数理解析研究所講究録
第2064巻 2018年 101-108

弱選択関数に関する VAN MILL-WATTEL の定理の別証明
(ANOTHER PROOF OF A THEOREM OF VAN MILL AND WATTEL ON WEAK SELECTIONS)

愛媛大学大学院　理工学研究科　元岡耕一
KOICHI MOTOOKA
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING,
EHIME UNIVERSITY

愛媛大学大学院　理工学研究科　山内貴光
TAKAMITSU YAMAUCHI
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING,
EHIME UNIVERSITY

van Mill and Wattel [4] は, 局所一様な弱選択関数の存在によって GO 空間を特徴づけた. 本稿では, その別証明について報告する.

1. 弱選択関数と VAN MILL-WATTEL の定理

本稿において, 空間は全てハウスドルフであるとする.
空間 X に対して,

$$\mathcal{F}_2(X)=\{S\subset X: 1\leq |S|\leq 2\}$$

とする. $\mathcal{F}_2(X)$ は **Vietoris 位相**, すなわち, X の開集合 U,V に対して

$$\langle U,V\rangle=\{S\in\mathcal{F}_2(X): S\subset U\cup V \text{ かつ } S\cap U\neq\varnothing\neq S\cap V\}$$

としたとき, 基 $\{\langle U,V\rangle : U,V$ は X の開集合 $\}$ によって生成された位相をもつとする.

定義 1.1. 空間 X に対して, 関数 $\sigma:\mathcal{F}_2(X)\to X$ が条件

$$\text{任意の } S\in\mathcal{F}_2(X) \text{ に対して} \sigma(S)\in S$$

を満たすとき, σ を X 上の**弱選択関数** (**weak selection**) という.

定義 1.2. $\preceq$ を集合 X 上の線形順序とする. 各 $x\in X$ に対して

$$(\leftarrow,x)_{\preceq}=\{y\in X: y\prec x\},\quad (x,\rightarrow)_{\preceq}=\{y\in X: x\prec y\}$$

とし, 準基 $\{(\leftarrow,x)_{\preceq},(x,\rightarrow)_{\preceq}: x\in X\}$ によって生成された X の位相 $\tau_{\preceq}$ を, 線形順序 $\preceq$ によって定められた**順序位相** (**order topology**) という.

定義 1.3. 空間 X の位相を τ とし, X 上の線形順序 $\preceq$ による順序位相を $\tau_{\preceq}$ とする.

- X が**順序化可能** (**orderable**) であるとは, X 上の線形順序 $\preceq$ が存在して $\tau_{\preceq}=\tau$ が成り立つことである.
- X が**弱順序化可能** (**weakly orderable**) であるとは, X 上の線形順序 $\preceq$ が存在して $\tau_{\preceq}\subset\tau$ が成り立つことである.
- X が **GO 空間** (**GO-space**) であるとは, 次の 2 つの条件を満たす X 上の線形順序 $\preceq$ が存在することである.
  - (i) $\tau_{\preceq}\subset\tau$,
  - (ii) 位相 τ が $\preceq$-凸な集合からなる基をもつ.

ここで,順序集合 $(X, \preceq)$ の部分集合 A が $\preceq$-凸 (**$\preceq$-convex**) であるとは,任意の $x, y, z \in X$ に対して, 条件

$$x, z \in A \text{ かつ } x \preceq y \preceq z \text{ ならば, } y \in A$$

が成り立つときをいう.

注意 1.4. 上で述べた概念には, 次の関係がある.

(A) (X, τ) は順序化可能である.
$\Downarrow \not\Uparrow$
(B) (X, τ) は GO 空間である.
$\Downarrow \not\Uparrow$
(C) (X, τ) は弱順序化可能である.
$\Downarrow \not\Uparrow$
(D) (X, τ) は連続な弱選択関数をもつ.

(A) $\Rightarrow (B) \Rightarrow (C)$ は明らかである. $(C) \Rightarrow (D)$ は, $\tau_{\preceq} \subset \tau$ を満たす X 上の線形順序 $\preceq$ に対し, $\sigma(S) = \min_{\preceq} S$, $S \in \mathcal{F}_2(X)$ によって連続な弱選択関数 σ が定義されることから従う. 順序化可能でない GO 空間の例としては, Sorgenfrey line が挙げられる. GO 空間でない弱順序化可能空間の例としては, 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分空間 $\{(0,0)\} \cup \{(x, \sin 1/x) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ がある. Hrušák and Martínez-Ruiz [2, Theorem 2.7] は, 弱順序化可能でなく, かつ連続な弱選択関数をもつチコノフ空間を構成した.

van Mill and Wattel [3] は, コンパクト空間に対して (D) $\Rightarrow$ (A) が成り立つことを証明した.

定理 1.5 ([3, Theorem 1.1])**.** コンパクト空間 X に対して, 次は同値である.

(i) X は順序化可能である.
(ii) X は連続な弱選択関数をもつ.

さらに, van Mill and Wattel [4] は, 局所一様な弱選択関数を用いて GO 空間を特徴付けることにより, 定理 1.5 を一般化した.

定理 1.6 ([4, Theorem 3.1])**.** チコノフ空間 X に対して, 次は同値である.

(i) X は GO 空間である.
(ii) X は局所一様な弱選択関数をもつ.

ここで, 弱選択関数の局所一様性は次で定義される.

定義 1.7 ([4])**.** 空間 X 上の弱選択関数 $\sigma : \mathcal{F}_2(X) \to X$ が局所一様 (**locally uniform**) であるとは, 任意の $x \in X$ と x の近傍 U に対して, $V \subset U$ を満たす x の近傍 V が存在して, 任意の $p \in X \setminus U, y \in V$ に対して,

$$\sigma(\{p, y\}) = p \iff \sigma(\{p, x\}) = p$$

となることである.

注意 1.8. 局所一様な弱選択関数は連続である. また, コンパクト空間上の連続な弱選択関数は局所一様である [4, Lemma 1.1].

一方, コンパクトな GO 空間が順序化可能であることは容易に分かる. 従って, 定理 1.6 は定理 1.5 の一般化である.

注意 1.9. 定理 1.6 の (i) $\Rightarrow$ (ii) は, 任意の空間 X に対して成り立つ. 実際, 空間 (X, τ) が GO 空間であるとし, X 上の線形順序 $\preceq$ が $\tau_{\preceq} \subset \tau$ を満たし, かつ τ が $\preceq$-凸な集合からなる基をもつとする. このとき, X 上の弱選択関数 $\sigma : \mathcal{F}_2(X) \to X$ を, 任意の $S \in \mathcal{F}_2(X)$ に対して $\sigma(S) = \min_{\preceq} S$ と定義すれば, σ は局所一様である.

van Mill and Wattel [4] は, Čech-Stone のコンパクト化を用いることによって定理 1.6 の (ii) $\Rightarrow$ (i) を証明した. これに対し, Čech-Stone のコンパクト化を用いない定理 1.6 の (ii) $\Rightarrow$ (i) の別証明を与えることにより, 次を得た.

定理 1.10. 任意の空間 X が局所一様な弱選択関数をもてば, X は GO 空間である.

定理 1.10 は, van Mill and Wattel による定理 1.6 の (ii) $\Rightarrow$ (i) の証明と同様に, 次の流れに沿って証明できる.

Step 1. 求める線形順序 $\leq$ を定めるため, 空間 (X,τ) の閉集合族 $\{L_x, U_x : x \in X\}$ を, 局所一様な弱選択関数を使って, X の整列順序に関する超限帰納法によって構成する.

Step 2. 閉集合族 $\{L_x : x \in X\}$ を使って X 上に線形順序 $\leq$ を定義し, $\tau_{\leq} \subset \tau$ であることを示す.

Step 3. 位相 τ が $\leq$-凸な集合からなる基をもつことを示す.

第 3 節で定理 1.10 の証明の概略を述べる.

2. 準備

定義 2.1. X 上の弱選択関数 $\sigma : \mathcal{F}_2(X) \to X$ に対して, σ による X 上の**選択関係 (selection relation)** $\preceq_\sigma$ を, $x, y \in X$ に対して

$$x \preceq_\sigma y \Longleftrightarrow \sigma(\{x,y\}) = x$$

で定め, $x \preceq_\sigma y$ かつ $x \neq y$ であるとき, $x \prec_\sigma y$ と表す.

注意 2.2. 弱選択関数 σ による選択関係 $\preceq_\sigma$ は, total ($x \preceq_\sigma y$ または $y \preceq_\sigma x$) かつ anti-symmetric ($x \preceq_\sigma y$ かつ $y \preceq_\sigma x$ ならば $x = y$) である. 逆に, total かつ anti-symmetric な関係 $\preceq$ は, 「$\sigma(\{x,y\}) = x \Longleftrightarrow x \preceq y$」によって定まる弱選択関数 $\sigma : \mathcal{F}_2(X) \to X$ による選択関係 $\preceq_\sigma$ と一致する. 特に, 線形順序は (ある弱選択関数の) 選択関係である.

定義 2.3. X 上の選択関係 $\preceq_\sigma$ と X の部分集合 A, B に対して

$$A \prec_\sigma B \Longleftrightarrow \text{任意の } a \in A \text{ と } b \in B \text{ に対して } a \prec_\sigma b \text{ である}$$

と定め, $\{a\} \prec_\sigma B$, $A \prec_\sigma \{b\}$ を, それぞれ $a \prec_\sigma B$, $A \prec_\sigma b$ で表す. また, $x \in X$ に対して

$$(\leftarrow, x)_{\preceq_\sigma} = \{y \in X : y \prec_\sigma x\},\ (x, \rightarrow)_{\preceq_\sigma} = \{y \in X : x \prec_\sigma y\}$$
$$(\leftarrow, x]_{\preceq_\sigma} = \{y \in X : y \preceq_\sigma x\},\ [x, \rightarrow)_{\preceq_\sigma} = \{y \in X : x \preceq_\sigma y\}$$

とする.

注意 2.4. 弱選択関数の局所一様性は, 選択関係を用いて次のように言い換えられる: 空間 X 上の弱選択関数 $\sigma : \mathcal{F}_2(X) \to X$ が局所一様であるための必要十分条件は, 任意の $x \in X$ と x の近傍 U に対して, x の近傍 V が存在して, 任意の $p \in X \setminus U$ に対して

$$p \prec_\sigma V \text{ または } V \prec_\sigma p$$

のいずれかが成り立つことである.

3. 定理 1.10 の証明の概略

空間 (X,τ) が局所一様な弱選択関数 $\sigma:\mathcal{F}_2(X)\to X$ をもつとする.

<u>Step 1 (閉集合族 $\{L_x,U_x : x\in X\}$ の構成).</u>

各 $x\in X$ に対して

$$A_x=[x,\rightarrow)_{\preceq_\sigma},\quad B_x=(\leftarrow,x]_{\preceq_\sigma}$$

とする.

事実 3.1. σ は連続なので, A_x, B_x は X の閉集合である. さらに, 次が成り立つ.

(i) $A_x\cup B_x=X$.
(ii) $A_x\cap B_x=\{x\}$.

X 上の整列順序 $\preceq$ を 1 つとり, 固定する. $\preceq$ に関する超限帰納法によって, 各 $x\in X$ に対して, 以下の条件 (1)–(5) を満たす X の閉集合 L_x, U_x を構成する.

(1) $L_x\cup U_x=X$ と $L_x\cap U_x=\{x\}$,
(2) $y\prec x$ かつ $x\in L_y\Longrightarrow L_x\subset L_y\setminus\{y\}$,
(3) $y\prec x$ かつ $x\in U_y\Longrightarrow U_x\subset U_y\setminus\{y\}$,
(4) $z\in L_x$ かつ $z\notin\bigcup\{L_y : y\prec x$ かつ $x\in U_y\}\Longrightarrow z\in B_x$,
(5) $z\in U_x$ かつ $z\notin\bigcup\{U_y : y\prec x$ かつ $x\in L_y\}\Longrightarrow z\in A_x$.

最小元 $x_0=\min_\preceq X$ に対して, $L_{x_0}=B_{x_0}$, $U_{x_0}=A_{x_0}$ とする. 事実 3.1 より L_{x_0}, U_{x_0} は条件 (1)–(5) を満たす閉集合である.

$x\in X$ とし, $y\prec x$ を満たす全ての $y\in X$ に対して, 条件 (1)–(5) を満たす閉集合 L_y と U_y が構成できたとする.

$$E=\{y\in X : y\prec x \text{ かつ } x\in U_y\},\ F=\{y\in X : y\prec x \text{ かつ } x\in L_y\}$$

とする.

事実 3.2. 次が成り立つ.

(i) $y\prec z\prec x$ のとき, $L_y\subset L_z\setminus\{z\}$ または $L_z\subset L_y\setminus\{y\}$ である.
(ii) $\bigcup_{y\in E}L_y\cap\bigcup_{z\in F}U_z=\varnothing$.
(iii) $x\notin\bigcup_{y\in E}L_y\cup\bigcup_{z\in F}U_z$.

証明. (i) は条件 (1)–(3) から従う. (ii) は (i) と条件 (1) から従う. (iii) は E, F の定義と条件 (1) から従う. □

$$L_x=\Big(\bigcup_{y\in E}L_y\cup B_x\Big)\setminus\bigcup_{z\in F}U_z,\quad U_x=\Big(\bigcup_{z\in F}U_z\cup A_x\Big)\setminus\bigcup_{y\in E}L_y \tag{3.1}$$

とする.

事実 3.3. L_x と U_x は条件 (1)–(5) を満たす.

証明. L_x, U_x が (1) を満たすこと: $z\in X\setminus L_x$ とする. このとき, $z\notin\bigcup_{y\in E}L_y\cup B_x$ または $z\in\bigcup_{z\in F}U_z$ である. $z\notin\bigcup_{y\in E}L_y\cup B_x$ ならば, 事実 3.1 の (i) より $z\in A_x$ であり, これと $z\notin\bigcup_{y\in E}L_y$ より $z\in U_x$ を得る. $z\in\bigcup_{z\in F}U_z$ ならば, 事実 3.2 の (ii) より $z\notin\bigcup_{y\in E}L_y$ なので, $z\in U_x$ を得る. よって, $L_x\cup U_x=X$ である. $L_x\cap U_x=\{x\}$ は事実 3.1 の (ii) と事実 3.2 の (iii) より従う.

L_x, U_x が (2) を満たすこと: $y \prec x$ かつ $x \in L_y$ を満たす $y \in X$ をとる. このとき $y \in F$ より $U_y \subset \bigcup_{z \in F} U_z$ である. よって,

$$L_x = (\bigcup_{y \in E} L_y \cup B_x) \setminus \bigcup_{z \in F} U_z \subset X \setminus \bigcup_{z \in F} U_z \subset X \setminus U_y = L_y \setminus \{y\}$$

ゆえ, L_x は (2) を満たす. U_x が (3) を満たすことも同様に示せる.

L_x, U_x が (4) を満たすこと: 条件 (4) は $L_x \setminus \bigcup_{y \in E} L_y \subset B_x$ であることと同値であり,

$$L_x \setminus \bigcup_{y \in E} L_y = ((\bigcup_{y \in E} L_y \cup B_x) \setminus \bigcup_{z \in F} U_z) \setminus \bigcup_{y \in E} L_y \subset ((\bigcup_{y \in E} L_y \cup B_x)) \setminus \bigcup_{y \in E} L_y \subset B_x$$

であることから, L_x は (4) を満たす. U_x が (5) を満たすことも同様に示せる. □

事実 3.4. 次が成り立つ.

(i) $(\bigcup_{z \in F} U_z \setminus \operatorname{Int} \bigcup_{z \in F} U_z) \cap B_x = \varnothing$.

(ii) $(\operatorname{Cl} \bigcup_{y \in E} L_y) \setminus \bigcup_{y \in E} L_y \subset B_x$.

証明の概略. (i). $a \in \bigcup_{z \in F} U_z \setminus \operatorname{Int} \bigcup_{z \in F} U_z$ とする. このとき, $a \in U_z$ を満たす $z \in F$ がとれる. $a \in U_z \setminus \operatorname{Int} U_z$ と z について条件 (1) を用いることで $a = z$ が示せる. 特に, $a \prec x$ かつ $x \in L_a$ である. さらに a について条件 (4) を用いることで $x \in B_a$ が成り立ち, 事実 3.1 の (ii) と $x \neq a$ から $a \notin B_x$ を得る.

(ii) $a \in (\operatorname{Cl} \bigcup_{y \in E} L_y) \setminus \bigcup_{y \in E} L_y$ を満たす $a \notin B_x$ があったと仮定する. $X \setminus B_x$ が a の近傍であることと σ の局所一様性と注意 2.4 から, a の近傍 V が存在して, 任意の $p \in B_x$ に対して,

$$p \prec_\sigma V \text{ または } V \prec_\sigma p \tag{3.2}$$

が成り立つ. $a \in \operatorname{Cl} \bigcup_{y \in E} L_y$ ゆえ $V \cap \bigcup_{y \in E} L_y \neq \varnothing$ である.

$$y_0 = \min_{\preceq}\{y \in E : V \cap L_y \neq \varnothing\}$$

とし, $z_0 \in V \cap L_{y_0}$ をとる.

このとき, y_0 について条件 (4) を用いることで $z_0 \preceq_\sigma y_0$ を, 条件 (5) を用いることで $y_0 \in B_x$ を示せる. これらと $z_0 \in V$ と (3.2) より $V \prec_\sigma y_0$ であり, $a \in V$ ゆえ,

$$a \prec_\sigma y_0. \tag{3.3}$$

従って $a \notin A_{y_0}$ を得る.

一方, $a \notin \bigcup_{y \in E} L_y$ と $y_0 \in E$ より $a \notin L_{y_0}$ なので, 条件 (1) より $a \in U_{y_0}$ である. これと $a \notin A_{y_0}$ と条件 (5) から, $y_0 \in L_y$ かつ $a \in U_y$ を満たす $y \prec y_0$ がとれる. このとき $a = y$ が示され, 特に $a \prec y_0$ かつ $y_0 \in L_a$ である. また, $y_0 \notin \bigcup\{L_z : z \prec a \text{ かつ } a \in U_z\}$ であることも示せる. よって, a について条件 (4) を用いることで $y_0 \in B_a$, すなわち $y_0 \preceq_\sigma a$ を得る. しかしこれは (3.3) に矛盾する. 従って, $\operatorname{Cl} B \setminus B \subset B_x$ を得る. □

事実 3.5. L_x と U_x は X の閉集合である.

証明.

$$\begin{aligned}
L_x &= (\bigcup_{y \in E} L_y \cup B_x) \setminus \bigcup_{z \in F} U_z \\
&= (\bigcup_{y \in E} L_y \cup B_x) \setminus \operatorname{Int} \bigcup_{z \in F} U_z \quad \text{(事実 3.2 の (ii) と事実 3.4 の (i) による)} \\
&= ((\operatorname{Cl} \bigcup_{y \in E} L_y) \cup B_x) \setminus \operatorname{Int} \bigcup_{z \in F} U_z. \quad \text{(事実 3.4 の (ii) による)}
\end{aligned}$$

よって, L_x は閉集合である. 同様にして U_x が閉集合であることも示せる. □

よって, L_x, U_x は求める集合である.

Step 2 (線形順序 $\leq$ の定義と $\tau_{\leq} \subset \tau$ であること).

X 上の関係 $\leq$ を, $x, y \in X$ に対して

$$x \leq y \iff x \in L_y$$

で定める. 条件 (1)–(3) より, $\leq$ は X 上の線形順序である.

事実 3.6. $\tau_{\leq} \subset \tau$.

証明. 任意に $x \in X$ をとる. $\leq$ の定義より, $(\leftarrow, x]_{\leq} = L_x$ である. また, $\leq$ の定義と条件 (1)–(3) より, $[x, \rightarrow)_{\leq} = U_x$ である. よって, $(\leftarrow, x]_{\leq}$ と $[x, \rightarrow)_{\leq}$ は共に X の閉集合である. 従って, $(x, \rightarrow)_{\leq}, (\leftarrow, x)_{\leq} \in \tau$ である. ゆえに, $\tau_{\leq} \subset \tau$ である. □

従って, 空間 (X, τ) は弱順序化可能である.

Step 3 (位相 τ が $\leq$-凸な集合からなる基をもつこと).

任意に $x \in X$ をとる. X の部分空間 $(\leftarrow, x]_{\leq}$ において x の $\leq$-凸な近傍基 $\mathcal{B}_l$ がとれることを示す.

$x \notin \mathrm{Cl}\,(\leftarrow, x)_{\leq}$ であれば, 点 x は部分空間 $(\leftarrow, x]_{\leq}$ において孤立点となることから, $\mathcal{B}_l = \{\{x\}\}$ とすれば良い. $x \in \mathrm{Cl}\,(\leftarrow, x)_{\leq}$ の場合を考える.

$$y_0 = \min_{\preceq}(\leftarrow, x)_{\leq}$$

とする. 順序数 α に対して, $\{y_\beta : \beta < \alpha\} \subset (\leftarrow, x)_{\leq}$ がとれて $(\leftarrow, x)_{\leq} \not\subset \bigcup_{\beta<\alpha} L_{y_\beta}$ であるとき,

$$y_\alpha = \min_{\preceq}\{y \in (\leftarrow, x)_{\leq} : \bigcup_{\beta<\alpha} L_{y_\beta} \subset L_y \setminus \{y\}\}$$

と定める. このとき, $(\leftarrow, x)_{\leq} = \bigcup_{\beta<\xi} L_{y_\beta}$ を満たす順序数 $\xi \leq |(\leftarrow, x)_{\leq}|$ がとれる. y_α の定義より

$$\bigcup_{\beta<\alpha} L_{y_\beta} \subset L_{y_\alpha} \setminus \{y_\alpha\} \tag{3.4}$$

が, y_α の定義と事実 3.2 の (i) より

$$y \prec y_\alpha \text{かつ } y \in (\leftarrow, x)_{\leq} \text{ ならば} \quad L_y \subset \bigcup_{\beta<\alpha} L_{y_\beta} \tag{3.5}$$

が成り立つ.

事実 3.7. 任意の $\alpha < \xi$ に対して,

(i) $[y_\alpha, x]_{\leq} \subset A_{y_\alpha}$. 特に $y_\alpha \preceq_\sigma x$.
(ii) $L_{y_\alpha} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} L_{y_\beta} \subset B_{y_\alpha}$.

証明の概略. (i) 任意に $z \in [y_\alpha, x)_{\leq}$ をとる. $y_\alpha \leq z$ より $z \in U_{y_\alpha}$ である. 条件 (1),(2) と (3.4) と (3.5) を用いて $z \notin \bigcup\{U_y : y \prec y_\alpha$ かつ $y_\alpha \in L_y\}$ を示せる. よって条件 (5) から $z \in A_{y_\alpha}$ であり, 従って $[y_\alpha, x)_{\leq} \subset A_{y_\alpha}$ を得る. A_{y_α} は X の閉集合で $x \in \mathrm{Cl}\,(\leftarrow, x)_{\leq}$ ゆえ, $[y_\alpha, x]_{\leq} \subset A_{y_\alpha}$ である.

(ii) 任意に $z \in L_{y_\alpha} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} L_{y_\beta}$ をとる. (3.5) を用いて $z \notin \bigcup\{L_y : y \prec y_\alpha$ かつ $y_\alpha \in U_y\}$ を示せる. よって, 条件 (4) より $z \in B_{y_\alpha}$ である. □

事実 3.8. $x \in \mathrm{Cl}\{y_\alpha : \alpha < \xi\}$.

証明. $x \notin \mathrm{Cl}\{y_\alpha : \alpha < \xi\}$ であったとすると, $\{y_\alpha : \alpha < \xi\} \cap U = \varnothing$ を満たす x の近傍 U がとれる. σ の局所一様性と注意 2.4 と事実 3.7 の (i) より, x の近傍 N が存在して, 任意の $\alpha < \xi$ に対して $y_\alpha \prec_\sigma N$ が成り立つ. $x \in \mathrm{Cl}\,(\leftarrow, x)_\le = \mathrm{Cl}\bigcup_{\alpha<\xi} L_{y_\alpha}$ より $N \cap \bigcup_{\alpha<\xi} L_{y_\alpha} \neq \varnothing$ である.

$$\gamma = \min\{\alpha < \xi : N \cap L_{y_\alpha} \neq \varnothing\}$$

とし, $x_\gamma \in N \cap L_{y_\gamma} \neq \varnothing$ をとる. $x_\gamma \in L_{y_\gamma} \setminus \bigcup_{\beta<\gamma} L_{y_\beta}$ であることと事実 3.7 の (ii) より $x_\gamma \preceq_\sigma y_\gamma$ が成り立つ. 一方 $y_\gamma \prec_\sigma N$ と $x_\gamma \in N$ より $y_\gamma \prec_\sigma x_\gamma$ となり矛盾が生じる. □

事実 3.9. $\{(y_\alpha, x]_\le : \alpha < \xi\}$ は, $(\leftarrow, x]_\le$ における x の近傍基である.

証明. U を $(\leftarrow, x]_\le$ における点 x の近傍とする. $U \cup [x, \rightarrow)_\le$ は空間 X における点 x の近傍なので, σ の局所一様性と注意 2.4 より, ある x の近傍 V が存在して,

(3.6) 任意の $p \in (\leftarrow, x]_\le \setminus U$ に対して, $p \prec_\sigma V$ または $V \prec_\sigma p$ のいずれかが成り立つ.

さらに σ の局所一様性と注意 2.4 より, ある x の近傍 W が存在して,

(3.7) 任意の $p \in X \setminus V$ に対して, $p \prec_\sigma W$ または $W \prec_\sigma p$ のいずれかが成り立つ.

事実 3.8 より $\{y_\alpha : \alpha < \xi\} \cap W \neq \varnothing$ である.

$$\delta = \min\{\alpha < \xi : y_\alpha \in W\}$$

とする. このとき, $(y_\delta, x]_\le \subset U$ を背理法で示す. 点 $q \in (y_\delta, x]_\le \setminus U \neq \varnothing$ が存在したとする. このとき $q \in (y_\delta, x)_\le \subset (\leftarrow, x)_\le = \bigcup_{\alpha<\xi} L_{y_\alpha}$ より

$$\eta = \min\{\alpha < \xi : q \in L_{y_\alpha}\}$$

がとれる. すると, $q \in L_{y_\eta} \setminus \bigcup_{\beta<\eta} L_{y_\beta}$ ゆえ, 事実 3.7 の (ii) から $q \preceq_\sigma y_\eta$ が成り立つ. 一方, $q \in (y_\delta, x)_\le$ と $q \in L_{y_\eta}$ より $y_\delta < q \le y_\eta < x$ なので $q, y_\eta \in (y_\delta, x)_\le$ である. 従って, 事実 3.7 の (i) より $y_\delta \prec_\sigma q$ かつ $y_\delta \prec_\sigma y_\eta$ が成り立つ. $q \in (y_\delta, x]_\le \setminus U$ と (3.6) と $y_\delta \in W \subset V$ と $y_\delta \prec_\sigma q$ より $V \prec_\sigma q$ が得られる. $V \prec_\sigma q$ と $q \preceq_\sigma y_\eta$ より $y_\eta \notin V$, 従って $y_\eta \in X \setminus V$ である. このことと (3.7) と $y_\delta \in W$ と $y_\delta \prec_\sigma y_\eta$ より $W \prec_\sigma y_\eta$ が得られる. よって $x \in W$ より $x \prec_\sigma y_\eta$ である. しかし, これは事実 3.7 の (i) に矛盾する. ゆえに $(y_\delta, x]_\le \subset U$ が成り立つ. □

従って, $\mathcal{B}_l = \{(y_\alpha, x]_\le : \alpha < \xi\}$ とすれば, $\mathcal{B}_l$ は x の $\le$-凸な近傍基である.

同様にして, 部分空間 $[x, \rightarrow)_\le$ 内に点 x における $\le$-凸な近傍基 $\mathcal{B}_u$ がとれる. このとき, $\{V_l \cup V_u : V_l \in \mathcal{B}_l,\ V_u \in \mathcal{B}_u\}$ は X の点 x における $\le$-凸な近傍基である. ゆえに, X は GO 空間である. □

注意 3.10. 証明の概略のみを述べた事実 3.4 と 3.7 は, Čech-Stone のコンパクト化を用いず, 任意のハウスドルフ空間に対して示せる.

注意 3.11. van Mill and Wattel [3],[4] は, 場合分けをして L_x, U_x を定めたが, いずれの場合においても (3.1) で定めた L_x, U_x とそれぞれ一致する.

注意 1.9 と定理 1.10 より次を得る.

系 3.12. 任意の空間 X に対して, 次は同値である.

(i) X は GO 空間である.
(ii) X は局所一様な弱選択関数をもつ.

4. 弱順序化可能空間の弱選択関数による特徴付け

選択位相を用いて局所一様性を拡張することにより, 系 3.12 と同様に弱順序化可能性を特徴付けることができる. ここで, 選択位相は次で定義される概念である.

定義 4.1 ([1]). 空間 X 上の弱選択関数 $\sigma : \mathcal{F}_2(X) \to X$ に対して,

$$\{(\leftarrow, x)_{\preceq_\sigma}, (x, \to)_{\preceq_\sigma} : x \in X\}$$

を準基として生成された X の位相 τ_σ を, σ によって定められた**選択位相** (**selection topology**) という.

定義 4.2. 空間 X 上の弱選択関数 $\sigma : \mathcal{F}_2(X) \to X$ が**選択的局所一様** (**selection-locally uniform**) であるとは, 任意の $x \in X$ と点 x の近傍 $U \in \tau_\sigma$ に対して, 点 x の近傍 V が存在して, 任意の $p \in X \setminus U$ に対して

$$p \prec_\sigma V \text{ または } V \prec_\sigma p$$

のいずれかが成り立つことである.

注意 4.3. 空間 X 上の弱選択関数 $\sigma : \mathcal{F}_2(X) \to X$ に対して, 次が成り立つ.

$$\sigma \text{は局所一様} \Longrightarrow \sigma \text{は選択的局所一様} \Longrightarrow \sigma \text{は連続}.$$

定理 1.10 の証明の Step 1, 2 および注意 1.9 と同じ議論により, 次を得る.

定理 4.4. 任意の空間 X に対して, 次は同値である.

(i) X は弱順序化可能である.
(ii) X は選択的局所一様な弱選択関数をもつ.

References

[1] V. Gutev and T. Nogura, *Selections and order-like relations*, Appl. Gen. Topol. **2** (2001), no. 2, 205–218.
[2] M. Hrušák, I. Martínez-Ruiz, *Selections and weak orderability*, Fund. Math. **203** (2009), no. 1, 1–20.
[3] J. van Mill and E. Wattel, *Selections and orderability*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), no. 3, 601–605.
[4] J. van Mill and E. Wattel, *Orderability from selections: another solution to the orderability problem*, Fund. Math. **121** (1984), no. 3, 219–229.

Graduate School of Science and Engineering, Ehime University, Matsuyama, 790-8577, Japan
E-mail address: k-motooka0426@outlook.jp
E-mail address: yamauchi.takamitsu.ts@ehime-u.ac.jp