数理解析研究所講究録
第2065巻 2018年 19-29

An iterative method for generalized split feasibility problems

千葉大学・法政経学部 青山 耕治
Koji Aoyama
Faculty of Law and Economics,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10, 41A65.
Keywords and phrases. Split feasibility problem, viscosity approximation method, 擬非拡大写像, 不動点, pseudo-contractive 写像.

概要

本稿では, 文献 [1] で得られた結果, 特に文献 [1] の主結果の応用部分を中心に解説する。

1 はじめに

文献 [1] は, viscosity approximation method [19] と呼ばれる不動点近似法の一般形 (第 3 節参照) についての研究成果をまとめたものである。本稿では, 文献 [1] の主結果の応用部分, つまり, 文献 [16] との関係および pseudo-contractive 写像の不動点近似について解説する。

文献 [16] では次のような実行可能性問題を扱っている。

問題 1.1. C を Hilbert 空間 H_1 の空でない閉凸部分集合, $U: C \to C$ を widely more generalized hybrid 写像 [18], $B \subset H_1 \times H_1$ を極大単調作用素, T を Hilbert 空間 H_2 から H_2 への非拡大写像, L を H_1 から H_2 への有界線形作用素とする。このとき, $z = Uz$, $0 \in Bz$ および $Lz = TLz$ となる $z \in C$ を求めよ。

そして, 文献 [16] では, この問題の解を近似する方法が提案されている。具体的には, $x_1 \in C$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x_{n+1} = \beta_n x_n + (1-\beta_n)\Big(\alpha_n u_n + (1-\alpha_n) U J_{\lambda_n}\big(x_n - \lambda_n L^*(I-T)Lx_n\big)\Big) \qquad (1.1)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ が, ある仮定のもとで問題 1.1 の解に強収束することが示されている。ここで, $\{\alpha_n\}$ および $\{\beta_n\}$ は $(0,1)$ の数列, $\{u_n\}$ は H_1 の点列, $\{\lambda_n\}$ は正の数列, I は H_2 上の恒等写像, L^* は L の随伴作用素である。

いま, $\gamma_n = \alpha_n(1-\beta_n)$, $T_n = UJ_{\lambda_n}\big(I - \lambda_n L^*(I-T)L\big)$ とおくと[*1], (1.1) は,

$$x_{n+1} = \gamma_n u_n + (1-\gamma_n)\left[\frac{\beta_n}{1-\gamma_n}x_n + \left(1 - \frac{\beta_n}{1-\gamma_n}\right)T_n x_n\right]$$

のように変形できる。このことから, (1.1) で定義される点列は, 文献 [9] などで考察した viscosity approximation method [19] の一般形の一つと見なすことができる。そこで本稿では, 文献 [9] で得られた成果をさらに一般化し, その応用として (1.1) で定義される点列の収束性を示す (詳しくは, 第 3 節, 第 4 節を参照)。

本稿の構成は次の通りである。第 2 節では, 第 3 節以降に必要な定義などを述べる。第 3 節では, viscosity approximation method [19] の一般形による収束定理 (定理 3.1) とその系を述べる。第 4 節では, 第 3 節の結果を使って問題 1.1 の解の近似に関する収束定理を示す。最後の第 5 節では, Lipschitz 連続な pseudo-contractive 写像の不動点近似に関する応用例を示す。

2 準備

本稿では, 特に断らない限り, H を実 Hilbert 空間, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を H の内積, $\|\cdot\|$ を H のノルム, C を H の空でない閉凸部分集合, I を H 上の恒等写像, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合とする。H の点列 $\{x_n\}$ が x に強収束するとき $x_n \to x$, 弱収束するとき $x_n \rightharpoonup x$ と表す。

T を C から H への写像とする。T の不動点の集合を $\mathrm{F}(T)$ と表す。つまり, $\mathrm{F}(T) = \{z \in C : z = Tz\}$ である。T が擬非拡大 (quasinonexpansive) であるとは, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$, かつ, すべての $x \in C$ と $p \in \mathrm{F}(T)$ に対して $\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$ が成り立つときをいう。擬非拡大写像の不動点集合は, 閉凸集合であることが知られている [14, Theorem 1]。T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。T が 0 で demiclosed であるとは, $\{x_n\}$ が C の点列で $x_n \rightharpoonup p$ および $Tx_n \to 0$ のとき, $Tp = 0$ が成り立つときをいう。

H から C の上への距離射影 (metric projection) を P_C と表す。つまり, $x \in H$ のとき, $P_C(x)$ は

$$\|x - P_C(x)\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}.$$

を満たす唯一の C の点である。距離射影について詳しくは, [21] を参照するとよい。

f を C から C への写像, F を C の空でない部分集合, $\theta \in [0,1)$ とする。f が F について θ-縮小写像 (contraction) であるとは, すべての $x \in C$ と $z \in F$ に対して

[*1] ここでの I は,H_1 上の恒等写像である。

$\|f(x) - f(z)\| \leq \theta \|x - z\|$ が成り立つときをいう [4]。f が C について θ-縮小写像のとき, f を (C 上の) θ-縮小写像という。

A を C から H への写像とし, $\rho > 0$ とする。A が ρ-逆強単調 (inverse strongly monotone) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\langle x - y, Ax - Ay \rangle \geq \rho \|Ax - Ay\|^2$ が成り立つときをいう。

B を H から H への集合値写像とする。B の有効定義域を $\mathrm{D}(B)$ で, B の零点集合を $B^{-1}0$ で表す。つまり, $\mathrm{D}(B) = \{x \in H : Bx \neq \emptyset\}$, $B^{-1}0 = \{z \in \mathrm{D}(B) : Bz \ni 0\}$ とする。B とそのグラフ $\{(x, y) \in H \times H : x \in \mathrm{D}(B), y \in Bx\}$ を同一視する。B が単調作用素 (monotone operator) であるとは, すべての $(x, y), (u, v) \in B$ に対して $\langle x - u, y - v \rangle \geq 0$ が成り立つときをいう。単調作用素 B が極大 (maximal) であるとは, $B' \subset H \times H$ が単調作用素で $B \subset B'$ のとき, $B = B'$ が成り立つときをいう。

$B \subset H \times H$ を極大単調作用素, $\lambda > 0$ とする。このとき, $(I + \lambda B)^{-1}$ は, H から $\mathrm{D}(B)$ への 1 価写像になること知られている [21]。$(I + \lambda B)^{-1}$ を B のリゾルベン (resolvent) という。

$\{T_n\}$ を C から H への写像の列とし, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(T_n) \neq \emptyset$ とする。このとき, $\{T_n\}$ が強擬非拡大型 (strongly quasinonexpansive type) であるとは, 次の条件が成り立つときをいう [9]。

- 各 T_n は擬非拡大であり,
- $\{x_n\}$ が C の有界点列で, ある $p \in F$ に対して $\|x_n - p\| - \|T_n x_n - p\| \to 0$ が成り立つとき, $T_n x_n - x_n \to 0$ となる。

$z \in C$ が $\{T_n\}$ の漸近的不動点 (asymptotic fixed point) であるとは, C の点列 $\{x_n\}$ と $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ が存在し, $T_n x_n - x_n \to 0$ および $x_{n_i} \rightharpoonup z$ が成り立つときをいう [2]。$\{T_n\}$ の漸近的不動点の集合を $\hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ と表す。明らかに, $F \subset \hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ が成り立つ。

註 1. Hilbert 空間では, 写像列 $\{T_n\}$ が強擬非拡大型であることと, 文献 [5, 11] の意味で strongly relatively nonexpansive sequence であることは同値である [9, Remark 2.5]。次節の定理 3.1 で $F = \hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ という条件を仮定するが, この条件は, $\{T_n\}$ が条件 (Z) を満たすことと同値になる [2, Proposition 6]。ここで, $\{T_n\}$ が条件 (Z) を満たすとは, $\{x_n\}$ が C の有界点列で $T_n x_n - x_n \to 0$ を満たすとき, $\{x_n\}$ の弱収積点が F に属するときをいう [3, 5, 10]。強擬非拡大型で条件 (Z) を満たす写像列の例については, [11], [9, Example 4.5] および [3, 7] を参照するとよい。

3 Viscosity approximation method

本節では, 擬非拡大写像列の共通不動点の近似に関する収束定理とそれから得られる系を述べる。

次の定理は, 文献 [1] の主結果 [1, Theorem 3.1] で, この定理で使われている近似法は, viscosity approximation method [19] と呼ばれる不動点近似法を一般化したものである。

定理 3.1. H を Hilbert 空間, C を空でない H の閉凸部分集合, $\{S_n\}$ を C から C への写像の列, F を $\{S_n\}$ の共通不動点の集合, $\{\alpha_n\}$ を $(0,1]$ の数列とする。$\{S_n\}$ が強擬非拡大型であり, $F \neq \emptyset$, $\hat{\mathrm{F}}(\{S_n\}) = F$, $\alpha_n \to 0$ および $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を仮定する。さらに, $\{f_n\}$ を C から C への写像列, $\theta \in [0,1)$ とし, 各 f_n は F について θ-縮小写像であり, $f_n \circ P_F(u) \to u$ となる $u \in C$ が存在すると仮定する。このとき, $x_1 \in C$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x_{n+1} = \alpha_n f_n(x_n) + (1 - \alpha_n) S_n x_n \tag{3.1}$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ に強収束する。

定理 3.1 より, 次の系が得られる。

系 3.2. H, C, $\{S_n\}$, F および $\{\alpha_n\}$ は, 定理 3.1 と同じとする。$\{u_n\}$ を C の点列で $u_n \to u$ とする。このとき, $x_1 \in C$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n+1} = \alpha_n u_n + (1 - \alpha_n) S_n x_n$ で定義される点列 $\{x_n\}$ は, $P_F(u)$ に強収束する。

証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ と $x \in C$ に対して, $f_n \colon C \to C$ を $f_n(x) = u_n$ で定義すると, f_n は 0-縮小写像であり, $f_n \circ P_F(u) = u_n \to u$ となる。したがって, 定理 3.1 より結論が得られる。 □

定理 3.1 より, 次の系 [9, Theorem 3.1] も得られる。

系 3.3. H, C, $\{S_n\}$, F および $\{\alpha_n\}$ を定理 3.1 と同じとする。さらに, $\{f_n\}$ を C から C への写像列, $\theta \in [0,1)$ とし, 各 f_n は F について θ-縮小写像であり, すべての $z \in F$ に対して $\{f_n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ は 1 点集合であると仮定する。このとき, $x_1 \in C$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して (3.1) で定義される点列 $\{x_n\}$ は w に強収束する。ここで, w は $P_F \circ f_1$ の唯一の不動点である。

証明. $P_F \circ f_1$ は F 上の縮小写像であるから, その不動点 $w \in F$ がただ一つ存在す

る。仮定より, $\{f_n(w) : n \in \mathbb{N}\}$ は 1 点集合であるから, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n \circ P_F(f_1(w)) = f_n(w) = f_1(w)$ が成り立つ。したがって, 定理 3.1 より結論が得られる。 $\square$

4 Split feasibility problem への応用

本節では, 第 3 節で得られた結果を使い, 次の実行可能性問題の解の近似に関する結果を示す。

問題 4.1. H_1 と H_2 を Hilbert 空間, C を空でない H_1 の閉凸部分集合, $U\colon C \to H_1$ を擬非拡大写像, $B \subset H_1 \times H_1$ を極大単調作用素, $T\colon H_2 \to H_2$ を非拡大写像, $L\colon H_1 \to H_2$ を有界線形作用素とし, $L \neq 0$ とする. このとき, $z \in \mathrm{F}(U) \cap B^{-1}0 \cap L^{-1}\,\mathrm{F}(T)$ を求めよ.

問題 4.1 は, 問題 1.1 を少し一般化したものである。この後, 問題 4.1 に関する収束定理を述べるが, その前に系 3.2 を使って次の定理 [1, Theorem 4.2] を示す。

定理 4.2. H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $\rho > 0$, $A\colon H \to H$ を ρ-逆強単調写像, $B \subset H \times H$ を極大単調作用素, $U\colon C \to H$ を擬非拡大写像, $\{u_n\}$ を H の点列, $\{\alpha_n\}$ を $(0,1]$ の数列, $\{\beta_n\}$ を $[a,b]$ の数列, $\{\lambda_n\}$ を $[c,d]$ の数列とする。ここで, $0 < a \leq b < 1$ および $0 < c \leq d < 2\rho$ である。さらに, $F = \mathrm{F}(U) \cap (A+B)^{-1}0 \neq \emptyset$, $\mathrm{D}(B) \subset C$, $I - U$ は 0 で demiclosed, $u_n \to u$, $\alpha_n \to 0$ および $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を仮定し, H の点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in H$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x_{n+1} = \beta_n x_n + (1-\beta_n)\big(\alpha_n u_n + (1-\alpha_n) U J_{\lambda_n}(x_n - \lambda_n A x_n)\big)$$

で定義する。ここで, $J_{\lambda_n} = (I + \lambda_n B)^{-1}$ である。このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ に強収束する。

証明. $T_n = U J_{\lambda_n}(I - \lambda_n A)$ とおく。J_{λ_n} と $I - \lambda_n A$ は, 文献 [13] の意味で強非拡大 (strongly nonexpansive) であるから, [13, Proposition 1.1] より, それらの合成 $J_{\lambda_n}(I - \lambda_n A)$ も強非拡大である。よって, [7, Lemma 5.8], [20, Lemma 2.3], および [10, Lemma 3.2] より, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{F}(T_n) = F$ であり, T_n は擬非拡大であることがわかる。$\{x_n\}$ の定義より, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \gamma_n u_n + (1-\gamma_n)\left[\frac{\beta_n}{1-\gamma_n} x_n + \left(1 - \frac{\beta_n}{1-\gamma_n}\right) T_n x_n\right] \\ &= \gamma_n u_n + (1-\gamma_n) S_n x_n \end{aligned}$$

となる。ここで, $\gamma_n = \alpha_n(1-\beta_n)$, $S_n = \dfrac{\beta_n}{1-\gamma_n}I + \left(1 - \dfrac{\beta_n}{1-\gamma_n}\right)T_n$ とおいた。このとき, $0 < \inf_n \dfrac{\beta_n}{1-\gamma_n}$, $\sup_n \dfrac{\beta_n}{1-\gamma_n} < 1$, $\gamma_n \to 0$ および $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$ となることは容易に確認できる。ゆえに, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(T_n) = F$ および [11, Theorem 3.8] から, $\{S_n\}$ は強擬非拡大型であり, $\hat{\mathrm{F}}(\{S_n\}) = F$ である。したがって, 系 3.2 により結論が得られる。 □

定理 4.2 および他の結果を使うと, 次の定理が示せる。

定理 4.3. H_1, H_2, C, B, U, T および L を問題 4.1 と同じとし, L^* を L の随伴作用素, F を問題 4.1 の解の集合, $\{\alpha_n\}$ および $\{\beta_n\}$ を定理 4.2 と同じとし, $\{u_n\}$ を H_1 の点列, $\{\lambda_n\}$ を $[c,d]$ の数列とする。ただし, $0 < c \le d < 1/\|L\|^2$ である。さらに, $F \neq \emptyset$, $\mathrm{D}(B) \subset C$, $I-U$ は 0 で demiclosed, $u_n \to u$ を仮定し, $\{x_n\}$ を $x_1 \in H$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して (1.1) で定義される H_1 の点列とする。ただし, $J_{\lambda_n} = (I + \lambda_n B)^{-1}$ である。このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ に強収束する。

証明. $A = L^*(I-T)L$ とおく。[22, Lemma 3.3] および [22, Lemma 3.4] より, A は $1/(2\|L\|^2)$-逆強単調写像であり, $B^{-1}0 \cap L^{-1}\mathrm{F}(T) = (A+B)^{-1}0$ となる。よって, $F = \mathrm{F}(U) \cap (A+B)^{-1}0$ である。したがって, 定理 4.2 より結論が得られる。 □

文献 [16] の主結果は, 定理 4.3 から直ちに得られる。実際, 写像 U を [16, Theorem 3.1] と同じとする。つまり, α, β, γ, δ, ϵ, ζ, η が,

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \ge 0 \text{ および } \alpha + \beta > 0, \text{ and } \zeta + \eta \ge 0$$

を満たす実数であり, U が文献 [18] の意味で $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta)$-widely more generalized hybrid 写像であるとする。このとき, [18, Lemma 5.3] および [15, Lemma 4.1] より, U は擬非拡大であり, さらに, [15, Lemma 4.2] より, $I-U$ は 0 で demiclosed であることが知られている。したがって, [16, Theorem 3.1] は定理 4.3 から得られる。

5 Pseudo-contractive 写像の不動点近似

本節では, C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合, T を C から C への写像とし, さらに, 次を仮定する。

- $\eta > 0$ であり, T は η-Lipschitz 連続写像, つまり, 任意の $x, y \in C$ に対して, $\|Tx - Ty\| \le \eta \|x - y\|$;

- $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ であり, 任意の $x \in C$ および $z \in \mathrm{F}(T)$ に対して,

$$\|Tx - z\|^2 \leq \|x - z\|^2 + \|Tx - x\|^2 ; \tag{5.1}$$

- $I - T$ は 0 で demiclosed である。

ここでは, 定理 3.1 を使って, この写像 T の不動点近似関する定理を示す。

註 2. $T\colon C \to C$ が pseudo-contractive [12], つまり, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \|x - Tx - (y - Ty)\|^2$$

であり, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ ならば, (5.1) が成り立つ. さらに, T が連続ならば, $I - T$ は 0 で demiclosed であることが知られている [1, Lemma 5.1]。

まず, 文献 [17] の計算を参考にして, 次の結果を示そう。

補助定理 5.1. 写像 $U\colon C \to C$ を,

$$U = \lambda T\big(\mu T + (1-\mu)I\big) + (1-\lambda)I,$$

で定義する。ここで, $0 \leq \lambda \leq \mu$ である。このとき, すべての $x \in C$ および $z \in \mathrm{F}(T)$ に対して,

$$\lambda\mu(1 - 2\mu - \mu^2\eta^2)\, \|x - Tx\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \|Ux - z\|^2$$

が成り立つ。

証明. $S = \mu T + (1-\mu)I$ とおき, $x \in C$, $z \in \mathrm{F}(T)$ とする。(5.1) より,

$$\begin{aligned}
\|Sx - z\|^2 &= \mu \|Tx - z\|^2 + (1-\mu)\|x - z\|^2 - \mu(1-\mu)\|Tx - x\|^2 \\
&\leq \mu\left(\|x - z\|^2 + \|Tx - x\|^2\right) + (1-\mu)\|x - z\|^2 - \mu(1-\mu)\|Tx - x\|^2 \\
&= \|x - z\|^2 + \mu^2 \|Tx - x\|^2
\end{aligned}$$

である。この不等式と (5.1) より,

$$\begin{aligned}
\|TSx - z\|^2 &\leq \|Sx - z\|^2 + \|Sx - TSx\|^2 \\
&\leq \|x - z\|^2 + \mu^2\|Tx - x\|^2 + \|\mu(Tx - TSx) + (1-\mu)(x - TSx)\|^2 \\
&= \|x - z\|^2 + \mu(2\mu - 1)\|Tx - x\|^2 \\
&\qquad + \mu\|Tx - TSx\|^2 + (1-\mu)\|x - TSx\|^2
\end{aligned}$$

を得る。仮定より, $\lambda-\mu\leq 0$, T は η-Lipschitz 連続であり, $I-S=\mu(I-T)$ だから,

$$\begin{aligned}\|Ux-z\|^2 &= \lambda\|TSx-z\|^2+(1-\lambda)\|x-z\|^2-\lambda(1-\lambda)\|TSx-x\|^2\\ &\leq \|x-z\|^2+\lambda\mu(2\mu-1)\|Tx-x\|^2+\lambda\mu\|Tx-TSx\|^2\\ &\qquad +\lambda(\lambda-\mu)\|x-TSx\|^2\\ &\leq \|x-z\|^2+\lambda\mu(2\mu-1)\|Tx-x\|^2+\lambda\mu\eta^2\|x-Sx\|^2\\ &= \|x-z\|^2-\lambda\mu(1-2\mu-\mu^2\eta^2)\|Tx-x\|^2\end{aligned}$$

となる。 □

補助定理 5.1 を使うと, 次の補助定理 [1, Lemma 5.3] が得られる。

補助定理 5.2. $\{\lambda_n\}$ および $\{\mu_n\}$ を実数列, $0<\inf_n\lambda_n$, $\sup_n\mu_n<\dfrac{-1+\sqrt{1+\eta^2}}{\eta^2}$, すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $\lambda_n\leq\mu_n$ とする。各 $n\in\mathbb{N}$ ごとに写像 $U_n\colon C\to C$ を,

$$U_n=\lambda_nT\big(\mu_nT+(1-\mu_n)I\big)+(1-\lambda_n)I \tag{5.2}$$

で定義し, $\mathrm{F}(T)\neq\emptyset$ を仮定する。このとき, 以下が成り立つ。

(1) すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して, $\mathrm{F}(U_n)=\mathrm{F}(T)$;
(2) $\{U_n\}$ は強擬非拡大型であり;
(3) $\hat{\mathrm{F}}(\{U_n\})=\mathrm{F}(T)$ となる。

証明. $\rho=(\inf_n\lambda_n)^2\big(1-2\sup_n\mu_n-(\sup_n\mu_n)^2\eta^2\big)$ とおく。仮定より, すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$\lambda_n\mu_n(1-2\mu_n-\mu_n^2\eta^2)\geq\rho>0$$

となることがわかる[*2]。

最初に (1) を示そう。$w\in\mathrm{F}(U_n)$, $z\in\mathrm{F}(T)$ のとき, 補助定理 5.1 より,

$$0\leq\rho\|w-Tw\|^2\leq\|w-z\|^2-\|U_nw-z\|^2=0$$

となる。よって, $w=Tw$ であるから, $\mathrm{F}(U_n)\subset\mathrm{F}(T)$ が示せた。一方, $\mathrm{F}(U_n)\supset\mathrm{F}(T)$ は明らかだから, (1) が示せた。

次に, (2) を示そう。$x\in C$, $w\in\mathrm{F}(U_n)$ とする。このとき, (1) より $w\in\mathrm{F}(T)$ だから, 補助定理 5.1 より, $\|U_nx-w\|\leq\|x-w\|$ となる。したがって, 各 U_n は擬非拡大である。

---

*2 $\phi(t)=1-2t-t^2\eta^2$ とおくと, $0<t<\left(-1+\sqrt{1+\eta^2}\right)/\eta^2$ のとき, $\phi(t)>0$ で ϕ は単調減少である。

$\{y_n\}$ を C の有界点列とし, ある $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(U_n)$ に対して, $\|y_n - z\| - \|U_n y_n - z\| \to 0$ が成り立つとする。(1) より $z \in \mathrm{F}(T)$ であり, U_n は擬非拡大, $\{y_n\}$ は有界であるから, 補助定理 5.1 より,

$$\begin{aligned} 0 \le \rho \|y_n - Ty_n\|^2 &\le (\|y_n - z\| + \|U_n y_n - z\|)(\|y_n - z\| - \|U_n y_n - z\|) \\ &\le 2\|y_n - z\| (\|y_n - z\| - \|U_n y_n - z\|) \to 0 \end{aligned}$$

となる。よって, $y_n - Ty_n \to 0$ である。仮定より, $\lambda_n, \mu_n \in [0,1]$ であり, T は η-Lipschitz 連続だから,

$$\begin{aligned} \|y_n - U_n y_n\| &= \lambda_n \left\| T\big(\mu_n T y_n + (1-\mu_n) y_n\big) - y_n \right\| \\ &\le \left\| T\big(\mu_n T y_n + (1-\mu_n) y_n\big) - T y_n \right\| + \|T y_n - y_n\| \\ &\le (\eta + 1) \|T y_n - y_n\| \to 0 \end{aligned}$$

となる。したがって, $\{U_n\}$ は強擬非拡大型である。

最後に (3) を示そう。$\hat{\mathrm{F}}(\{U_n\}) \supset \mathrm{F}(T)$ は明らかだから, $\hat{\mathrm{F}}(\{U_n\}) \subset \mathrm{F}(T)$ を示せばよい。$z \in \hat{\mathrm{F}}(\{U_n\})$, $p \in \mathrm{F}(T)$ とする。このとき, $z_n - U_n z_n \to 0$ および $z_{n_i} \to z$ となる C の点列 $\{z_n\}$ とその部分列 $\{z_{n_i}\}$ が存在する。$p \in \mathrm{F}(U_n)$, U_n は擬非拡大, $\{z_{n_i}\}$ は有界であり,

$$0 \le \|z_{n_i} - p\| - \|U_{n_i} z_{n_i} - p\| \le \|z_{n_i} - U_{n_i} z_{n_i}\| \to 0$$

だから, 補助定理 5.1 より,

$$\begin{aligned} 0 \le \rho \|z_{n_i} - T z_{n_i}\|^2 &\le (\|z_{n_i} - p\| + \|U_{n_i} z_{n_i} - p\|)(\|z_{n_i} - p\| - \|U_{n_i} z_{n_i} - p\|) \\ &\le 2\|z_{n_i} - p\| (\|z_{n_i} - p\| - \|U_{n_i} z_{n_i} - p\|) \to 0 \end{aligned}$$

となる。よって, $z_{n_i} - T z_{n_i} \to 0$ である。仮定より, $I - T$ は 0 で demiclosed だから, $z \in \mathrm{F}(T)$ となる。以上で, $\hat{\mathrm{F}}(\{U_n\}) \subset \mathrm{F}(T)$ が示せた。 □

補助定理 5.2 より, U_n は擬非拡大で $\mathrm{F}(U_n) = \mathrm{F}(T)$ だから, $\mathrm{F}(T)$ は H の閉凸部分集合であることがわかる。

定理 3.1 および補助定理 5.2 より, 次の定理が得られる。

定理 5.3. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合, $\eta > 0$, $T\colon C \to C$ を η-Lipschitz 連続写像とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して写像 $U_n\colon C \to C$ を (5.2) で定義する。ここで, $\{\lambda_n\}$ および $\{\mu_n\}$ は, 補助定理 5.2 と同じとする。さらに, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ であり, $x \in C$ と $z \in \mathrm{F}(T)$ に対して, (5.1) が成り立つと仮定し, $\{\alpha_n\}$ および θ を定理 3.1 と同じとし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n\colon C \to C$ は $\mathrm{F}(T)$ について θ-縮小写像であり, $f_n \circ P_{\mathrm{F}(T)}(u) \to u$

となる $u \in C$ が存在すると仮定する。このとき, C の点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 \in C$ および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x_{n+1} = \alpha_n f_n(x_n) + (1 - \alpha_n) U_n x_n$$

で定義すると, $\{x_n\}$ は $P_{\mathrm{F}(T)}(u)$ に強収束する。

参考文献

[1] K. Aoyama, *Viscosity approximation method for quasinonexpansive mappings with contraction-like mappings*, Nihonkai Mathematical Journal, to appear.

[2] K. Aoyama, *Asymptotic fixed points of sequences of quasi-nonexpansive type mappings*, in Banach and function spaces III (ISBFS2009), Yokohama Publ., Yokohama, 2011, pp.343–350.

[3] K. Aoyama and Y. Kimura, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7537–7545.

[4] K. Aoyama and Y. Kimura, *Viscosity approximation methods with a sequence of contractions*, Cubo **16** (2014), 9–20.

[5] K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications*, J. Nonlinear Anal. Optim. **3** (2012), 67–77.

[6] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2350–2360.

[7] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 471–489.

[8] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:95, 13pp.

[9] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Viscosity approximation process for a sequence of quasinonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:17, 11pp.

[10] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings*

in Banach spaces, in Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2009, pp.7–26.

[11] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[12] F. E. Browder and W. V. Petryshyn, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967), 197–228.

[13] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[14] W. G. Dotson Jr, *Fixed points of quasi-nonexpansive mappings*, J. Austral. Math. Soc. **13** (1972), 167–170.

[15] M. Hojo, T. Suzuki, and W. Takahashi, *Fixed point theorems and convergence theorems for generalized hybrid non-self mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **14** (2013), 363–376.

[16] M. Hojo and W. Takahashi, *Generalized split feasibility problem governed by widely more generalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, Nihonkai Math. J. **25** (2014), 127–146.

[17] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 147–150.

[18] T. Kawasaki and W. Takahashi, *Existence and mean approximation of fixed points of generalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **14** (2013), 71–87.

[19] A. Moudafi, *Viscosity approximation methods for fixed-points problems*, J. Math. Anal. Appl. **241** (2000), 46–55.

[20] K. Nakajo and W. Takahashi, *Approximation of a zero of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, in Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2002, pp.303–341.

[21] W. Takahashi, *Introduction to nonlinear and convex analysis*, Yokohama Publ., Yokohama, 2009.

[22] W. Takahashi, H.-K. Xu, and J.-C. Yao, *Iterative methods for generalized split feasibility problems in Hilbert spaces*, Set-Valued Var. Anal. **23** (2015), 205–221.