもつことをいう. また, $\Gamma\backslash G$ がコンパクトになるとき, Γ は**一様格子**とよばれる. K を G の極大コンパクト部分群とすると, 今の場合, $X = G/K$ は Riemann 対称空間になる. Γ の G への左からの作用は X への作用を誘導する. Γ が格子であること, 一様格子であることは, それぞれ $\Gamma\backslash X$ が有限な Riemann 体積をもつこと, および $\Gamma\backslash X$ がコンパクトになることと同値である. G は非コンパクトで G 上の Haar 測度は無限測度なので, とくに, G の格子 Γ は G の無限群離散部分群である. 上の例 4 によれば, $SO(n,1)$ および $SU(n,1)$ の格子は性質 $F(\mathcal{H})$ をもたない. しかし, 階数が同じ 1 であっても, $Sp(n,1)$ および F_4^{-20} においては状況は著しく異なっている.

例 5. $Sp(n,1)$ および F_4^{-20} の格子は性質 $F(\mathcal{H})$ をもつ.

さらに, 次が知られている.

例 6. G を階数が 2 以上の非コンパクト単純 Lie 群 (例えば $SL(n,\mathbb{R})$, $n \geq 3$), Γ を G の格子とする. Γ は性質 $F(\mathcal{H})$ をもつ.

例 5 および例 6 に現れる格子は, 性質 $F(\mathcal{H})$ とともに, 後で述べる超剛性をもつことが知られている. 階数が 2 以上の Lie 群の格子はもれなく性質 $F(\mathcal{H})$ をもつが, 階数 1 の格子については微妙に異なる様相を呈していることに注意する. これは, 次節以後で見る L^p 空間への等長的作用, あるいは Hilbert 空間へのアファイン作用に関する固定点性質にも見られ

る現象である.

2.2 性質 $F(L^p)$

Hilbert 空間への等長的作用に関する固定点性質 $F(\mathcal{H})$ の一つの一般化は, L^p 空間に対する固定点性質 $F(L^p)$ である. $F(\mathcal{H})$ は $p=2$ に対する $F(L^p)$ であるが, $F(L^2)$ をもつ群は十分 2 に近い p に対しても $F(L^p)$ をもつことが知られている:

定理 2.4 (Fisher-Margulis, Bader-Furman-Gelander-Monod [1]). Γ が $F(\mathcal{H})$ をもつなら, Γ に依存するある $\varepsilon > 0$ が存在し, Γ は $p \in [1, 2+\varepsilon)$ に対し $F(L^p)$ をもつ.

証明は, 2 の近くでの p の摂動に関して固定点性質が安定であることを示すことにより与えられる. その証明からすると, どの範囲の p に対して $F(L^p)$ をもつかが, その群の $F(\mathcal{H})$ の強さを表していると考えてもよさそうである. すなわち, Γ が広い範囲の p に対して性質 $F(L^p)$ をもつなら Γ の $F(\mathcal{H})$ は非常に強く, Γ が比較的 2 に近い p に対してしか $F(L^p)$ をもたないなら Γ の $F(\mathcal{H})$ はさほど強くない.

さきほどは, どのような単純 Lie 群の格子が $F(\mathcal{H})$ をもつかを見たが, この $F(L^p)$ に注目すると, Lie 群の階数による微妙な差が次のような形で鮮明に捉えられる.

定理 2.5 (Pansu [27]). Γ が $Sp(n,1)$ の一様格子なら, Γ は $p > 4n+2$ に対し $F(L^p)$ をもたない.

一方,

定理 2.6 (Bader-Furman-Gelander-Monod [1]). Γ が階数 2 以上の単純リー群の格子なら, Γ は任意の $p \in [1, \infty)$ に対し $F(L^p)$ をもつ.

前節の例やこれらの定理から, 階数 1 の単純 Lie 群の格子 Γ は $F(\mathcal{H})$ をもたないか, 弱い $F(\mathcal{H})$ しかもたないが, 階数 2 以上の単純 Lie 群の格子は非常に強い $F(\mathcal{H})$ をもつということが読み取れる. 階数 1 の非コンパクト Lie 群の一様格子は, 双曲的空間に固有不連続かつ余コンパクトに作用するので, Gromov の意味での双曲群になっている. 実は, 双曲群は限られた範囲の p に対してしか性質 $F(L^p)$ をもち得ないことが知られている.

定理 2.7 (Yu [33]). Γ を Gromov 双曲群とする. 十分大きい p に対し, Γ は $F(L^p)$ をもたない.

この定理における p の精密な評価をし, 幾何学的な意味を明らかにしたのが次の定理である. この定理は特別な場合として定理 2.5 を含んでいる.

定理 2.8 (Bourdon-Pajot [6], Bourdon [4]). Γ を Gromov 双曲群とし, $\mathrm{Confdim}\,\partial\Gamma$ で Γ

の境界 $\partial\Gamma$ の共形次元を表す. $p > \mathrm{Confdim}\,\partial\Gamma$ に対し, Γ は $F(L^p)$ をもたない.

双曲群は, その典型例が自由群であり, 次の章で述べるような意味で非常に一般的な群でもある. 上の定理は, (Lie 群の格子のような非常に特殊な群はある程度強い $F(\mathcal{H})$ をもち得るのだが) 一般的な性質である双曲性をもつ群はそこまで強い $\mathcal{F}(H)$ をもたない (さらに言うと, 双曲性が強い $F(\mathcal{H})$ をもつことを妨げている) ということを主張している, と考えると理解しやすいだろう.

2.3 Hilbert 空間へのアファイン作用に関する固定点性質

距離空間としては Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ をとり, 考える作用を等長的な作用から少し広げてアファイン作用とすることで, 性質 $F(\mathcal{H})$ の一般化を与えることもできる.

定義 2.9 (アファイン変換). 変換 $\varphi\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が**アファイン変換**であるとは, ある $v \in \mathcal{H}$ と $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ が存在し, $\varphi(p) = Ap + v$, $p \in \mathcal{H}$, と表せることをいう. ここで, $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ の有界で可逆な線形変換のなす群である. $\mathrm{Aff}(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ のアファイン変換のなす群を表す.

注意 1. アファイン変換 $\varphi(p) = Ap + v$ の A が直交変換であることと φ が等長変換であることは同値である.

定義 2.10 (一様 C-Lipshitz 作用). $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{Aff}(\mathcal{H})$ が **一様に C-Lipschitz (uniformly C-Lipschitz)** であるとは, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $\rho(\gamma)\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が C-Lipschitz であること, すなわち $\rho(\gamma)$ の Lipschitz 定数が C 以下であることをいう. ρ が一様に C-Lipschitz であるとき, ρ は $\mathrm{UL}(C)$ であると略記する. ρ が $\mathrm{UL}(C)$ であるとき, ρ が与える Γ の作用は **$\mathrm{UL}(C)$ 作用**であるという.

注意 2. $\varphi(\gamma)$ と $\varphi(\gamma^{-1})$ がともに 1-Lipschitz なら $\varphi(\gamma)$ は等長変換であるから, Γ の作用が $\mathrm{UL}(1)$ 作用であることと等長作用であることは同値である. したがって, 性質 $F(\mathcal{H})$ は $\mathrm{UL}(1)$ 作用に関する固定点性質である.

次は Lipschitz 定数の摂動に関する考察から容易に示される:

命題 2.11. Γ が性質 $F(\mathcal{H})$ をもつなら, ある $C > 1$ が存在して Γ の $\mathcal{H}$ への任意の $\mathrm{UL}(C)$ 作用は固定点をもつ.

すなわち, 性質 $F(\mathcal{H})$ をもつ群は, 十分 1 に近い C に対する $\mathcal{H}$ への $\mathrm{UL}(C)$ 作用に関する固定点性質をもつ. 前節で見たことから, この C をどれだけ大きくとれるかが性質 $F(\mathcal{H})$ の強さと関係していることが推察される. 実際, Shalom により, 前節で紹介した結果と類似する以下の定理が証明されている.

定理 2.12 (Shalom). Γ を階数 2 以上の非コンパクト単純 Lie 群の格子とする. Γ の Hilbert 空間への任意の UL(C) 作用は固定点をもつ.

定理 2.13 (Shalom). Γ を $Sp(n,1)$ の格子とする. Γ はある $C>1$ に対し, $\mathcal{H}$ への固定点をもたない UL(C) 作用を許容する.

これらの結果も $F(L^p)$ の場合と同様に, 階数が 2 以上の非コンパクト単純 Lie 群の格子は強い $F(\mathcal{H})$ をもつ一方で, 階数 1 の非コンパクト単純 Lie 群の格子が $F(\mathcal{H})$ をもったとしてもそれは弱いものに過ぎないことを示唆している. さらに, $F(L^p)$ の場合の Yu の結果の類似が成立するだろう, というのが次の Shalom による予想である.

予想 2.14 (Shalom). Γ を双曲群とする. Γ はある $C\geq 1$ に対し, $\mathcal{H}$ への固定点をもたない UL(C) 作用を許容する.

Kazhdan の性質 (T)(あるいは性質 $F(\mathcal{H})$) の一般化 (強化) としては, 他にも Lafforgue による強化された Kazhdan の性質 (T) がある. Lafforgue [21] は, 種々の格子がその性質をみたすことを示す一方で, 双曲群がやはりこの性質をもたないことを証明している.

2.4 固定点性質と超剛性

ここまでに見てきた群の固定点性質は, 超剛性とよばれる群の非常に強い剛性と密接に関係している.

Margulis [22] は階数 2 以上の半単純 Lie 群の既約格子が数論性をもつことを示す (Selberg 予想を解決する) ために, 現在では Margulis 超剛性とよばれている定理を証明した. 詳細については [22], [34] をご覧頂くことにして, その特別な場合の主張を紹介しておく. p を素数または ∞ とし, $\mathbb{Q}_p$ で p 進体を表す. $p=\infty$ のときは $\mathbb{Q}_p=\mathbb{R}$ と約束する. $PGL(n,\mathbb{Q}_p)$ を $GL(n,\mathbb{Q}_p)$ のスカラー行列のなす部分群による商群とする. $PGL(n,\mathbb{Q}_p)$ には自然な位相が入り, 局所コンパクトな位相群となる. とくに, $PGL(n,\mathbb{Q}_p)$ には Haar 測度が存在し, Lie 群の場合と同様に格子および一様格子が定義される.

定理 2.15 (Margulis 超剛性). $m,n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ とし, p, r は素数または ∞ とする. Γ を $PGL(n,\mathbb{Q}_p)$ の格子, $\rho\colon\Gamma\longrightarrow PGL(m,\mathbb{Q}_r)$ を準同型とする. $\rho(\Gamma)$ が $PGL(m,\mathbb{Q}_r)$ において Zariski 位相に関して稠密ならば, 次のいずれかが成立する.

(1) r が素数で $\rho(\Gamma)$ は $PGL(m,\mathbb{Q}_r)$ の通常の位相に関してプレコンパクト.

(2) $p=r$ で ρ は全射準同型 $\tilde{\rho}\colon PGL(n,\mathbb{Q}_p)\longrightarrow PGL(m,\mathbb{Q}_r)$ に拡張される.

K を $PGL(m,\mathbb{Q}_r)$ の極大コンパクト部分群とすると, $Y=PGL(m,\mathbb{Q}_r)/K$ は $r=\infty$ のとき Riemann 対称空間, r が素数のときは Euclid 的ビルディングとよばれる非正曲率距

離空間となる．定理の主張中の (1) の場合は，$\rho(\Gamma)$ が極大コンパクト部分群に含まれるので，ρ が与える Γ の作用は対応する Y の点を固定する，ある意味で自明な作用である．一方，(2) の場合は，ρ が与える Γ の作用は $PGL(n, \mathbb{Q}_p)$ の Y への作用の制限になっている．このことは Γ の Y への非自明な作用が非常に限られたものになっていることを意味している．Corlette [7] は $Sp(n,1)$ および F_4^{-20} の格子の Lie 群への準同型に対し，同様の超剛性 (アルキメデス的超剛性) を証明した．その手法は調和写像を用いる幾何学的なものであった．Gromov-Schoen [11] は Corlette の手法をユークリッド的ビルディングへの調和写像へと拡張することにより，それらの格子の局所体上の代数群への準同型に関する超剛性を証明している．さらに，Mok-Siu-Yeung [23] および Jost-Yau [18] は独立に，調和写像を用いることにより，階数が 2 以上の単純 Lie 群の一様格子の，単連結，非正曲率完備 Riemann 多様体への等長的作用が本質的に一意であることを主張する「幾何学超剛性」を示している:

定理 2.16 (幾何学的超剛性)．G を階数が 2 以上の非コンパクト単純 Lie 群，Γ を G の一様格子とする．Y を非正曲率で単連結な完備 Riemann 多様体，$\rho\colon \Gamma \longrightarrow \mathrm{Isom}(Y)$ を準同型とすると，次のいずれかが成立する．

(1) $\rho(\Gamma)$ は Y の幾何学的コンパクト化 $Y \cup Y(\infty)$ に固定点をもつ．ここで，$Y(\infty)$ は Y の測地半直線の漸近類として定義される幾何学的境界を表す．

(2) K を G の極大コンパクト部分群とすると，$X = G/K$ から Y への (Riemann 計量の定数倍を除いて) 等長的かつ全測地的な ρ 同変埋め込み f が存在する．

Γ は G への左からの作用を通して $X = G/K$ に標準的な作用をもつ．$f\colon X \longrightarrow Y$ が ρ 同変写像であるとは，任意の $\gamma \in \Gamma$, $x \in X$ に対し $f(\gamma x) = \rho(\gamma) f(x)$ をみたすことをいう．定理の (2) の場合，Y の中には X とそこへの Γ の作用が f によって再現されている．これは ρ が与える Γ の Y への作用が本質的に Γ の X への標準的な作用と一致すること，すなわち，非自明な作用が本質的に一意であることを意味している．この幾何学的超剛性は Margulis 超剛性の幾何学的な一般化とみなすことができる．

命題 2.3 で性質 $F(\mathcal{H})$ と同値であることを紹介した 1 次コホモロジーの消滅を導く強力な微分幾何的手法として Bochner 技法とよばれる手法がある．幾何学的超剛性は，この手法を非線形化し調和写像に適用することにより証明されている．この点からも，超剛性と $F(\mathcal{H})$ とが密接な関係をもつことが想像されるが，実際に，格子に対する超剛性の現れ方は固定点性質 $F(\mathcal{H})$ の現れ方と全く一致している．

超剛性のような強い剛性は，ある種例外的な，Lie 群の格子のような特殊な群に観察されてきた性質である．したがって，非常に一般的な性質である双曲性と強い剛性は両立しにくいことが想像される．(Hilbert 空間や L^p 空間に対する固定点性質については同様の状況があることをすでに見てきた．) 一方で，最近の研究成果は，(非常に強くはないにしても) ある程度強い剛性をもつ群は決して散在的ではないことを示唆している．次の節で述べる我々の主

結果も, ある範囲の p に対しては $F(L^p)$ をもつ, あるいはある範囲の C に対しては UL(C) 作用に関する固定点性質をもつ群が, 適当な設定の下では非常に高い確率で現れることを主張している.

3 ランダム群の固定点性質

以下では, 自然数 ℓ でパラメータ付けられた群の表示の集合 $\mathcal{P}(\ell)$ の元 P から定まる群 Γ_P が, ある性質 (Q) をもつ確率を問題にする. 集合 $\mathcal{P}(\ell)$ を**ランダム群のモデル**とよび, $\ell \to \infty$ で $P \in \mathcal{P}(\ell)$ から定まる群 Γ_P が性質 (Q) をもつ確率が 1 に収束するとき,「$\mathcal{P}(\ell)$ をモデルとするランダム群は圧倒的な確率で性質 (Q) をもつ」あるいは単に「$\mathcal{P}(\ell)$ をモデルとするランダム群は性質 (Q) をもつ」という. 本稿では, プレイン・ワード・モデルとよばれるランダム群のモデルを取り上げる.

3.1 ランダム群のプレイン・ワード・モデル

S を m 個の文字とその逆からなる集合とする: $S = \{s_1, \ldots, s_m, s_1^{-1}, \ldots, s_m^{-1}\}$. S の元を並べて得られる文字列を**語**, 文字列の長さを語の**長さ**という. 長さ ℓ の語全体の集合を W_ℓ で表す. 以下では, S を生成元集合とし, $R \subset W_\ell$ を関係式集合とする群の表示 $P = (S, R)$ を考える. W_ℓ には簡約可能な語, すなわち $s_j s_j^{-1}$ または $s_j^{-1} s_j$ という文字列をもつ語も含まれている. したがって, $\#W_\ell = (2m)^\ell$ であり, また, R の元は簡約可能な語であってもよいことを注意しておく. 実数 $c > 1$ をとり, 固定する. 自然数 m, ℓ および $0 < d < 1$ なる実数 d に対し, 表示の集合 $\mathcal{P}(m, \ell, d)$ を

$$\mathcal{P}(m, \ell, d) = \{P = (S, R) \mid R \subset W_\ell \text{ かつ } c^{-1}(2m)^{d\ell} \leq \#R \leq c(2m)^{d\ell}\}$$

で定義し, ランダム群の**プレイン・ワード・モデル (plain word model)** とよぶ. Γ_S で S の生成する自由群 $\langle s_1 \rangle * \cdots * \langle s_m \rangle$ を表す. W_ℓ の元は, 自然な仕方で Γ_S の元を定める. $P \in \mathcal{P}(m, \ell, d)$ に対し, Γ_P を $P = (S, R)$ から得られる群, すなわち, R が定める Γ_S の部分集合の正規閉包による Γ_S の商群を表す. ごく簡単な考察により, 任意の有限表示群はある $\mathcal{P}(m, \ell, d)$ に属する表示をもつことがわかる.

定義からわかる通り, $\mathcal{P}(m, \ell, d)$ に属する表示 P の関係式の個数は, d が小さいほど少なく, d が大きいほど多い. したがって, d が小さいときに得られる Γ_P は比較的大きい (自由群に近い) 群に, d が大きいときに得られる Γ_P は小さい群になることが予想される. 実際, 次が成り立つ.

定理 3.1 (Ollivier [26]). $d < 1 - \frac{1}{2}\log_{2m}(8m-4)$ のとき, 次が成立する:

$$\lim_{\ell \to \infty} \frac{\#\{P \in \mathcal{P}(m, \ell, d) \mid \Gamma_P \text{ は無限双曲群}\}}{\#\mathcal{P}(m, \ell, d)} = 1.$$

一方, $d > 1 - \frac{1}{2}\log_{2m}(8m-4)$ のときは

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{\#\{P \in \mathcal{P}(m,\ell,d)\,|\Gamma_P \text{ は有限群}\}}{\#\mathcal{P}(m,\ell,d)} = 1.$$

が成立する.

この定理の前半は,「プレイン・ワード・モデルのランダム群は $d < 1 - \frac{1}{2}\log_{2m}(8m-4)$ のとき, 無限双曲群である」ことを主張している. これが § 2 で何度か触れた「群の双曲性が一般的な性質である」ことの表現の一つを与えている.

3.2 プレイン・ワード・モデルのランダム群の固定点性質

上で述べた通り, $\mathcal{P}(m,\ell,d)$ に属する表示 P の関係式の個数は, d が小さいほど少なく, d が大きいほど多い. 例えば, 関係式がまったくない表示 P から得られる Γ_P は自由群 Γ_S で, Γ_S から距離空間 Y の等長変換群 $\mathrm{Isom}(Y)$ への準同型は, その生成元の像を任意に選ぶごとに一つ定まる. したがって, Γ_S から $\mathrm{Isom}(Y)$ への準同型, すなわち Γ_S の Y への等長的作用は非常に豊富に存在する. 一般の表示 $P = (S, R)$ が定める群 Γ_P から $\mathrm{Isom}(Y)$ への準同型を得るためは, $\mathrm{Isom}(Y)$ においても R に属する関係式が満たされるように生成元の像を選ばなくてはならない. よって, 関係式集合 R が大きいことは, Γ_P の Y への等長的作用を与える際の強い制約となる. ならば, d が大きいときには, $P \in \mathcal{P}(m,\ell,d)$ から得られる Γ_P が固定点性質あるいは強い剛性をもつ確率は高くなりそうである. この推測は正当化され, 以下に述べるようなプレイン・ワード・モデルのランダム群に対する固定点定理が示される.

定理 3.2 (Bourdon-I [5]). $p_0 \geq 3$ とし, $2k > (2p_0)^{p_0}$ なる自然数 k を固定する. $k/(2k+1) < d < 1 - \frac{1}{2}\log_{2m}(8m-4)$ のとき, 次が成立する:

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{\#\left\{P \in \mathcal{P}(m,\ell,d) \,\middle|\, \begin{array}{l}\Gamma_P \text{ は } \forall p \in [1,2]\cup[3,p_0] \text{ に対し} \\ F(L^p) \text{ をもつ無限双曲群}\end{array}\right\}}{\#\mathcal{P}(m,\ell,d)} = 1.$$

Hilbert 空間の場合と同様に, 任意の有限群は, 任意の $p \in (1,\infty)$ に対して L^p 空間に対する固定点性質をもつ. したがって, 仮定の下で Γ_P が有限群になってしまっては意味がない. 定理の $d < 1 - \frac{1}{2}\log_{2m}(8m-4)$ という仮定と前述の Ollivier の結果が, Γ_P が高い確率で無限群になることを保証している. $1 - \frac{1}{2}\log_{2m}(8m-4) \to 1/2$ $(m \to \infty)$ なので, 適当に m を大きくとり, $k/(2k+1) < d < 1 - \frac{1}{2}\log_{2m}(8m-4)$ をみたすように d をとれば, $P(m,\ell,d)$ には, $p \in [1,2]\cup[3,p_0]$ に対し $F(L^p)$ をもつ無限群 (を与える表示) が非常に多く存在することになる. すなわち,「プレイン・ワード・モデルのランダム群は $k/(2k+1) < d < 1 - \frac{1}{2}\log_{2m}(8m-4)$ のとき, $p \in [1,2]\cup[3,p_0]$ に対し $F(L^p)$ をもつ無限双曲群である.」もちろん, 望まれる結果は「プレイン・ワード・モデルのランダム群は,

$p_0 \geq 2$ に対し適切に d をとれば, $p \in [1, p_0]$ に対して $F(L^p)$ をもつ無限双曲群である」という形の定理であるが, 現在のところ, 上の形でしか証明できていない.

UL(C) 作用に関する固定点性質についても同様の結果が得られる:

定理 3.3 (I-Kondo-Nayatani [16]). $k \in \mathbb{N}$ を $k > C^6/2$ をみたすようにとる. $\frac{k}{2k+1} < d < 1 - \frac{1}{2}\log_{2m}(8m-4)$ のとき, 次が成立する.

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{\#\left\{P \in \mathcal{P}(m,\ell,d) \,\middle|\, \begin{array}{l}\Gamma_P\text{は UL}(C)\text{ 作用に関する}\\ \text{固定点性質をもつ無限双曲群}\end{array}\right\}}{\#\mathcal{P}(m,\ell,d)} = 1.$$

$C = 1$ のとき, この定理は「$d > 1/3$ のプレイン・ワード・モデルのランダム群は性質 $F(\mathcal{H})$ をもつ」ということを主張している.

このようなランダム群の固定点性質に関する研究は Gromov [10] 以後, 活発に行われている. Gromov は [10] において, グラフ・モデルのランダム群が性質 $F(\mathcal{H})$ をもつことを指摘している (詳しい証明は Silberman [30] により与えられた). グラフ・モデルは比較的強い剛性をもつランダム群を与えるモデルで, Gromov はこれを用いてある種の極限操作をすることにより Gromov モンスターとよばれている群を与えた. また, グラフ・モデルのランダム群が任意の $p \in (1, \infty)$ に対して $F(L^p)$ をもつことが, Naor-Silberman [24] により示されている. 長さ 3 の既約な関係式のみを考え, 生成元の数 m でパラメータ付けしたランダム群のモデルを三角モデルとよぶ. この三角モデルのランダム群については, Żuk [35] がやはり $d > 1/3$ のとき性質 $F(\mathcal{H})$ をもつことを示している. $\mathcal{P}(m, \ell, d)$ において既約な関係式のみを考えるランダム群のモデルは密度モデルとよばれている. $d > 1/3$ のとき, 密度モデルのランダム群が性質 $F(\mathcal{H})$ をもつことはŻuk [35] により指摘され, Kotowski-Kotowski [20] により詳細な証明が与えられている. また, Nowak [25] は $d > 1/3$ のとき, 密度モデルのランダム群が適当な p に対し $F(L^p)$ をもつこと, および同じランダム群が $C < \sqrt{2}$ の UL(C) 作用に関する固定点性質をもつことを証明している. 種々のランダム群のモデルがあるが, プレイン・ワード・モデルは, そこから得られる群の集合が任意の有限表示群を含んでいる, という点でもっとも一般的なモデルになっていることを注意しておく.

3.3 証明について

§ 2.4 で触れた [7], [11], [23] および [18] における超剛性の証明には, Lie 群の格子が自然に作用する Riemann 対称空間 $X = G/K$ から Γ の作用が与えられた非正曲率空間 Y への Γ 作用に関して同変な調和写像が用いられていた. この手法は, Gromov [10], M.-T. Wang [31], [32], Izeki-Nayatani [17] により, X が単体複体の場合へと拡張されており, 種々の離散群および距離空間に対する固定点定理が導かれている. 現在では, この手法は離散群 Γ が作用する良い空間 X が存在しないような状況へも拡張されており, 離散群 Γ 自身から Y

への離散的調和写像を用いることにより, ランダム群に対する固定点定理も示されるようになっている. [10] では, この離散的調和写像を用いた手法に基づき, グラフ・モデルのランダム群が性質 $F(\mathcal{H})$ および UL(C) 作用に関する固定点性質をもつことが指摘されている. また, [14], [15], [13] では, CAT(0) 空間とよばれる非正曲率距離空間への等長的作用に関するランダム群の固定点定理が導かれている. 上述の離散的調和写像の研究に先立って, Garland [9], Pansu [28], Ballmann-Swiatkowski [2] 等は, Bochner 技法の離散的な設定へのある種の拡張を与えることにより, コホモロジー消滅定理を証明していた. 命題 2.3 で述べたように, 性質 $F(\mathcal{H})$ はコホモロジーの消滅からも導かれる. Żuk [35] による三角モデルのランダム群が Kazhdan の性質 (T) をもつことの証明は, この流れに沿っている. 前節で紹介した我々の定理の証明は, [10], [24], [14], [15], [13] で用いられた, 離散群から距離空間への同変写像のエネルギーの増大度に関する考察に基づく.

Γ を $S=\{s_1,\dots,s_m,s_1^{-1},\dots,s_m^{-1}\}$ によって生成される有限生成群とする. μ を S から定まる標準的ランダム・ウォークの推移確率とする:

$$\mu(\gamma,\gamma')=\frac{\#\{s\in S\mid \gamma'=\gamma s\}}{2m}.$$

μ から定まる n ステップの推移確率は

$$\mu^n(\gamma,\gamma')=\sum_{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}\in\Gamma}\mu(\gamma,\gamma_1)\mu(\gamma_1,\gamma_2)\dots\mu(\gamma_{n-1},\gamma')$$

により与えられる.

Γ の完備距離空間 Y への等長的作用が準同型写像 $\rho\colon\Gamma\longrightarrow\mathrm{Isom}(Y)$ により与えられているとする. 写像 $f\colon\Gamma\longrightarrow Y$ が ρ **同変**であるとは, 任意の $\gamma,\gamma'\in\Gamma$ に対し $f(\gamma\gamma')=\rho(\gamma)f(\gamma')$ をみたすことをいう. ρ 同変写像 $f\colon\Gamma\longrightarrow Y$ が与えられたとき, その像 $f(\Gamma)$ は $f(e)$ の $\rho(\Gamma)$ 軌道になっている. ここで e は Γ の単位元を表す.

定義 3.4 (同変写像の n ステップ・エネルギー). Γ, Y, ρ は上の通りとし, Γ には生成元集合 S に関する標準的ランダム・ウォークが与えられているとする. このとき, ρ 同変写像 f に対し, f の n **ステップ・エネルギー** $E_n(f)$ を

$$E_n(f)=\frac{1}{2}\sum_{\gamma}\mu^n(e,\gamma)d_Y(f(e),f(\gamma))^2$$

で定義する. ここで $d_Y(\cdot,\cdot)$ は Y の距離を表す. 1 ステップ・エネルギーは $E(f)$ で表すことにし, ρ 同変写像全体の中で $E(f)$ を最小にする ρ 同変写像 $f\colon\Gamma\longrightarrow Y$ が存在するとき, f を**調和写像**と呼ぶ.

ρ 同変写像 f を一つ固定したとき, $E_n(f)$ の n に関する挙動は, $f(\Gamma)$ の像, すなわち $f(e)$ の $\rho(\Gamma)$ 軌道の広がり具合を捉えているはずである. 軌道の広がり具合が大きければ $E_n(f)$

の n に関する増大度も大きくなることが期待されるし, 軌道がすぼまっているなら $E_n(f)$ の n に関する増大度はさほど大きくはならないと想像される. 実際, Y としてヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ をとったときは次が成立する.

命題 3.5 ([10], [15]). Γ を標準的ランダム・ウォーク μ を与えた有限生成群, $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とする. $\rho\colon \Gamma \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ を準同型写像とすると, 任意の ρ 同変写像 f に対して $E_n(f) \leq nE(f)$ が成立する. また, ある $n \in \mathbb{N}$ に対し $E_n(f) = nE(f)$ が成立するための必要十分条件は f が調和写像であることである.

注意 3. 実は, ある n に対して $E_n(f) = nE(f)$ が成り立つなら, 任意の n に対してこの等式が成立する.

ρ 同変調和写像 f が存在するとき, f の像はもっとも効率よく延びた $\rho(\Gamma)$ 軌道を与えるはずである. 二番目の主張は, このことを n ステップエネルギーを用いて表現している. 一方, n ステップ・エネルギーの増大度が小さいことは, $\rho(\Gamma)$ の軌道が大きくなれないということを意味する. 実際, 次が成立する.

命題 3.6 ([10], [30], [15]). Γ を標準的ランダム・ウォーク μ を与えた有限生成群, $\rho\colon \Gamma \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ を準同型写像とする. $\varepsilon > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の ρ 同変写像 f に対し $E_n(f) \leq (n-\varepsilon)E(f)$ が成立するなら, $\rho(\Gamma)$ は $\mathcal{H}$ に固定点をもつ. すなわち, $p \in \mathcal{H}$ が存在し, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し $\rho(\gamma)p = p$ が成立する.

命題は, $\mathcal{H}$ を CAT(0) 空間とよばれる非正曲率距離空間に替えても正しい. さらに L^p 空間をとった場合にも類似した命題を示すことができる. 我々の定理の証明は, 仮定の下で, Γ_P からの任意の準同型 ρ に対する任意の同変写像のエネルギーの増大度が一様に抑えられるような P が, 非常に高い確率で現れることを示すことにより与えられる. さらに, n ステップ・エネルギーの増大度に関して精密な考察を行うと, Hilbert 空間への必ずしも Lipschitz 定数が一様に抑えられないようなアファイン作用に関するグラフ・モデルのランダム群の固定点性質を導くこともできる ([16]).

参考文献

[1] U. Bader, A. Furman, T. Gelander, and N. Monod, *Property* (T) *and rigidity for actions on Banach spaces*, Acta Math. **198** (2007), 57–105.

[2] W. Ballmann and J. Świątkowski, *On L^2-cohomology and property* (T) *for automorphism groups of polyhedral cell complexes*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 615–645.

[3] B. Bekka and P. de la Harpe, Kazhdan's Property (T), Cambridge Univ. Press,

Cambridge, 2008.

[4] M. Bourdon, *Cohomologie et actions isométriques propres sur les espaces L_p*, Geometry, Topology and Dynamics in Negative Curvature 84–109, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **425**, Cambirdge Univ. Press, Cambridge, 2016.

[5] M. Bourdon and H. Izeki, in preparation.

[6] M. Bourdon and H. Pajot, *Cohologie l^p et espaces de Besov*, J. Reine Angew. Math. **558** (2003), 85–108.

[7] K. Corlette, *Archimedian superrigidity and hyperbolic geometry*, Ann. Math. **135** (1992), 165–182.

[8] P. Delorme, 1-*cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus et représentations*, Bull. Soc. Math. France **105** (1977), 281–336.

[9] H. Garland, *A rigidity theorem for discrete subgroups*, Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967), 1–25.

[10] M. Gromov, *Random walk in random groups*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), 73–146.

[11] M. Gromov and R. Schoen, *Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one*, Publ. Math. IHES **76** (1992), 165–246.

[12] A. Guichardet, *Étude de la* 1-*cohomologie et de la topologie du dual pour les groupes de Lie à radical abélien*, Math. Ann. **228** (1977), 215–232.

[13] H. Izeki, *Fixed-point property of random quotients by plain words*, Groups Geom. Dyn. **8** (2014), 1101–1140.

[14] H. Izeki, T. Kondo, and S. Nayatani, *Fixed-point property of random groups*, Annals of Global Analysis and Geom. 35 (2009), 363–379.

[15] H. Izeki, T. Kondo, and S. Nayatani, *N-step energy of maps and fixed-point property of random groups*, Groups Geom. Dyn. **6** (2012), 701–736.

[16] H. Izeki, T. Kondo, and S. Nayatani, in preparation.

[17] H. Izeki and S. Nayatani, *Combinatorial harmonic maps and discrete-group actions on Hadamard spaces*, Geom. Dedicata **114** (2005), 147–188.

[18] J. Jost and S.-T. Yau, *Harmonic maps and superrigidity*, Differential Geomtery: partial differential equations on manifolds, Proc. Symp. Pure Math. **54-I** (1993), 245–280.

[19] D. Kazhdan, *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Funct. Anal. Appl. **1** (1967), 63–65.

[20] M. Kotowski and M. Kotowski, *Random groups and property* (T)*: Żuk's theorem*

revisited, J. Lond. Math. Soc. **88** (2013), 396–416.

[21] V. Lafforgue, *Un renforcement de la propriété* (T), Duke Math. J. **143** (2008), 559–602.

[22] G. Margulis, *Discrete groups of motions of manifolds of nonpositive curvature*, Amer. Math. Soc. Transl. **190** (1977), 33–45.

[23] N. Mok, Y.-T. Siu, and S.-K. Yeung, *Geometric superrigidity*, Invent. Math. **113** (1993), 57–83.

[24] A. Naor and L. Silberman, *Poincaré inequalities, embeddings, and wild groups*, Compos. Math. **147** (2011), 1546–1572.

[25] P. W. Nowak, *Poincaré inequalities and rigidity for actions on Banach spaces*, J. Eur. Math. Soc. **17** (2015), no. 3, 689–709.

[26] Y. Ollivier, *Sharp phase transition theorems for hyperbolicity of random groups*, Geom. Funct. Anal. **14** (2004), 595–679.

[27] P. Pansu, *Cohomologie L^p* : invariance sous quasiisométrie, preprint (1995).

[28] P. Pansu, *Formule de Matsushima, de Garland et propriété* (T) *pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles*, Bull. Soc. Math. France, **126** (1998), 107-139.

[29] J. P. Serre, Trees, Springer-Verlag, 1980.

[30] L. Silberman, *Addendum to "Random walk in random groups" by M. Gromov*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), 147–177.

[31] M.-T. Wang, *A fixed point theorem of discrete group actions on Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **50** (1998), 249–267.

[32] M.-T. Wang, *Generalized harmonic maps and representations of discrete groups*, Comm. Anal. Geom. **8** (2000), 545–563.

[33] G. Yu, *Hyperbolic groups admit proper affine isometric actions on l^p spaces*, Geom. Funct. Anal. **15** (2005), 1144–1151.

[34] R. J. Zimmer, Ergodic Theory and Semisimple Groups, Birkhäuser, Boston, 1984.

[35] A. Żuk, *Property* (T) *and Kazhdan constants for discrete groups*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), 643–670.