

GeoGebraによるスナップを用いた「発見」を促す教材

明治大学・先端数理科学研究科 原 知己 (Tomoki Hara)
Graduate School of Advanced Mathematical Sciences,
Meiji University
明治大学・総合数理学部 阿原 一志 (Kazushi Ahara)
School of Interdisciplinary Mathematical Sciences,
Meiji University

概要

動的幾何学ソフトウェア GeoGebra によるスナップを用いた教材について考える。スナップ機能は GeoGebra に備わったコマンドを使って実装が可能であり、実際にそのような実装を行ったコンテンツはすでにインターネット上にて公開されている。しかしながら、スナップを有効に使った教材ということになると、十分な考察が行われていないのが現状である。本論文では、スナップを用いて生徒の学習の満足感を高めたり、生徒が問題の本質を見つけやすくしたりする教材の提案を行う。ここで重要なことは、生徒が教師に知識を提示されるのではなく、生徒が自ら模索し、見つけるような教材を目指すことである。

1 はじめに

動的幾何学ソフトウェアを用いることにより、学習者はスライダーや点などのオブジェクトを動かすことによって、数学的な事象を動的に観察する機会を与えられる。ここでは学習者が能動的に教材を動かせる仕組みを提供できることから、生徒の自主性を促すことができると考えられている。

しかしながら、スライダーなどの決まりきった範囲内のみ操作が許されているような教材が現状の主流であり、生徒の自由な観察を促しているのかどうか、画面上の決まりきった動きが学習者の思考停止を生んでいないか、などの問題点が考えられる。また、動的に操作できる電子教材は生徒の興味を引き易いものの、生徒の知識の定着や理解の深化には必ずしもつながらないのではないかという危惧もある。以上を踏まえると、生徒が自主的に自由な模索を行えて、その結果自ら発見、思考できるような場を教材の中に提供できることが重要である。

教員が教材の中にゴールとなる事象をひそかに準備し、生徒が自由な活動の後にそのゴールを発見するためには、教材設計上の困難を伴う。たとえば、生徒が目的のゴールを発見するために、マウスを画面上のある特定の場所に置かなければいけないものとしてみよう。そのようなことはしばしば起こり得る。しかし、コンピュータのソフトウェア上では0.1でも異なる値は一致とは認められず、生徒がゴールへのヒントを得る機会を得る確率が限りなく0に近づいてしまうのが現実である。この状況は生徒にとって学習の妨げになるばかりでなく、教材の目標が不明確になってしまう恐れがある。

GeoGebra ではこの問題を解決するために「Snap to Grid」と「Fixed to Grid」という機能が用意されている。Gridとは格子のことであり、格子状の点に近づくと、磁石のようにマウスやオブジェクトが吸い寄せられる機能である。この「吸い寄せられるように点が動く」ことをスナップと呼ぶ。格子の幅は変えることができ、デフォルトでは1刻みだが、0.5刻みなどにもすることができる。「Snap to Grid」は格子に近づくと自動的に格子点にスナップする機能である。「Fixed to Grid」は格子点以外は移動することができないようにする機能である。これらの機能により生徒が特定の点にぴったりマウスを合わせる機会が増え、生徒へのヒントを提示しやすくなることが想定される。しかしこれらの機能はすべての格子点に対して機能し、特定の箇所にもスナップすることができない。必要のない箇所にもスナップするのは教員の目指す「生徒の発見」を促すには著しく不都合である。また格子点にのみにしかスナップできず、教材を設計する上で不便である。たとえば格子と格子の間の点に対して発見すべきオブジェクトを置きたい場合はうまくいかない。そこで本稿ではGeoGebraに搭載されているスクリプトを使って任意の箇所にスナップする機能の実装を紹介し、スナップを有効に使いながら、生徒が自ら手を動かし何かを発見できるような教材の提案を行う。

2 関連研究

はじめにスナップ機能を持った教材を探すためにGeoGebraで作成した教材の公開を行うサイトであるGeoGebraTubeを参照した。そこで「snap」をキーワード検索するとスナップに関連した教材を見ることができる[1]。公開されている教材の中には実際にスナップの実装を行ったものがいくつかある。現在、GeoGebraで実装されているスナップ機能の技術は「任意の点から任意の点へのスナップ」と「任意の点から任意のオブジェクトへのスナップ」の2つがある。どちらの技術もGeoGebraのスクリプトを使って実装されている。この章では2つのスナップ機能の実装方法について記述していく。

2.1 任意の点から任意の点へのスナップ

下に示す実装方法は公開されていた「Snap to Point」[2]という教材を参考にした。

1. スナップする点（ここではA）、スナップされる点（ここではB）、距離の閾値（ここでは ϵ ）を定義する
2. 点AのPropertiesにあるScriptingのOn Updateに以下を記述する。

$$A=If[Distance[A, B]<\epsilon, B, A]$$

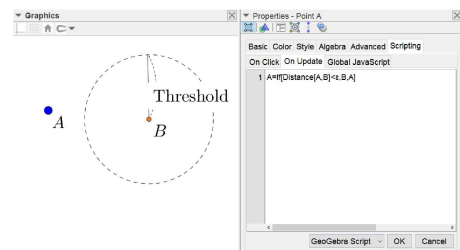


図1 実装の概形。

上のプログラムは点Aが更新されることをイベントリスナーとして実行され、逐次、点Aと点Bの距離を計算する。そしてその2点間の距離が閾値未満のとき点Aは点Bにスナップされる。

2.2 任意の点から任意のオブジェクトへのスナップ

「magnetic object」 [3] を参考にした。二次曲線、線分、関数など多種多様なオブジェクトに対してスナップが可能である。

1. 任意の点（ここではP）、任意のオブジェクト（ここではobject）と閾値（ここでは ϵ ）を作る
2. object 上に点（ここではQ）を取る
※ Q はオブジェクト上でしか動けない “Point on Object” で定義する。
3. 点Pの properties にある Scripting の On Update に次のプログラムを記述する

```
SetValue[Q, P]
SetValue[P, If[Distance[P, Q] < ε, Q, P]]
```

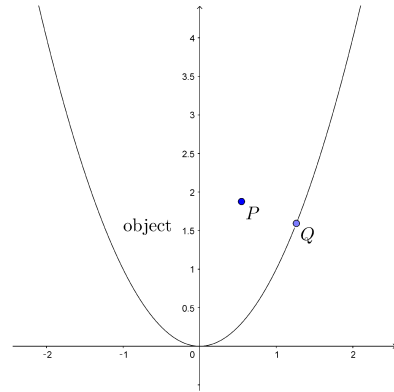


図2 実装の概形. 図の場合では object は $y = x^2$ である. 点Pが動くとき点Qは $y = x^2$ 上で点Pと $y = x^2$ の最小の距離を取る点として動く.

点Pが動くときプログラムが実行され、点Qはオブジェクト上で点Pに最も近い点として動き、点Pと点Qの距離を計算する。点Pと点Qの距離が閾値未満のとき、点Pは点Qにスナップされる。

3 教材例

先述したように GeoGebra においてスナップ機能を実装した教材はあるがスナップを有効に用いた教材は GeoGebraTube には見つけられなかった。この章では実際にスナップを用いた教材の例を紹介する。

3.1 ピタゴラスの定理

最初にピタゴラスの定理を例に挙げる。ピタゴラスの定理を論述を用いず証明する方法として面積を利用したパズルがある ([4], 図3)。この方法は直感的にピタゴラスの定理を理解するのに有効である。このパズルを実際に授業で行うためには印刷して切り取り、パズルをするという方法を取ることができ、生徒の人数分用意する必要がある。このパズルを電子教材にすれば、わざわざ切らなくても学ぶことができる。実際、GeoGebraTube ではピタゴラスの定理のパズルを体験できる教材が多く公開されている [5, 6]。しかしながらこれらの教材にはそれぞれ問題点がある。

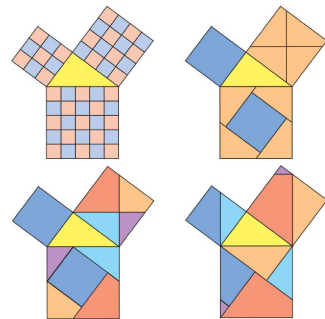


図3 三平方の定理を用いたパズルの例

1つ目の例 [5] ではパーツが面積にぴったり当てはまることを重視し、パーツが自由に動かさないことである。[5] ではそれぞれのパーツを動かすことができ、すべてのパーツがしっかりと正方形に収まる。しかしそれぞれのパーツに対して、始めにパーツが置いてある場所とパーツがはまる場所を線で結んだその線分上でしか動けないようになっている。これではパーツの動きを観察し、公式が正しいことは示せるが、せっかくのパズルの要素が失われている。従ってパーツは任意の動き方を許容した上で、生徒に模索する機会を与えるような教材にすべきである。

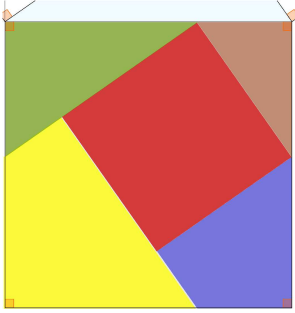


図4 [6] を実際に使用した例。一見きれいにはまっているように見えるが、ところどころ隙間や重なりが生じている。またここまで敷き詰めるためにはかなり拡大をして微調整をしなければならない。

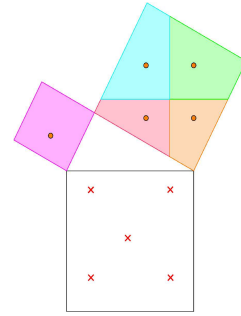


図5 実際の実装の様子。パーツにある点は動かすための点。下の斜辺で作られる正方形にあるxの点はそれぞれのスナップされる点。

2つ目の例 [6] では逆に任意の動き方ができることを重視し、ぴったり当てはまらないということである。[6] ではパーツが任意の動き方ができるため、生徒はパーツがどこに当てはまるのか考えることができる。しかし好きな場所に動かせるため、マウス操作で隙間や重なりなくパーツをしっかりと敷き詰めることは難しい(図4)。パーツがぴったり当てはまっていないにも関わらず、ピタゴラスの定理が成り立つという主張は生徒に違和感を与えてしまう可能性がある。

そのためこのようなパズルに対して求められることは、「オブジェクトが任意の動きができること」、「指定した箇所しっかりと当てはまること」である。この2つを満たすために点から点へのスナップ機能を用いる。方法としてはそれぞれのパーツ上の好きな場所に点(図5では●の点)を取る。この点がパーツを動かすための点となりスナップする点となる。さらにそれぞれのパーツがふさわしい場所に移動したとする。このとき先ほどのスナップする点が移動した場所にもう1つ点(図5ではxの点)を取り、このもう1つの点をスナップされる点として設定する方法である。ただし、スナップされる点は非表示にしておく。この方法により、パーツは自由に動かすことができ、適切な場所の近くに持ってくるとスナップし、ぴったり当てはまることができるようになっている。また紙媒体と異なり、スナップすることによってパーツがぴたっと当てはまるという感覚を生徒に提示することができ、見えないけれども生徒が自ら手を動かすことによってヒントを得ることができる。

3.2 相似形

次に相似の教材を例に挙げる。相似の問題を解くうえで重要なことの1つは図から相似の組を見つけることである。そのためには頭の中で図形を回転、拡大・縮小させ、当てはまる図形を探す直感的な操作が必要である。しかし図形が苦手な生徒はまずそのイメージをすることが難しい。イメージすることを指導するために例えば図6から相似な図形を探すという問題を想定する。このとき生徒に相似であることを直感的に理解させるためには各図形を回転、拡大・縮小させることが必要である。回転は紙に印刷してパーツをそれぞれ切って回転させれば可能だが紙である以上、拡大も縮小もできない。

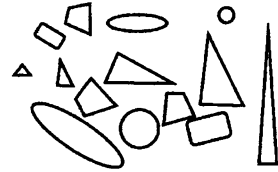


図6

そこで回転、拡大・縮小をするために電子教材として扱う。GeoGebraTubeで「similarity」で検索すると相似に関連した教材が多くみられる[7]。そこで公開されている教材はスライダーを動かして相似を観察する教材[8]や点を動かしてもう1つの図形と相似の関係にするという教材[9]が見受けられる。これらの教材は相似の考え方を理解するには有効であるが、実際に問題で提供される図から相似な図形を見つける訓練にはならない。実際の問題の図から三角形を取り出し、拡大、回転をすることによってぴったり当てはまるかを試すことが必要である。

そこで次のような教材を紹介する。問題で与えられる図を図7とする。まず問題で与えられる図を作ったらその図から三角形のパーツを作成する(図7-[a])。この三角形は自由に動かすことができ、角度を保ちながら拡大・縮小ができるようにし、さらに三角形の頂点は元の図形の頂点や交点にスナップすることができるようにする。これによって任意の動き、回転、スケールを変えることを可能にし(図7-[b])、同時に頂点にぴったり合わせるということができる。相似な図形でなければ当てはまらないが(図7-[c])、相似な図形のときは三角形がぴったり当てはまる(図7-[d])。仮にスナップ機能がないとすると相似な関係であってもぴったり当てはまらず、本当に相似の関係かを実感することが難しくなる。相似であることを強く印象付けるために、この教材ではスナップ機能が効果的であると考えられる。

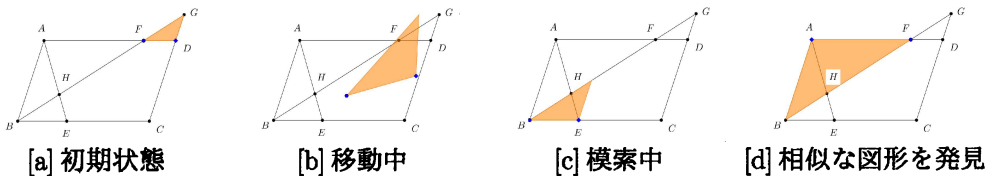


図7 実装と実行の様子

3.3 軌跡との組み合わせ

3つ目に軌跡と組み合わせた教材を紹介する。GeoGebraにはあるオブジェクトが動いた軌跡を表示する「Trace On」という機能が標準で備わっている。この機能を用いて軌跡に関する教材を作ることができる。GeoGebraは手軽に軌跡に関する実験がしやすい

ため, "Trace On"の機能を使った教材は多い. 例えば楕円は焦点からの和が一定の集合であることを示す教材がある [10]. この教材は非表示にされた楕円上を点が動き, 焦点との距離を動的に変えながらも, 和が常に一定であることを示している. しかしこの教材は2つのことに関して生徒に考える機会を与えていない.

1つ目は「2点間からの距離の和が等しい軌跡は何なのか?」を考えさせていないことである. [10]において楕円は焦点からの距離の和が一定であるということは示しているが, 焦点からの距離の和が等しいときどんな軌跡になるかを生徒に考えさせていない. 2つ目に「楕円以外に2点間からの距離の和が等しい軌跡はないのか?」を考えさせていないことである. この教材では点を楕円上でしか動かすことができないためその楕円以外の点については実験することができない. 様々な点を実験してみたいという生徒の好奇心があったとしても, それを試す場が提供されていない. この教材は教師が設定した制限を生徒が従っているだけである. そこで軌跡に関する教材はオブジェクトを自由に動かせることによって, 「軌跡を見つけること」「他にも解はないか」を探せる教材にすることが重要である.

そこでアポロニウスの円を例に挙げ, 次の様な教材を考える. 2定点を A, B とし動点を P とする (図 8-[a]). この点 P は自由に動かすことができ, "Trace On"の機能をオンにしておく. これにより点 P が動くと点 P の軌跡が色付きで表示される. また点 P を動かすと 2 定点からの距離を動的に計算し, 点 P と 2 定点からのそれぞれの距離の比が予め決めた比になるとき点 P の色を変えるようにしておく (図 8-[b]). すると点 P と 2 定点からのそれぞれの距離の比が既定の比になっている部分とそうでない部分で 2 色で色分けされる. 要は点を使って塗り絵をするようなものである. この教材によって生徒は色塗りによって比が一定の集合は円になることを自分で発見し, かつそれ以外の場所では軌跡が作られないことが分かる (図 8-[c]). 色を塗るという行為によって生徒自らが見つけることで数学的な事象の定着が高められることが期待できる.

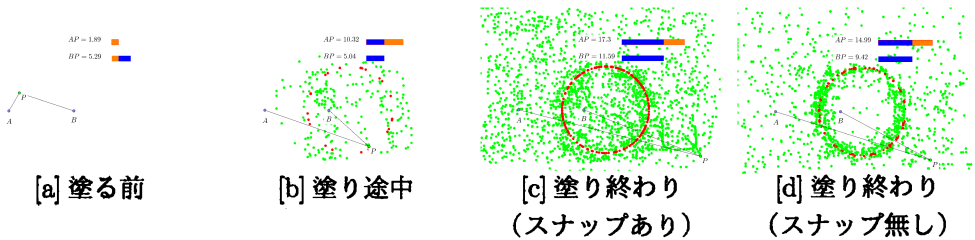


図 8 色を塗る様子

このままでも求めたい軌跡を作ることはできるが, 2つの問題がある. 1つ目は点が重なって表示されることである (図 8-[d]). 動点 P が色が変わる境目の近くにあると複数の色の点重なって表示され, 円の軌跡が潰されがちになってしまう. 2つ目は既定の比に合わせる事が難しいことである. 1章でも述べたようにソフトウェア上では特定の場所にぴったり合わせることは容易ではない. この教材の場合は既定の比にぴったり合わなければ点の色は変わらないため, 円形に軌跡ができづらい可能性がある. 軌跡としての円を発見できなければ生徒の学習を妨げてしまう. この2つの問題を解決するためにスナップを用いる. 点 P がスナップする点 (2.2 節での点 P にあたる), スナップ

されるオブジェクトはあらかじめアポロニウスの円（2.2節での object にあたる）を非表示で作って置く．これにより点Pが円に接近するとスナップし、しっかりとした円の軌跡を描くことができ、見つける難易度を下げたり、色塗りへの満足感を高めたりできる．解答をそのまま教えてしまうと知識の一方的な教授になるが、このように手を動かし自ら見つけるという作業を生徒に要求するだけで、生徒から見た性質への印象は大きく変わり同時に視覚的な印象を与えられる．

3.4 補助線を引く

4つ目に補助線を引く練習をする教材を紹介する．図形の問題を学習させる上で難しいことの1つが補助線の見つけ方を指導することである．補助線を引く必要がある問題は補助線を引かなければ第一歩が進めない問題が多い．また補助線の引き方を間違えるとそこから答えを導き出すのはかなり難しい．そのため正しい補助線を引けているかを生徒が確かめられると、問題を解き進める上での自信につながる．そこで、正しい補助線が引けているかを生徒が確かめられる仕組みを持つような教材を提案する．

まず補助線を引く手順として「平行，垂直，延長線，頂点を結ぶかを定める」→「直線が通る点を決める」→「線を引く」の手順で行うのが一般的であると仮定する．この過程を教材として提供するにはいくつか問題がある．第1の問題はGeoGebraには垂線や平行線を作るコマンドはあるが、コマンドの使い方を生徒が知っていることを前提にした設計は動的幾何学ソフトウェア上の教材として適切さを欠く．第2の問題として新規のオブジェクトを正誤判定に用いることはプログラムの技術上の困難をとまなう点である．たとえば垂線の補助線を引くことを目的とした教材を設計しようとしたとき、教員の思い通りにしっかり垂線を引く生徒もいれば、何となく垂線のようなただの直線を作る生徒もいると予測されるからである．位置や関係を正確に合わせられない確率が高く、正誤判定することが難しい．対して、既存のオブジェクトであらかじめ平行線や垂線を作っておいて生徒に選ばせるという手法もありうるが、すべての線分に対して平行線や垂線を作っておくことは教材として現実的でない．本論文では、あらかじめ垂線や平行線などの制約を持たないただの直線を提示して生徒がこれを自由に動かせるようにしておき、スナップの機能を利用して様々な制約条件を持ったいくつかの直線に対して、スナップできるような仕組みを提案する．

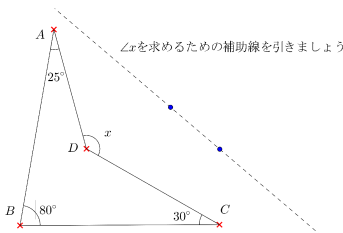


図9 点線が補助線となる直線，点線を作る2つの●の点がスナップする点，頂点にある×の点がスナップされる点．

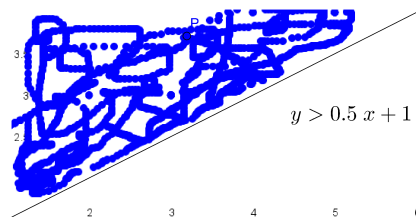


図10 境界線に近づくとそれ以上進めないのではなく、ある一定の距離、はじかれた場所に点が移動する．見えにくい点Pが上の方にはじかれている．

たとえば図9の様な凹四角形の角度を求める問題を考える。この問題を解くにはいくつかの補助線の引き方が考えられるが、今回は点Bと点Dを通る直線を生徒に発見させるような教材を作成することを考える。まず教員は補助線、スナップする点、スナップされる点を設計する。何の条件を持たない2つの自由点を通る直線(図9における点線)を作り、これが補助線になるように生徒に出題するのである。この直線を定める2つの点(図9における●の点)がスナップする点である。また各頂点をスナップされる点(図9における×の点)とする。これで教材の準備は終わりである。次に正答判定の仕方を説明する。今回は直線BDが答えなので答えが分かり、補助線を定める2つの点をそれぞれ、B、Dに動かしたとすると2点は各々、B、Dにスナップされ、生徒から見ればただの直線だった補助線は直線BDという直線として認識される。このようにして何の条件を持たない直線のある条件を持った直線に変えることができる。ここで、直線BD(非表示)と、移動された補助線が一致しているかを調べてメッセージを出すようにすれば、教材として機能することが分かるだろう。

垂線や平行線を発見させたい場合、「特定の点を通る平行線」のような形で発見を促すこともありうる。このような場合、補助線を決めている2つの自由点の両方を「見えている点へスナップさせる」ことはできないので注意が必要である。このような場合、「答えとなる平行線」と「その平行線上のみを動ける点」を非表示にしておくことによりスナップされる点を1つ追加するとうまくいく。補助線は勘で探すものであるので、正答を1つしか用意しないといつまでも見つからないこともありうる。逆に学習者がスナップする点をやみくもに探すようでは学習効果は減ずる。どのような「正しい補助線」「正しくない補助線」を隠しておくかは、教員の工夫が必要である。

3.5 はじかれる

スナップという機能がオブジェクトに対して、磁石のN極とS極が引きあうようにくっつくという機能ならばその逆のオブジェクトに対して、N極とN極が反発しあうようにはじかれることを用いる教材を考えた。はじかれる経験で生徒に「入らない、含まない」という意識が与えられるのではないかと考えた。現在、試作段階にある教材は不等式の表す領域を題材にした教材である。不等式の表す領域では与えられる不等式にイコールを含むか含まないかで不等式の表す領域に境界線が含まるか含まないかが決まる。そこで次のような教材を考えた。任意の不等式を提示し、軌跡が表示される自由点を動かすことによって提示された不等式の表す領域を塗りつぶす。その不等式がイコールを含む場合は境界線をそのまま塗ることができるが、イコールを含まないと境界線に自由点が近づいたときにその境界線からはじかれる(図10)。これによって境界線ではイコールがない場合、進入禁止であることが印象付けられる教材になるのではないかと考えている。

3.6 教材へのスナップを適用する利点

教材へスナップを適用すると次の3つが利点として挙げられる。1つ目に、自由度が高い教材を作るとしたときに生徒を教師が示したいゴールへ誘導できることである。生

徒に様々な思考をさせるためには、教師が設定した制限を生徒が従う不自由な操作ではなく、生徒が動かしたいと思う場所に動かすことができる自由な操作が必要である。しかしコンピュータ上での生徒の自由な操作はソフトウェアの特性上、生徒がゴールへたどり着く機会を少なくしてしまう可能性があるが、スナップ機能を用いることで正しい答えに導くことができる。

次に、ヒントをテキストとして表示がされていなくても、点を動かすことでヒントを提示できるということである。ヒントを提示しようとしてテキストを表示してしまうと生徒にとって答えを見つけるときにあまりにも明確すぎて、発見する事柄の難易度が著しく下がってしまうことがある。対してスナップはスナップされるオブジェクトが非表示でもスナップするため生徒は「探す」という過程を経験することができる。

最後に、ピタッとなり、生徒の満足感、安心感を高められることである。ピタゴラスの定理のパズルでも述べたようにパーツが綺麗に敷き詰められ、面積が等しいことが分かるのと同時にパズルを組み立てられたという達成感がある。またスナップされることによってそれは解答の候補であり、「ここが怪しいな」、「ここであっていいそうだ」という学習を進める上での安心感につなげることができる。

4 今後の活動

今後の活動はスナップが生徒にどのように影響するかをアンケートを通じて検証していく。今まで述べた内容はあくまで筆者の主観であり、スナップが生徒に及ぼす影響を客観的に検証していない。まずスナップを行う閾値の違いによって引き起こされる生徒の感覚の違いを実際に三平方の定理のパズルの教材を使ってもらって検証する。閾値が大きいと過剰なヒントの提示になってしまうし、閾値が小さいとほとんどスナップされず意味がないと仮説を立て、どの程度のスナップが生徒に考えることを行わせ、正しい答えを導くことができるかをパズルの種類やスナップが機能する閾値を変えて計っていく。

さらにスナップがあるかないかによる生徒の感じ方の違いを検証する。スナップ無しでも目的のものを得られれば教材作成の手間の関係上、スナップを作る必要はないだろう。「スナップがないと問題に手を付けられなかったがスナップがあることによって答えを導くことができた」や「スナップがあることによって操作がしやすくなった」を同じコンテンツの教材でスナップ機能がある教材とスナップ機能がない教材を比較して実際に体験してもらい、感想を検証していく。

加えてスナップの技術を向上させる。現在のスナップ機能は「任意の点から任意のオブジェクトへのスナップ」である。これを「任意のオブジェクトから任意のオブジェクトへのスナップ」へ拡張することを考えている。様々な機能を持つことで今より豊富な体験を生徒に与えられるのではないかと考えている。

5 まとめ

スナップを用いた教材の提案を行った。スナップを使うと生徒の満足感を高めたり、ヒントを与えたりすることができる可能性を示した。しかしながらこれは筆者の主観的

な考えであり、実際に生徒にどのように影響するかは教材を使ってもらって検証する必要がある。

スナップ機能を使うことで生徒をゴールに導くことができる確率は上がると考えている。しかし3.3節で示した「軌跡との組み合わせ」のアポロニウスの円の教材は生徒が教師の示したい円という性質を見つけるため探しているのではなく、生徒がスナップする場所を探しに行き、生徒は教師が何を提示したいかを考えることができない可能性があるという意見もあった。スナップがソフトウェア上で機能するためには生徒が手を動かすことが必須だが、生徒が手を動かしているからといって、教師が提示したい事柄を考えているとは限らない。スナップを教師が使う上でスナップする箇所を生徒が探しに行くだけの教材にならないように教師は注意が必要である。

参考文献

- [1] GeoGebraTube, <https://www.geogebra.org/search/perform/search/snap>, (2017-10-26)
- [2] Andrew Knauft."Snap to Point".GeoGebraTube, <https://www.geogebra.org/m/zDANUbjK>, (2017-09-23)
- [3] Raymond Ami."magnetic objects".GeoGebraTube, <https://www.geogebra.org/m/g9CkM2Vk>, (2017-09-23)
- [4] MyNoteBook."三平方の定理のいろいろな証明".MyNoteBook, <http://www.kisnet.or.jp/nappa/download/pythagoras-theorem-puzzle.pdf>, (2017-09-23)
- [5] Steve Phelps."Proof Without Words".GeoGebraTube, <https://www.geogebra.org/m/ZFTGX57r>, (2017-09-23)
- [6] Σ τ α μ τ η Μ α κ ρ."Pythagoras puzzle , Π υ θ α γ ρ ε ι ο γ ι α Δ ι α σ κ δ α σ η". GeoGebraTube, <https://www.geogebra.org/m/Ndx3fe6Y>, (2017-09-23)
- [7] GeoGebraTube, <https://www.geogebra.org/search/perform/search/similarity>, (2017-10-28)
- [8] Guillermo Bautista."Triangle Similarity 1".GeoGebraTube, <https://www.geogebra.org/m/evGvGUxT>, (2017-09-24)
- [9] Anthony C.M. OR."Q1".GeoGebraTube, <https://www.geogebra.org/m/dzZmcjxN#material/XmpN7gMb>, (2017-09-24)
- [10] mcdull."Locus:Ellipse".GeoGebraTube, <https://www.geogebra.org/m/a2XbSCRT>, (2017-09-24)