

# 実特殊線形変換群 $SL(2, \mathbf{R})$ の3次元モデルと部分群の可視化

東海大学・理学部 前田 陽一 (Yoichi Maeda)<sup>1</sup>  
School of Science,  
Tokai University

**Abstract.** この論文では、実特殊線形変換群  $SL(2, \mathbf{R})$  を動的幾何学ソフトウェアを用いて可視化できることを紹介する。  $SL(2, \mathbf{R})$  から3次元球面  $S^3$  に埋め込み、さらに3次元球面  $S^3$  から3次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^3$  に立体射影することにより、  $SL(2, \mathbf{R})$  の各元が3次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^3$  内の一点と対応することになる。このモデルを用いて  $SL(2, \mathbf{R})$  の群構造を幾何的に理解することが最終的な目標である。今回は、トレースが一定の曲面、一次元部分群、二次元部分群の形状について調べる。有名な幾何図形である直角双曲線やレムニスケートがトレースと関係していることを見る。また、ある単位球面上の曲線が、トレース一定の曲面、部分群の形状と深くかかわっていることを示す。本研究で用いる数学ソフトウェアは Cabri II plus, Cabri 3D, GeoGebra と Mathematica である。

## 1 群 $SL(2, \mathbf{R})$ の3次元モデル

この節では、まず群  $SL(2, \mathbf{R})$  の3次元モデルについて述べる。群  $SL(2, \mathbf{R})$  の定義は、

$$SL(2, \mathbf{R}) = \{A \in M(2, \mathbf{R}) \mid \det A = 1\}$$

であり、  $SL(2, \mathbf{R})$  は4次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^4$  の中の3次元多様体である。  $SL(2, \mathbf{R})$  を3次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^3$  で可視化するアイディアは、

- (1)  $SL(2, \mathbf{R})$  から3次元球面  $S^3$  への写像を考え、
- (2) 次に、  $S^3$  から  $\mathbf{R}^3$  へ立体射影する、

ことによって実現される。

3次元球面  $S^3$  から一つの大円を取り除いた開集合を

$$S^3 \setminus \{u = 0\} = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid |u|^2 + |v|^2 = 1, u \neq 0\}$$

とする。3次元球面上の点  $(u, v) \in S^3 \setminus \{u = 0\}$  に対して、次の行列を考えよう。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{|u|^2} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(u) + |u|\operatorname{Re}(v) & \operatorname{Im}(u) + |u|\operatorname{Im}(v) \\ -\operatorname{Im}(u) + |u|\operatorname{Im}(v) & \operatorname{Re}(u) - |u|\operatorname{Re}(v) \end{pmatrix}.$$

---

<sup>1</sup>maeda@tokai-u.jp

この行列  $A$  の行列式を計算すると,

$$\begin{aligned} \det A &= \frac{1}{|u|^4} (\operatorname{Re}(u)^2 - |u|^2 \operatorname{Re}(v)^2 + \operatorname{Im}(u)^2 - |u|^2 \operatorname{Im}(v)^2) \\ &= \frac{1}{|u|^4} (|u|^2 - |u|^2 |v|^2) = \frac{1}{|u|^2} (1 - |v|^2) = 1. \end{aligned}$$

行列式が 1 になるので  $A$  は  $SL(2, \mathbf{R})$  の元となる. これで, 3次元球面内の集合  $S^3 \setminus \{u=0\}$  から  $SL(2, \mathbf{R})$  への写像が定義できた.

今度は逆に,  $A \in SL(2, \mathbf{R})$  の要素  $a, b, c, d$  から  $u, v$  を決定してみよう.

$$\begin{aligned} a+d &= \frac{2}{|u|^2} \operatorname{Re}(u), & a-d &= \frac{2}{|u|} \operatorname{Re}(v), \\ b-c &= \frac{2}{|u|^2} \operatorname{Im}(u), & b+c &= \frac{2}{|u|} \operatorname{Im}(v), \end{aligned} \tag{1}$$

なので, 次の式が成り立つ,

$$(a+d)^2 + (b-c)^2 = \frac{4}{|u|^4} |u|^2 = \frac{4}{|u|^2}.$$

ここで,  $r = \sqrt{(a+d)^2 + (b-c)^2}$  とおくと,

$$|u| = \frac{2}{r}, \tag{2}$$

となる ( $r = \sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2 + 4} \geq 2$  であることに注意されたい). 式 (1), (2) を用いると次の関係式が導かれる.

$$\begin{cases} u = \frac{2}{r^2} \{(a+d) + (b-c)i\}, \\ v = \frac{1}{r} \{(a-d) + (b+c)i\}. \end{cases}$$

以上により,  $S^3 \setminus \{u=0\}$  と  $SL(2, \mathbf{R})$  の間の一対一写像が得られた. 3次元球面  $S^3$  の南極  $(u, v) = (-1, 0)$  から 3次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^3$  への立体射影は次の式で与えられる ([2] p.24).

$$(X, Y, Z) = \frac{(\operatorname{Re}(v), \operatorname{Im}(v), \operatorname{Im}(u))}{1 + \operatorname{Re}(u)} = \frac{(r(a-d), r(b+c), 2(b-c))}{r^2 + 2(a+d)}. \tag{3}$$

この射影において, 除外集合  $\{u=0\}$  ( $|v|=1$ ) は,  $XY$ -平面上の単位円に対応しており,  $SL(2, \mathbf{R})$  が単連結でないことを示している.

図 1.1 において, すでにくつつかの部分群が可視化できている. 式 (3) より,  $XY$ -平面は対称行列 ( $b=c$ ) の集合に対応している. 同様に,  $YZ$ -平面は  $a=d$  の集合

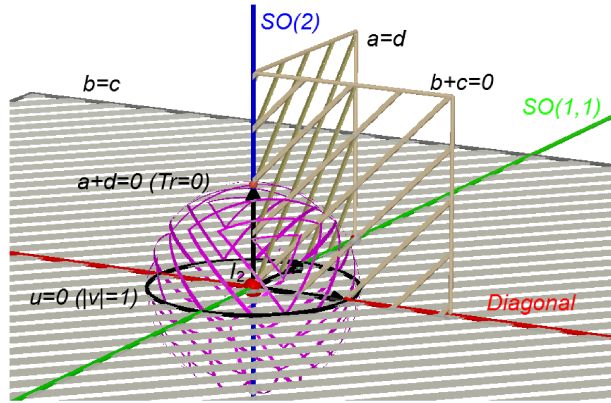


図 1.1:  $SL(2, \mathbf{R})$  の 3次元モデル.

に対応しており,  $ZX$ -平面は  $b+c=0$  の集合に対応している. 単位球面はトレースの値が0の集合 ( $\text{Tr}(A) = a+d=0$ ) に対応している. 単位球面は3次元球面  $S^3$  の赤道面に対応するので  $\text{Re}(u) = 0$  であるが, 式 (1) より,  $a+d=0$  と同値となるというのがその理由である. 以上の考察より,  $X$  軸,  $Y$  軸,  $Z$  軸はそれぞれ次のような部分群と対応していることがわかる.

$$\pm \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

単位行列  $I_2$  は原点  $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$  にある. 一方,  $-I_2$  は無限遠点にあり, このモデルでは唯一見えない点である.

このようにして,  $SL(2, \mathbf{R})$  のうち  $-I_2$  を除くすべての元を  $\mathbf{R}^3$  内の点と対応させることができる.

## 2 5つの平面曲線を内包する球面上の曲線

前節で導入した3次元モデルを用いて解析するにあたって, 単位球面上のある曲線  $C_0$  が重要な役割を果たす. この節では, 次の式で定義されるパラメーター曲線  $C_0$

$$(x, y, z) = (\sin \theta, \sin \theta \cos \theta, \cos^2 \theta). \quad (4)$$

を考察しよう. この空間曲線  $C_0$  は, 次の式で表される5つの平面曲線 (円, 放物線,

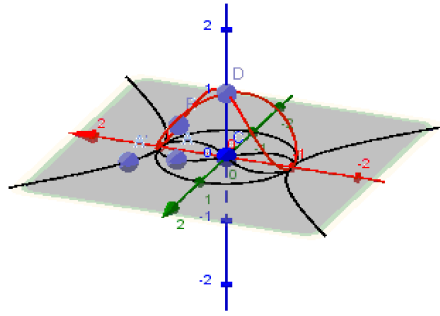


図 2.1: 5つの曲線のジェネレーターとしての空間曲線  $C = 0$ .

双曲線, レムニスケート, (リサーチ図形) のジェネレーターになっている.

$$\begin{aligned} y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\ z &= -x^2 + 1, \\ x^2 - y^2 &= 1, \\ x^2 - y^2 &= (x^2 + y^2)^2, \\ x^2 - x^4 &= y^2. \end{aligned}$$

これら5つの平面曲線は, 正射影と立体射影によって得られる (図 2.1).

式 (4) より,

$$x^2 + z = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

であるから, 曲線  $C_0$  の  $XZ$ -平面への正射影は放物線  $z = -x^2 + 1$  となる.  
また, 式 (4) は次のように式変形できる.

$$(x, y, z) = \left( \sin \theta, \frac{1}{2} \sin 2\theta, \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \right). \quad (5)$$

したがって, 曲線  $C_0$  の  $XY$ -平面への正射影は, 次の式で定義されるリサーチ曲線

$$(x, y) = \left( \sin \theta, \frac{1}{2} \sin 2\theta \right),$$

で, このリサーチ図形は  $x^2 - x^4 = y^2$  とも表される.

さらに, 曲線  $C_0$  の  $YZ$ -平面への正射影については, 式 (5) より,

$$y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta + \frac{1}{4} \cos^2 2\theta = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

と変形できる. このことは空間曲線  $C_0$  が単位球面と円柱 (原点  $O = (0, 0, 0)$  と単位球面の北極  $N = (0, 0, 1)$  を直径とし, 軸が  $x$  軸と平行な円柱) との交線であるこ

とを示している。

以上, 3平面への正射影が円, 放物線, リサージュ曲線であることを見てきたが, 今度は立体射影の像を調べてみよう. 北極  $N = (0, 0, 1)$  から  $XY$ -平面への立体射影を考えると,

$$(X, Y) = \frac{(x, y)}{1-z} = \frac{(\sin \theta, \sin \theta \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{(1, \cos \theta)}{\sin \theta}.$$

したがって,

$$X^2 - Y^2 = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 1,$$

これは直角双曲線である。

一方, 南極  $S = (0, 0, -1)$  から  $XY$ -平面への立体射影はレムニスケートになることが次の計算で求められる。

$$(X, Y) = \frac{(x, y)}{1+z} = \frac{(\sin \theta, \sin \theta \cos \theta)}{1 + \cos^2 \theta}.$$

したがって,

$$X^2 - Y^2 = \frac{\sin^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{(1 + \cos^2 \theta)^2} = \frac{\sin^4 \theta}{(1 + \cos^2 \theta)^2}$$

$$X^2 + Y^2 = \frac{\sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta)}{(1 + \cos^2 \theta)^2} = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta},$$

となり, レムニスケートの方程式  $X^2 - Y^2 = (X^2 + Y^2)^2$  を満たすことがわかる。因みに, 双曲線  $X^2 - Y^2 = 1$  とレムニスケート  $X^2 - Y^2 = (X^2 + Y^2)^2$  は単位円  $X^2 + Y^2 = 1$  に関して反転の関係にある。これは, 北極  $N$  からの立体射影と南極  $S$  からの立体射影の合成で反転が得られることから理解できる。

次節以降で,  $SL(2, \mathbf{R})$  の3次元モデルを解析していくが, 結論を先に言うとレムニスケート  $X^2 - Y^2 = (X^2 + Y^2)^2$  はトレースの値が2の行列の集合と関係している。また, 双曲線  $X^2 - Y^2 = 1$  はトレースの値が-2の行列の集合と関係している。空間曲線  $C_0$  が重要な空間曲線であることが, 次節以降で明らかになる。

### 3 トレース一定曲面の可視化

この節では, トレースの値が一定の曲面について調べよう。実は, トレースの値が一定の曲面は  $Z$  軸周りの回転面である。たとえば, トレースの値が-2 ( $\text{Tr}(A) = -2$ ) の場合, 式(1)より  $\text{Re}(u) = -|u|^2$  である。  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  とおくと, 式(3)を用いて,

$$R^2 = X^2 + Y^2 = \frac{|v|^2}{(1 + \text{Re}(u))^2} = \frac{1 - |u|^2}{(1 - |u|^2)^2} = \frac{1}{1 - |u|^2},$$

$$Z^2 = \frac{\text{Im}(u)^2}{(1 + \text{Re}(u))^2} = \frac{|u|^2 - \text{Re}(u)^2}{(1 - |u|^2)^2} = \frac{|u|^2 - |u|^4}{(1 - |u|^2)^2} = \frac{|u|^2}{1 - |u|^2}.$$

したがって、 $R^2 - Z^2 = 1$  となり、この曲面は一葉双曲面である。同様に、 $\text{Tr}(A) = 2$  の場合を調べてみると、式 (1) より、 $\text{Re}(u) = |u|^2$  である。このとき、

$$R^2 = \frac{1 - |u|^2}{(1 + |u|^2)^2}, \quad Z^2 = \frac{|u|^2(1 - |u|^2)}{(1 + |u|^2)^2},$$

であるから、

$$R^2 + Z^2 = \frac{1 - |u|^2}{1 + |u|^2}, \quad R^2 - Z^2 = \frac{(1 - |u|^2)^2}{(1 + |u|^2)^2}.$$

したがって、 $R^2 - Z^2 = (R^2 + Z^2)^2$  が得られる。この曲面は前節で登場したレムニスケートを母線に持つ回転面である (図 3.1 (左))。より一般に、 $\text{Tr}(A) = 2t$  の場合、

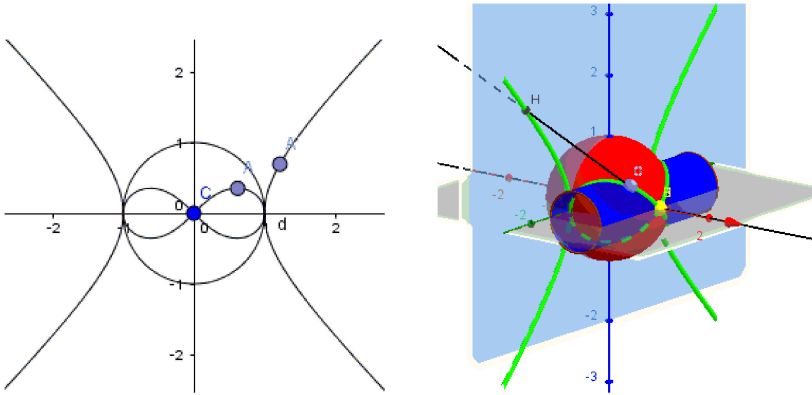


図 3.1: 回転面の母線群.

曲面は次の式で与えられる。

$$(t+1)(Z^2 + R^2)^2 + 2t(Z^2 - R^2) + t - 1 = 0. \quad (6)$$

式 (6) を求めるには若干の計算が必要である。式 (3) より、

$$R^2 = X^2 + Y^2 = \frac{1 - |u|^2}{(1 + \text{Re}(u))^2}, \quad Z^2 = \frac{|u|^2 - \text{Re}(u)^2}{(1 + \text{Re}(u))^2}$$

であるから、

$$R^2 + Z^2 = \frac{1 - \text{Re}(u)}{1 + \text{Re}(u)}$$

である。したがって、

$$\text{Re}(u) = \frac{1 - R^2 - Z^2}{1 + R^2 + Z^2}, \quad 1 + \text{Re}(u) = \frac{2}{1 + R^2 + Z^2}. \quad (7)$$

以上で  $\text{Re}(u)$  が求まったので、 $R^2$  の式に代入することにより、

$$|u|^2 = 1 - \frac{4R^2}{(1 + R^2 + Z^2)^2}. \quad (8)$$

式(1)より,  $t|u|^2 = \operatorname{Re}(u)$  であるから, 上で求めた式(7)と式(8)を組み合わせ

$$t\{(1 + R^2 + Z^2)^2 - 4R^2\} = (1 + R^2 + Z^2)(1 - R^2 - Z^2).$$

この式を整理することにより式(6)が得られる(図3.2). この回転面の母線を理解

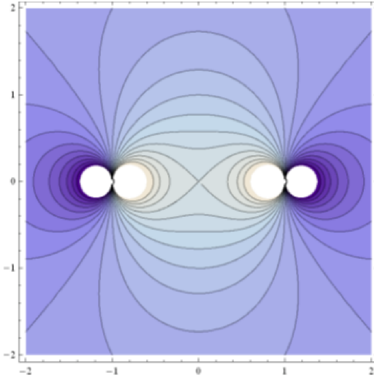


図 3.2: トレースの値が一定の回転面の母線群.

するために,  $YZ$ -平面上にある母線  $(t+1)(Z^2 + Y^2)^2 + 2t(Z^2 - Y^2) + t - 1 = 0$  を  $(x, y, z) = (-1, 0, 0)$  から単位球面に立体射影してみよう. 関係式

$$(Y, Z) = \frac{(y, z)}{1 + x},$$

より, 次の式が得られる.

$$\left(x - \frac{1}{2t}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2t}\right)^2,$$

この式は, 回転面の母線がある空間曲線の立体射影として得られることを示している. すなわち, この空間曲線は, 図3.1(右)のように,  $x = \frac{1}{2t}$  を軸とし, 半径  $\frac{1}{2t}$  の円柱と単位球面との交線である. 以上で, トレースが一定の曲面が回転面であり, そのすべての母線が単位球面上の空間曲線(円柱との交線)の立体射影として得られることがわかった.

## 4 指数写像の可視化

この節では, 一次元部分群である指数写像の形を見てみよう. リー群  $SL(2, \mathbf{R})$  のリー環  $sl(2, \mathbf{R})$  元は, つぎのようなトレースが0の行列からなる ([1] p.245).

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta + \gamma \\ \beta - \gamma & -\alpha \end{pmatrix},$$

$T^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)I_2$  を満たすので、指数写像  $e^{tT}$  は、次ような3種類となる。

$$e^{tT} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} T^n = C(t)I_2 + S(t)T = \begin{pmatrix} C(t) + \alpha S(t) & (\beta + \gamma)S(t) \\ (\beta - \gamma)S(t) & C(t) - \alpha S(t) \end{pmatrix},$$

ここで、 $C(t)$  と  $S(t)$  は、 $I_2$  での接ベクトルの種類に応じて、

$$(C(t), S(t)) = \begin{cases} (1, t) & (\text{光的 } \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0) \\ (\cosh t, \sinh t) & (\text{空間的 } \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = +1) \\ (\cos t, \sin t) & (\text{時間的 } \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = -1) \end{cases}$$

である。いずれの場合も  $C(t)$  と  $S(t)$  は

$$C(t)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)S(t)^2 = 1 \quad (9)$$

を満たす。以下、簡単のために  $C = C(t), S = S(t)$  と表すことにする。3次元モデルでの像を求めてみよう。

$$r^2 = (a+d)^2 + (b-c)^2 = 4C^2 + 4\gamma^2 S^2, \quad r = 2\sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2}$$

であるから、

$$(X, Y, Z) = \frac{(r(a-d), r(b+c), 2(b-c))}{r^2 + 2(a+d)} = \frac{(\sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2} \alpha S, \sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2} \beta S, \gamma S)}{C^2 + \gamma^2 S^2 + C} \quad (10)$$

となる。式(10)から、指数写像の像は、平面  $\beta X = \alpha Y$  上にあることがわかる。また、単位行列  $I_2$  での接ベクトルは、 $\vec{v} = \frac{1}{2}(\alpha, \beta, \gamma)$  であることもわかる。指数写像の軌道が  $Z$  軸回りで回転対称であることを見るために、 $(R, Z)$  座標で表してみると、

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} S}{C^2 + \gamma^2 S^2 + C} = \frac{\sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2} \sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2 - 1}}{C^2 + \gamma^2 S^2 + C},$$

$$(R, Z) = \frac{(\sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2} \sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2 - 1}, \gamma S)}{C^2 + \gamma^2 S^2 + C}.$$

したがって、指数写像の軌道は、 $\gamma$  の値が同じであれば、 $Z$  軸回転対称であることがわかる。図 4.1 は、 $YZ$ -平面上の指数写像の軌道である。緑色の軌道は空間的ベクトルの指数写像の軌道であり、青色の軌道は時間的ベクトルの指数写像の軌道である。黒い曲線は、トレースが一定の曲面の母線である。光的ベクトルの指数写像の軌道はレムニスケート上にある ( $C = 1$  より、トレースの値が 2 であることから明らかである)。



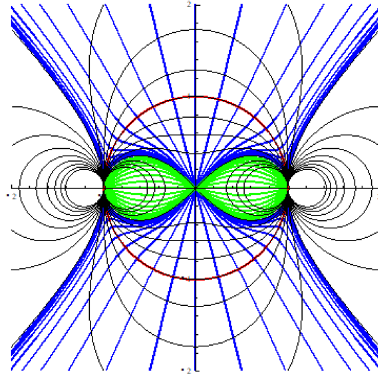


図 4.1: 指数写像の軌道.

指数写像の軌道を幾何的に理解してみよう. 結論から言うと, 2節で紹介した曲線のリサーチ曲線と関係がある.

$\alpha = 0$ として,  $YZ$ -平面上の軌道を見てみると,  $C^2 + (\gamma^2 - \beta^2)S^2 = 1$  より,

$$(Y, Z) = \frac{(\sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2} \sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2 - 1}, \gamma S)}{C^2 + \gamma^2 S^2 + C} = \frac{(\sqrt{1 + \beta^2 S^2} \beta S, \gamma S)}{1 + \beta^2 S^2 + C}.$$

$YZ$ -平面上の軌道を単位球面  $S^2$  に  $P = (-1, 0, 0)$  から立体射影してみよう. 球面上の点の  $Y, Z$  座標を  $y, z$  とすると,

$$(y, z) = \frac{2(Y, Z)}{1 + Y^2 + Z^2}$$

である. 球面上の  $y, z$  の座標を求めるために, まず,  $Y^2 + Z^2$  と  $1 + Y^2 + Z^2$  を次のように計算しておく.

$$\begin{aligned} Y^2 + Z^2 &= \frac{(1 + \beta^2 S^2) \beta^2 S^2 + \gamma^2 S^2}{(1 + \beta^2 S^2 + C)^2} = \frac{(1 + \beta^2 S^2) \beta^2 S^2 + 1 + \beta^2 S^2 - C^2}{(1 + \beta^2 S^2 + C)^2} \\ &= \frac{(1 + \beta^2 S^2)^2 - C^2}{(1 + \beta^2 S^2 + C)^2} = \frac{1 + \beta^2 S^2 - C}{1 + \beta^2 S^2 + C}. \\ 1 + Y^2 + Z^2 &= \frac{2(1 + \beta^2 S^2)}{1 + \beta^2 S^2 + C}. \end{aligned}$$

よって, 球面上の  $y, z$  の座標は次のようになる.

$$(y, z) = \frac{2(Y, Z)}{1 + Y^2 + Z^2} = \frac{(\sqrt{1 + \beta^2 S^2} \beta S, \gamma S)}{1 + \beta^2 S^2}.$$

さて, この  $y, z$  が満たす関係式は次のようになる.

$$y^2 - y^4 = y^2(1 - y^2) = \frac{\beta^2 S^2}{1 + \beta^2 S^2} \left(1 - \frac{\beta^2 S^2}{1 + \beta^2 S^2}\right) = \frac{\beta^2 S^2}{(1 + \beta^2 S^2)^2} = \frac{\beta^2}{\gamma^2} z^2,$$

したがって、

$$z^2 = \frac{\gamma^2}{\beta^2}(y^2 - y^4). \quad (11)$$

式 (11) は、リサージュ曲線  $z^2 = y^2 - y^4$  を  $z$  軸方向に伸縮させたものになっている。接ベクトルが空間的であれば、 $\gamma^2/\beta^2$  は 1 より小さいので、 $z$  軸方向に縮めたりリサージュ曲線を球面に  $x$  軸方向から投影してできる球面上の曲線となる。接ベクトルが時間的であれば、逆に  $z$  軸方向に伸ばしたりリサージュ曲線を球面に  $x$  軸方向から投影してできる球面上の曲線となる (図 4.2)。このように、指数写像の軌道を

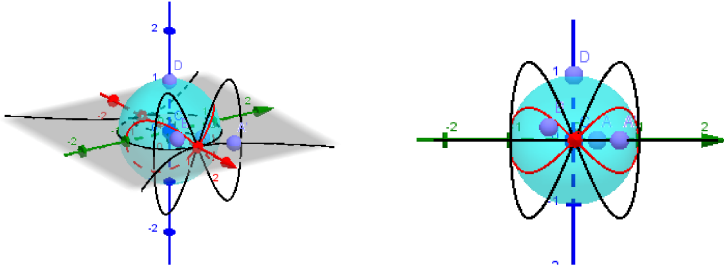


図 4.2:  $Z$  方向に伸縮させたリサージュ曲線。

幾何的に理解することができる。

## 5 上三角行列のなすの部分群の可視化

最後に、2 次元的ひろがりを持つ部分群の形を調べよう。次のような上三角行列からなる行列は、部分群をなす。以下、 $a > 0$  として、計算を簡単にするために次のように  $t, b'$  を定める。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2b' \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$r^2 = (a+d)^2 + (b-c)^2 = 4(\cosh^2 t + b'^2)$  であるから、

$$(X, Y, Z) = \frac{(r(a-d), r(b+c), 2(b-c))}{r^2 + 2(a+d)} = \frac{(\sqrt{\cosh^2 t + b'^2} \sinh t, \sqrt{\cosh^2 t + b'^2} b', b')}{\cosh^2 t + b'^2 + \cosh t} \quad (12)$$

となる。パラメータの  $t, b'$  を消去するために、以下の 3 つの値を求めておく。

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{(\cosh^2 t + b'^2)(\sinh^2 t + b'^2) + b'^2}{(\cosh^2 t + b'^2 + \cosh t)^2} = \frac{\cosh^2 t + b'^2 - \cosh t}{\cosh^2 t + b'^2 + \cosh t},$$

$$1 + X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{2(\cosh^2 t + b'^2)}{\cosh^2 t + b'^2 + \cosh t}, \quad 1 - X^2 - Y^2 - Z^2 = \frac{2 \cosh t}{\cosh^2 t + b'^2 + \cosh t}.$$

このとき,

$$\begin{aligned} Y\sqrt{(1-X^2-Y^2-Z^2)^2+4Z^2} &= \frac{\sqrt{\cosh^2 t + b'^2} \sqrt{4 \cosh^2 t + 4b'^2}}{(\cosh^2 t + b'^2 + \cosh t)^2} \\ &= \frac{2(\cosh^2 t + b'^2)b'}{(\cosh^2 t + b'^2 + \cosh t)^2} = (1+X^2+Y^2+Z^2)Z. \end{aligned}$$

よって, 求める曲面の方程式は,

$$(1+X^2+Y^2+Z^2)Z = Y\sqrt{(1-X^2-Y^2-Z^2)^2+4Z^2}$$

となる (図 5.1). この曲面は, 平面  $Y = Z$  に含まれるベクトル  $\vec{v} = \frac{1}{2}(\alpha, \beta, \beta)$  を接

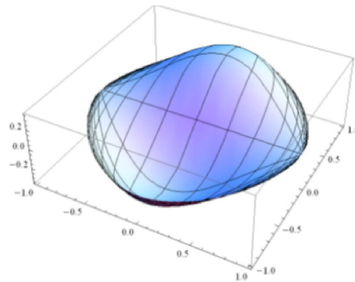


図 5.1: 上三角行列の成すの部分群.

ベクトルに持つ光的, および空間的指数写像の像 (図 4.1 の緑色の軌道) からできている.

## 謝辞

本研究は, 京都大学数理解析研究所共同事業「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」による成果である.

## 参考文献

- [1] 小林俊行・大島利雄『リー群と表現論』岩波書店, 2005.
- [2] 谷口雅彦・奥村善英『双曲幾何学への招待—複素数で視る—』培風館, 1996.
- [3] 前田陽一 動的幾何学ソフトウェアによる実特殊線形変換群  $SL(2, \mathbb{R})$  の 3 次元モデル, 数理解析研究所講究録 1951, PP. 49-53, 2015.