数理解析研究所講究録
第2068巻 2018年 22-36

平均曲率流の特異点について

東京理科大学・理学部第一部数学科　山本 光
Hikaru Yamamoto
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Tokyo University of Science

概要

本講究録の前半では，平均曲率流の定義から始まり，その特徴付け，短時間存在と一意性，解の爆発，また，解が爆発するときには何が起きるかということまでを，できるだけ前提知識が少なくても理解できるように説明した．しかし，その代償として，多くの命題の証明は厳密なものではなく，概要を述べるに留めた．また，後半では発展的な話題として，解の爆発の際に現れる特異点に対して，一般 I 型特異点と特殊 I 型特異点という二つの概念を導入し，その２つの概念は同じか？という問題を提唱し，それに対する先行結果，部分的回答，いくつかのアプローチをまとめた．リッチフローの研究と話が並行して進むように配慮した．

1　平均曲率流の定義

M を m 次元多様体，(N,g) を n 次元リーマン多様体，$F_0:M\to N$ を滑らかなはめ込み写像とする．平均曲率流とは与えられた部分多様体を体積がより小さくなるように変形する方法の一つである．

定義 1.1. 連続写像 $F:M\times[0,T)\to N$ が $M\times(0,T)$ 上では滑らかで，任意の $t\in[0,T)$ に対して，$F(\cdot,t):M\to N$ は滑らかなはめ込み写像になっており，任意の $(p,t)\in M\times(0,T)$ に対して

$$\frac{\partial F(p,t)}{\partial t}=H(F(p,t)) \tag{1}$$

を満たし，さらに $F(\cdot,0)=F_0(\cdot)$ となっているとき，F を初期条件 F_0 の**平均曲率流**と呼ぶ．

ここで $H(F(p,t))$ ははめ込み写像 $F(\cdot,t):M\to N$ の点 $p\in M$ での平均曲率ベクトルである．また左辺は p を止めるごとにできる $F(p,t)$ という N 内の曲線の時刻 t での速度ベクトルである．以後 $F(\cdot,t):M\to N$ のことを $F_t:M\to N$ と書く．$T=\infty$ のときは, F のことを平均曲率流の**長時間解** (long time solution) と呼ぶ．また, 時間区間 $[0,T)$ の左端が 0 ではなく $-\infty$ のときは, F のことを平均曲率流の**古代解** (ancient solution) と呼ぶ．また，時間区間が $(-\infty,\infty)$ のときは F を平均曲率流の**永久解** (eternal solution) と呼ぶ．古代解，永久解に関しては "初期条件" という概念は意味をなさないことに注意する．

以下で，平均曲率流に沿って部分多様体の体積は減少するという事実を説明する．簡単のため M はコンパクトとする．$F_t:M\to N$ を平均曲率流とは限らない任意のはめ込み写像の 1 パラメーター

族とする．F_t によって g を引き戻すことで，M 上にリーマン計量 $F_t^* g$ が定まる．$F_t^* g$ によって定まる M 上の測度を $\mu(F_t^* g)$ と書くことにする．このとき第一変分公式から

$$\frac{d}{dt}\int_M 1\, d\mu(F_t^* g) = -\int_M \langle V, H(F_t)\rangle d\mu(F_t^* g)$$

を得る．ここで $V := \partial F_t/\partial t$ は F_t の変分ベクトル場である．また左辺は $F_t(M)$ の体積の微分である．ここで，F_t が平均曲率流であったとすると，$V = H(F_t)$ であるから，

$$\frac{d}{dt}\int_M 1\, d\mu(F_t^* g) = -\int_M |H(F_t)|^2 d\mu(F_t^* g) \leq 0$$

となる．これは平均曲率流に沿って $F_t(M)$ の体積が単調に減少するということをいっている．

平均曲率流に関わらず，発展方程式に関してまず最初に解決しておくべきことは，解の短時間存在と一意性である．方程式 (1) は放物型偏微分方程式であるが，一般には主表象が退化しているので，強放物型の偏微分方程式の一般論を適用して即座に解の短時間存在と一意性を示すことはできない．これは，リッチフローの場合も同じである．リッチフローの場合は De Turck トリックという方法で解の短時間存在と一意性が証明できた．平均曲率流にも De Turck トリックと同様の方法がある．それを Zhu [11] の 2.1 節に沿って証明する．証明の前に一つ記号を定義しておく．

定義 1.2. はめ込み写像 $F : M \to N$ と接続

$$\overline{\nabla} : C^\infty(TM) \to C^\infty(TM \otimes T^*M),$$

の組 $(F, \overline{\nabla})$ に対して定まる M 上のベクトル場 $V(F, \overline{\nabla})$ を

$$V(F, \overline{\nabla}) := \left((F^* g)^{ij}\left({}^F\Gamma_{ij}^k - \overline{\Gamma}_{ij}^k\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{2}$$

で定義する．ここで，$(x^1, \ldots, x^m)$ は M の局所座標，$(F^* g)^{ij}$ は M 上の誘導計量 $F^* g$ の逆行列の (i,j) 成分，${}^F\Gamma_{ij}^k$ は $F^* g$ から定まる Levi-Civita 接続 ${}^F\nabla$ の Christoffel 記号，$\overline{\Gamma}_{ij}^k$ は与えられた接続 $\overline{\nabla}$ の Christoffel 記号である．

注意 1.3. 上記の $V(F, \overline{\nabla})$ の定義は局所座標を使っているが，局所座標を使わずに定義することも可能である．まず，${}^F\nabla$ と $\overline{\nabla}$ はどちらも TM の接続であるから，その差は $\mathrm{End}(TM)$ に値をもつ M 上の 1 次微分形式であることに注意する．すなわち

$${}^F\nabla - \overline{\nabla} \in C^\infty(\mathrm{End}(TM) \otimes T^*M) = C^\infty(TM \otimes T^*M \otimes T^*M)$$

である．ここで，$T^*M \otimes T^*M$ の部分を $(F^* g)^{-1}$ に関してトレースを取ると

$$V(F, \overline{\nabla}) = \mathrm{trace}_{F^* g}\left({}^F\nabla - \overline{\nabla}\right) \in C^\infty(TM)$$

となることが分かる．これが $V(F, \overline{\nabla})$ の局所座標に依らない定義である．

平均曲率流の解の短時間存在と一意性を示すために，まず次の発展方程式の解の短時間存在と一意性を示す．

補題 1.4. M はコンパクトであると仮定する．このとき任意のはめ込み写像 $F_0 : M \to N$ と TM の任意の接続 $\overline{\nabla}$ に対して，発展方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_t}{\partial t} &= H(\bar{F}_t) + D\bar{F}_t(V(\bar{F}_t, \overline{\nabla})) \\ \bar{F}(\,\cdot\,, 0) &= F_0,\end{aligned} \tag{3}$$

の短時間解がただ一つ存在する．

(証明). M の局所座標 $(x^1, \ldots, x^m)$ と N の局所座標 $(y^1, \ldots, y^n)$ を一つとり, (3) の右辺の各項を局所座標表示すると,

$$\begin{aligned}(H(\bar{F}_t))^\alpha &= (\bar{F}_t^* g)^{ij}\left(\frac{\partial^2 \bar{F}_t^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial \bar{F}_t^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{F}_t^\gamma}{\partial x^j} - {}^{\bar{F}_t}\Gamma^k_{ij}\frac{\partial \bar{F}_t^\alpha}{\partial x^k}\right) \\ (D\bar{F}_t(V(\bar{F}_t, \overline{\nabla})))^\alpha &= \left((\bar{F}_t^* g)^{ij}\left({}^{\bar{F}_t}\Gamma^k_{ij} - \overline{\Gamma}^k_{ij}\right)\right)\frac{\partial \bar{F}_t^\alpha}{\partial x^k}\end{aligned}$$

となる．${}^{\bar{F}_t}\Gamma^k_{ij}$ という項の中には $\bar{F}_t$ の 2 階微分が含まれているので，$(H(\bar{F}_t))^\alpha$ の中の F_t の 2 階微分の係数は純粋に $(\bar{F}_t^* g)^{ij}$ ではない．これが平均曲率流方程式が退化している原因である．しかし，今の場合は上記の 2 式を足すことで，${}^{\bar{F}_t}\Gamma^k_{ij}$ はキャンセルして，方程式 (3) の局所座標表示は

$$\frac{\partial \bar{F}_t^\alpha}{\partial t} = (\bar{F}_t^* g)^{ij}\left(\frac{\partial^2 \bar{F}_t^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial \bar{F}_t^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{F}_t^\gamma}{\partial x^j} - \overline{\Gamma}^k_{ij}\frac{\partial \bar{F}_t^\alpha}{\partial x^k}\right),$$

となる．この方程式の主表象は $(\bar{F}_t^* g)^{ij}$ であるから, 方程式 (3) は強放物型である．今, M はコンパクトであるから, 強放物型偏微分方程式の解の短時間存在と一意性から, 題意を得る． □

命題 1.5. M はコンパクトであると仮定する．このとき任意のはめ込み写像 $F_0 : M \to N$ に対して，ある正の数 ε と F_0 を初期条件とする平均曲率流の解 $F : M \times [0, \varepsilon) \to N$ がただ一つ存在する．

(証明). TM の接続 $\overline{\nabla}$ を任意に取り固定する．次に, 方程式 (3) の解 $\bar{F} : M \times [0, \varepsilon) \to N$ を取る．すなわち $\bar{F}$ は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_t}{\partial t} &= H(\bar{F}_t) + D\bar{F}_t(V(\bar{F}_t, \overline{\nabla})) \\ \bar{F}(\,\cdot\,, 0) &= F_0.\end{aligned}$$

を満たすもののことである．$\bar{F}$ の短時間存在と一意性は補題 1.4 により保障されている．次に, M の微分同相写像の 1 パラメーター族 $\varphi_t : M \to M$ $(t \in [0, \varepsilon))$ で

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} &= -V(\bar{F}_t, \overline{\nabla}) \circ \varphi_t \\ \varphi_0 &= \mathrm{id}.\end{aligned} \tag{4}$$

を満たすものを取る．(4) は常微分方程式であり, M はコンパクトなので, 解 φ_t は常に存在する．ここで

$$F_t := \bar{F}_t \circ \varphi_t : M \to N$$

と定める．すると $F(\cdot,0)=F_0$ となっていることは明らかである．また

$$\frac{\partial F_t}{\partial t}=\frac{\partial \bar{F}_t}{\partial t}\circ\varphi_t+D\bar{F}_t\left(\frac{\partial\varphi_t}{\partial t}\right)=H(F_t)$$

となるので，F_t は平均曲率流の初期条件 F_0 の短時間解であることが示された．最後に一意性を証明する．G_t も平均曲率流の初期条件 F_0 の短時間解であるとする．M の微分同相写像の 1 パラメーター族 $\psi_t : M\to M$ $(t\in[0,\varepsilon))$ で

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi_t}{\partial t}=V(\bar{F}_t,\overline{\nabla})\circ\psi_t\\&\psi_0=\mathrm{id},\end{aligned}$$

を満たすものを取る．すると $F_t\circ\psi_t$ と $G_t\circ\psi_t$ は共に (3) の初期条件 F_0 の解になる．(3) の解は初期条件を決めるごとに一意であるから，$F_t=G_t$ でなければならない．ただし，t は F_t が定義されている時間区間と G_t が定義されている時間区間の共通部分の元である． □

2 平均曲率流の特異点

1 章ではコンパクトな多様体からのはめ込み写像を初期値とする平均曲率流の短時間存在と一意性を証明した．すると，次に問題になるのは，長時間解の存在と，存在しない場合には何が起こるかを明らかにすることである．まず，解が存在する限界の時刻という概念を定義する．

定義 2.1. M をコンパクトな多様体，(N,g) をリーマン多様体，$F:M\times[0,T)\to N$ を平均曲率流とし，$T<\infty$ を仮定する．ある $\varepsilon>0$ とある平均曲率流 $G:M\times[0,T+\varepsilon)\to N$ で $F_t=G_t$ $(t\in[0,T))$ となるものが存在するとき，F は T で**延長可能**であるという．F が T で延長可能でないとき，T を**有限特異時刻**と呼ぶ．

有限特異時刻は以下の命題で特徴付けることができる．

命題 2.2. M をコンパクトな多様体，(N,g) を完備リーマン多様体，$F:M\times[0,T)\to N$ を平均曲率流とする．$T<\infty$ を仮定する．このとき，T が有限特異時刻であることと，

$$\limsup_{t\to T}\max_M|A(F_t)|=\infty \tag{5}$$

となることは同値である．ここで $A(F_t)$ は F_t の第二基本形式である．

(証明の概略)．外の空間がユークリッド空間の場合の詳細な証明は例えば Mantegazza [6] の Proposition 2.4.9 などに書いてある．まず T が有限特異時刻でないとすると，平均曲率流は T より真に大きい時刻まで延長可能であるから，$\max_M|A(F_t)|$ が $t\to T$ で発散しないことは明らかである．従って，T が有限特異時刻ならば $\limsup_{t\to T}\max_M|A(F_t)|=\infty$ となることを示せば良い．この対偶を示す．$\limsup_{t\to T}\max_M|A(F_t)|<\infty$ を仮定する．すると，ある定数 $C>0$ が存在して

$$\max_M|A(F_t)|<C\quad\text{on}\quad[0,T)$$

となる．すると，$|\nabla^k A(F_t)|^2$ の満たす発展方程式に放物型最大値原理を適用し，帰納法も組み合わせることで，任意の $k \geq 0$ に対してある $C_k > 0$ が存在して

$$\max_M |\nabla^k A(F_t)| < C_k \quad \text{on} \quad [0,T)$$

となることを証明することができる．すると，Arzelà–Ascoli の定理により，時刻の列 $t_j \to T$ が存在して $j \to \infty$ のとき，はめ込みの列 $F_{t_j} : M \to N$ はあるはめ込み写像 $F_T : M \to N$ に滑らかに収束することが証明できる．すると，この $F_T : M \to N$ を初期条件として平均曲率流の短時間解を構成し，それを元の平均曲率流 $F : M \times [0,T) \to N$ と連結することで，T より真に先まで定義された平均曲率流の解を構成することができる．従って T は延長可能であるということになる． □

式 (5) のような状況を**解の爆発**という．一般に平均曲率流は長時間解を持つとは限らない．例えばユークリッド空間内のコンパクトな部分多様体を初期条件とする平均曲率流の解は必ず有限時刻で爆発する．ここで式 (5) から何が言えるかを考える．まず $t_j \to T$ という時刻の列が存在して

$$\lim_{j\to\infty} \max_M |A(F_{t_j})| = \infty$$

が言える．すると，今 M はコンパクトなので，各時刻 t_j で $|A(F_{t_j})|$ の最大値を達成する点 $p_j \in M$ を取ることができる．従って，時空 $M \times [0,T)$ 内の点 (p_j, t_j) が存在して

$$\lim_{j\to\infty} |A(F_{t_j})|(p_j) = \infty$$

となるということが言える．さらに，M のコンパクト性から部分列を取ることで (本来なら添え字は j_i 等と書くべきだが，部分列も j を使うことにする) p_j はある点 $p \in M$ に収束すると仮定して良い．ここで特異点を 2 種類に分類する．

定義 2.3. M を多様体，(N,g) をリーマン多様体，$F : M \times [0,T) \to N$ を平均曲率流とする．$p \in M$ を固定する．

(1) $|A(F_{t_j})|(p_j) \to \infty$ $(j \to \infty)$ を満たす時空内の点列 $(p_j, t_j) \in M \times [0,T)$ で $p_j \to p$ となるものが存在するとき p を**一般特異点**と呼ぶ．
(2) $|A(F_{t_j})|(p) \to \infty$ $(j \to \infty)$ を満たす時刻の列 $t_j \in [0,T)$ が存在するとき p を**特殊特異点**と呼ぶ．

定義 2.3 の (1) と (2) の違いは固定した 1 点で第二基本形式のノルムが爆発するか否かということである．また，自明な注意として，特殊特異点は一般特異点である．命題 2.4 と定義 2.3 の直前の説明により，以下が分かる．

命題 2.4. M をコンパクトな多様体，(N,g) を完備リーマン多様体，$F : M \times [0,T) \to N$ を平均曲率流とする．$T < \infty$ を仮定する．このとき，T が有限特異時刻であることと，一般特異点が存在することは同値である．

ここで以下の問題を提唱する．

問 2.5. 平均曲率流の一般特異点は特殊特異点に限るか？

もしこれが真（「限る」ということ）だとすると，平均曲率流の解が爆発するときには，$\limsup_{t\to T}|A(F_t)|(p)=\infty$ となる一点 $p\in M$ をとることができる．点列 p_j が実は固定された一点 p として良いとなれば，特異点の精密な解析を行う上で，アドバンテージとなる．もし，問 2.5 が偽（「限らない」ということ）だと仮定すると，何が言えるかを考察してみる．一般特異点だが特殊特異点ではない点 $p\in M$ が存在するということになる．すると，p の任意の近傍上での第二基本形式のノルムの上限は発散するが，p での第二基本形式の値自体は発散しないということになる．直感的には，そのようなことは起きないように思われるが，証明は未だ与えられていない．

T が平均曲率流の有限特異時刻だとすると第二基本形式のノルムの最大値は $t\to T$ のとき発散するわけだが，実は，発散のオーダーの下からの評価を与えることができる．

命題 2.6. M をコンパクトな多様体，(N,g) をリーマン多様体，$F:M\times[0,T)\to N$ を平均曲率流とする．(N,g) に対しては，ある定数 $C_0>0$ と $C_1>0$ が存在して $|\mathrm{Riem}(N,g)|<C_0$ かつ $|\nabla\mathrm{Riem}(N,g)|<C_1$ となることを仮定する．また，T が有限特異時刻であると仮定する．このときある定数 $\delta>0$ が存在して

$$\max_M|A(F_t)|\geq\frac{\delta}{\sqrt{T-t}}\quad on\quad [0,T)$$

となる．

(証明の概略). 外の空間がユークリッド空間の場合の証明は例えば Huisken [5] の Lemma 1.2 などに書いてある．平均曲率流における第二基本形式などのテンソル量の満たす発展方程式は Smoczyk の論文 [9] に豊富に書いてあり，例えばその論文中の式 (28) により

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 =&\Delta|A|^2-2|\nabla^{\perp}A|^2\\ &+2|\langle A_{ij},A_{k\ell}\rangle|^2+|A^{\alpha}{}_{ik}A^{\beta}{}_{j}{}^{k}-A^{\beta}{}_{ik}A^{\alpha}{}_{j}{}^{k}|^2\\ &+4R_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha}_{k}F^{\beta}_{i}F^{\gamma}_{\ell}F^{\delta}_{j}(\langle A^{ij},A^{k\ell}\rangle-g^{k\ell}\langle A^{ip},A_{p}{}^{j}\rangle)\\ &+2R_{\alpha\beta\gamma\delta}A^{\alpha k\ell}(4A^{\beta}{}_{ik}F^{\gamma}_{\ell}F^{\delta i}+F^{\beta}_{i}A^{\gamma}{}_{\ell k}F^{\delta i})\\ &+2(\nabla_{\varepsilon}R_{\alpha\beta\gamma\delta}+\nabla_{\gamma}R_{\alpha\delta\beta\varepsilon})F^{\varepsilon}_{i}F^{\beta}_{\ell}F^{\gamma}_{k}F^{\delta i}A^{\alpha k\ell}.\end{aligned}$$

を得る．右辺の各テンソルを上から評価すると

$$\frac{\partial}{\partial t}|A|^2\leq\Delta|A|^2+6|A|^4+6(2+\sqrt{m})C_0|A|^2+4\sqrt{m}C_1|A| \tag{6}$$

となる．今，仮定は

$$\limsup_{t\to T}\max_M|A(F_t)|=\infty \tag{7}$$

であるが，一般にはここから直ちに

$$\lim_{t\to T}\max_M|A(F_t)|=\infty \tag{8}$$

をいうことはできない．しかし，今の場合は (7) と発展不等式 (6) と Hamilton's trick [4]（Mantegazza [6] も見ると良い）を組み合わせることにより，(8) を示すことができる．従って，特に，あ

る $t_0 \in [0,T)$ が存在して

$$|A|_{\max}(t) := \max_M |A(F_t)| \geq 1 \quad \text{on} \quad [t_0, T)$$

とすることができる．ここでまた Hamilton's trick [4] を使うと $|A|^2_{\max}(t)$ は $[0,T)$ 上のリプシッツ関数になることが証明できる．従ってルベーグの定理により，$|A|^2_{\max}(t)$ は $[0,T)$ 上ほとんど至る所微分可能であることが分かり，(6) と組み合わせると

$$\frac{d}{dt}|A|^2_{\max}(t) \leq C_2 |A|^4_{\max}(t)$$

を得る．ここで $C_2 := 6 + 6(2+\sqrt{m})C_0 + 4\sqrt{m}C_1$ である．$[t_0,T)$ 上で $|A|_{\max}(t) \geq 1$ である（特に 0 にならない）から，上の微分不等式の両辺を $|A|^4_{\max}(t)$ で割ると

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{|A|^2_{\max}(t)}\right) \leq C_2 \quad \text{on} \quad [t_0, T) \tag{9}$$

を得る．任意に $t \in [t_0, T)$ を固定する．微分不等式 (9) を $[t, t_i]$（t_i は $t_i \to T$ となる列）上で積分することにより

$$-\frac{1}{|A|^2_{\max}(t_i)} + \frac{1}{|A|^2_{\max}(t)} \leq C_2(t_i - t)$$

となり，$i \to \infty$ とすると $\max_M |A(F_{t_i})| \to \infty$ となるので

$$\frac{1}{|A|^2_{\max}(t)} \leq C_2(T-t)$$

を得る．ここで $[0,T)$ 上 $|A|_{\max} > 0$ であることに注意すると $c := \min\{\, |A|_{\max}(t) \mid t \in [0,t_0] \,\}$ は正である．あとは $\delta := \min\{\frac{1}{\sqrt{C_2}}, c\sqrt{T-t_0}\} > 0$ と定めると

$$|A|_{\max}(t) \geq \frac{\delta}{\sqrt{T-t}} \quad \text{on} \quad [0,T)$$

となる． □

命題 2.6 により，平均曲率流が有限時刻で爆発する場合は，第二基本形式のノルムの最大値の発散のオーダーは下から $\frac{\delta}{\sqrt{T-t}}$ で押えられることが分かった．一方で，第二基本形式のノルムの最大値の発散のオーダーが上からも $\frac{C}{\sqrt{T-t}}$ で押えられるか否か，という視点で特異時刻を分類することができる．

定義 2.7. M をコンパクトな多様体，(N,g) をリーマン多様体，$F : M \times [0,T) \to N$ を平均曲率流とする．また T が有限特異時刻であるとする．

(1) ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\max_M |A(F_t)| \leq \frac{C}{\sqrt{T-t}} \quad \text{on} \quad [0,T)$$

が成り立つとき，F は T で I 型特異点を形成するという．

(2) (1) 以外の状況のとき，F は T で II 型特異点を形成するという．

定義 2.7 に関して注意すべきは，(1) も (2) も "特異点という点" を定義しているのではなく，"特異点を形成するという状況" を定義していることである．ここで問 2.5 を I 型特異点を形成する状況に限定した問を書いておく．

問 2.8. 平均曲率流の一般 I 型特異点は特殊 I 型特異点に限るか？

さて，F は T で I 型特異点を形成すると仮定する．すると，命題 2.6 と合わせて第二基本形式は

$$\frac{\delta}{\sqrt{T-t}} \leq \max_M |A(F_t)| \leq \frac{C}{\sqrt{T-t}} \quad \text{on} \quad [0,T)$$

という上下から同じオーダーで評価されてる状況になる．このような場合は，放物型リスケーリングという手法により，特異点の近傍を無限大に拡大することで，自己縮小解と呼ばれる平均曲率流の自己相似解が得られるということが，Huisken [5] によって証明されている．その定理を述べる前に，自己縮小解を定義しておく．

定義 2.9. M を多様体，$F : M \to \mathbb{R}^n$ をはめこみ写像とする．F が二階の楕円型偏微分方程式

$$H(F) = -\frac{1}{2}F^{\perp} \tag{10}$$

を満たすとき，F を**自己縮小解**と呼ぶ．

ここで式 (10) の右辺の $F^{\perp}$ を厳密に定義しておく．$p \in M$ を取る．このとき $F(p) = (F^1(p), \ldots, F^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ だが，これを $F(p) = F^1(p)(\partial/\partial x^1) + \cdots + F^n(p)(\partial/\partial x^n)$ という $T_{F(p)}\mathbb{R}^n$ の元と同一視する．すると $T_{F(p)}\mathbb{R}^n$ には $F_*(T_pM)$ が線形部分空間として含まれているので，$F(p)$ の $F_*(T_pM)$ に関する法成分という概念が意味を持つ．これが $F^{\perp}(p)$ である．従って $F^{\perp}$ (対応は $M \ni p \mapsto F^{\perp}(p)$) は M の法束の切断である．また式 (10) は係数 λ が $-1/2$ の場合と考えることができる．$\lambda = 1/2$ のときを**自己拡大解**と呼ぶ．$\lambda = 0$ の場合は極小はめこみである．(係数 λ の自己相似解は F 自体を拡大か縮小することで，係数が $1/2$ か 0 か $-1/2$ の自己相似解に正規化することができる．)

定理 2.10 (Huisken [5]). M をコンパクトな多様体，(N, g) をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に標準計量 dx^2 を入れたもの，$F : M \times [0,T) \to N$ を平均曲率流 ($T < \infty$) とし，時刻 T で I 型特異点を形成すると仮定する．$p \in M$ を任意に取り固定する．T に収束する時刻の増大列 t_j が任意に与えられたとする．このとき放物型リスケーリングされた点付きはめ込み写像の列

$$F_j := \frac{1}{\sqrt{T-t_j}} F_{t_j} : (M, p) \to N$$

は部分列を取ることで完備な自己縮小解 $F_\infty : (M_\infty, p_\infty) \to \mathbb{R}^n$ に C^∞ 収束する．ここで完備とは $(M_\infty, F_\infty^* dx^2)$ が完備リーマン多様体になるという意味である．

ここで，はめ込み写像の列がはめ込み写像に C^∞ 収束することの定義を明確にしておく必要がある．しかし，その前にリーマン多様体の列の C^∞ 収束を復習しておく．

定義 2.11. $\{(N_k, g_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ を点付きの完備な n 次元リーマン多様体の列とし，$(N_\infty, g_\infty, x_\infty)$ を点付きの完備な n 次元リーマン多様体とする．

(1) $x_\infty \in U_k$ となる相対コンパクトな開集合の増大列 $\{U_k\}_{k=1}^\infty$ で全ての和集合が N_∞ になるようなものと

(2) $\Phi(x_\infty) = x_k$ となるような微分同相写像 $\Phi_k : U_k \to V_k \subset N_k$ で

$\Phi_k^* g_k$ が g_∞ に各コンパクト集合上で C^∞ 収束するようなものが存在するとき，$\{(N_k, g_k, x_k)\}_{k=1}^\infty$ は $(N_\infty, g_\infty, x_\infty)$ に C^∞ **収束する**という．滑らかに Cheeger–Gromov 収束するというときもある．

はめ込み写像の列の収束の定義は以下である．

定義 2.12. (N, g) を n 次元の完備なリーマン多様体とする．$\{F_k : M_k \to N\}_{k=1}^\infty$ を m 次元の点付き多様体 $\{(M_k, x_k)\}_{k=1}^\infty$ から N へのはめ込み写像の列とし，$F_\infty : M_\infty \to N$ を m 次元の点付き多様体 (M_∞, x_∞) から N へのはめ込み写像とする．

(1) $x_\infty \in U_k$ となる相対コンパクトな開集合の増大列 $\{U_k\}_{k=1}^\infty$ で全ての和集合が M_∞ になるようなものと

(2) $\Phi_k(x_\infty) = x_k$ となるような微分同相写像 $\Phi_k : U_k \to V_k \subset M_k$ で

各コンパクト集合上で，$F_k \circ \Phi_k : U_k \to N$ は $F_\infty : M_\infty \to N$ に C^∞ し，さらに $\{(M_k, F_k^* g, x_k)\}_{k=1}^\infty$ が $(M_\infty, F_\infty^* g, x_\infty)$ に C^∞ 収束するようなものが存在するとき，$\{F_k : (M_k, x_k) \to (N, g)\}_{k=1}^\infty$ は $F_\infty : (M_\infty, p_\infty) \to (N, g)$ に C^∞ **収束する**という．

Huisken の定理 2.10 では，一般に M と M_∞ は位相同型ですらない可能性がある．例えば，二つの球を非常に細いチューブでつないだダンベル型の曲面を考えると，放物型リスケーリングしたときに得られる M_∞ はシリンダーになる．

例えば $\mathbb{R}^n$ 内の線形部分空間は自己縮小解であるが，明らかに第二基本形式は至る所 0 である．これを自明な自己縮小解と呼ぶ．Huisken の定理 2.10 の主張では $p \in M$ は何でも良いが，その代わりに，極限として得られる自己縮小解 $F_\infty : (M_\infty, p_\infty) \to \mathbb{R}^n$ が非自明かどうかに関しては言及していない．しかし，p が特殊 I 型特異点の場合は，極限の非自明性が言える．そのことは Huisken の論文 [5] の証明から従う．すなわち以下が成り立つ．

定理 2.13. Huisken の定理 2.10 において，もし $p \in M$ が特殊 I 型特異点の場合は極限として得られる自己縮小解 $F_\infty : (M_\infty, p_\infty) \to \mathbb{R}^n$ は非自明である．特に $A(F_\infty)(p_\infty) \neq 0$ である．

なお，定理 2.10 は外の空間がユークリッド空間の場合に限って主張を書いたが，(N, g) が曲率とその微分のノルムと単射半径が押さえられた完備なリーマン多様体でも同様のことが言える（と思われる）．ただし，筆者は現時点で，そのことを明確に記述した論文を見たことはない．

3　一般 I 型特異点と特殊 I 型特異点

この章では問 2.8 に関するいくつかのアプローチを紹介する．問 2.8 は「平均曲率流の一般 I 型特異点は特殊 I 型特異点に限るか？」というものであった．まずは，これが偽だと仮定すると何が言えるかを考察する．以下では (N, g) は曲率とその微分のノルムと単射半径が押さえられた完備なリー

マン多様体とする．

命題 3.1. M をコンパクトな多様体，$F: M\times[0,T)\to(N,g)$ を平均曲率流 $(T<\infty)$ とし，時刻 T で I 型特異点を形成すると仮定する．$p\in M$ が特殊 I 型特異点でない一般 I 型特異点だと仮定すると，時刻の列 t_j に対して放物型リスケーリングされた点付きはめ込み写像の列

$$F_{t_j}:(M,p)\to N$$

は部分列を取ることで完備で非自明な自己縮小解 $F_\infty:(M_\infty,p_\infty)\to\mathbb{R}^n$ で $A(F_\infty)(p_\infty)=0$ となるものに C^∞ 収束する．

(証明の概略)．まず，Huisken の定理 2.10 により，

$$F_{t_j}:(M,p)\to N$$

は部分列を取ることで完備な自己縮小解 $F_\infty:(M_\infty,p_\infty)\to\mathbb{R}^n$ に C^∞ 収束する．また，$p\in M$ が特殊 I 型特異点でないという仮定から，$A(F_\infty)(p_\infty)=0$ が出る．最後に F_∞ が非自明であることを示す．F_∞ が自明，つまり $F_\infty(M_\infty)$ が線形部分空間だと仮定する．すると，放物型リスケーリングの極限が平面ということは，リスケーリングする前は p のある近傍での第二基本形式のノルムの上限が時刻 T まで込めて押さえられているということになる．ただし，この部分の議論はより精密化する必要がある．するとそれは $p\in M$ が一般 I 型特異点であることに矛盾する．従って，$F_\infty:(M_\infty,p_\infty)\to\mathbb{R}^n$ は非自明である． □

命題 3.1 を簡単にまとめると，「問 2.8 が偽なら，一点で第二基本形式が消える完備な自己縮小解 $F_\infty:(M_\infty,p_\infty)\to\mathbb{R}^n$ で非自明なものが存在する」ということになる．従って，問 2.8 に密接に関連する問として，以下が重要になる．

問 3.2. 一点で第二基本形式が消える完備な自己縮小解は平面に限るか？

命題 3.1 により「問 3.2 が真なら，問 2.8 が真」という状況である．問 3.2 は「一点で何かが 0 ならば実はそれは全体で 0 か？」というタイプの問であり，筆者はもし問 3.2 が真ならば「自己縮小解にはリジディーがある」と呼ぶのが妥当と思っている．従って問 3.2 は「自己縮小解にはリジディーがあるか？」という問と思うこともできる．

自己縮小解のリジディティーに関して 2 つの先行結果を紹介する．1 つは Stone [10] の結果で，これがほぼ唯一の先行結果である．もう一つは平均曲率流ではなく，リッチフローの話で，Pigola-Rimoldi-Setti [7] の結果である．まずは Stone [10] の結果を紹介する．

定理 3.3 (Stone [10])**.** M をコンパクトな m 次元多様体，$F: M\times[0,T)\to(\mathbb{R}^{m+1},dx^2)$ を平均曲率流 $(T<\infty)$ とし，時刻 T で I 型特異点を形成すると仮定する．また

$$H(F_0)\geq 0 \quad \text{on} \quad M$$

を仮定する．このとき，全ての一般 I 型特異点は実は特殊 I 型特異点である．

(証明の概略)．この定理で重要な仮定は 2 つで，余次元 1 であること，$H(F_0)\geq 0$ である．後者の条件を平均凸 (mean convex) という．なお，余次元 1 であるから，平均曲率はスカラー値になるので，

$H(F_0) \geq 0$ という不等式が意味を持つことも注意しておく．余次元 1 の平均曲率流では，初期条件に対する平均凸性は保たれることが証明されているので，全ての $t \in [0,T)$ で $H(F_t) \geq 0$ がわかる．従って，放物型リスケーリングの極限として得られる自己縮小解も平均凸ということになる．すると，Huisken [5] による余次元 1 平均凸完備自己縮小解の分類定理が使える状況になる．主張は「余次元 1 平均凸完備自己縮小解は超平面かマルチシリンダーに限る」というものである．この分類の中で，少なくとも一点で第二基本形式が消えるのは超平面だけである．すると，問 3.2 の直後の説明により，一般 I 型特異点は実は特殊 I 型特異点ということになる． □

この証明の鍵は 2 つある． 1 つは平均曲率流で平均凸性が保たれるということであり，もう一つは Huisken [5] による余次元 1 の平均凸な完備自己縮小解の分類である．特別な条件のもとでは自己縮小解の種類が全てわかってしまっているので，その中から少なくとも 1 点で第二基本形式が消えるようなものを探すと平面しかないという議論ができるので，候補を絞ってからしらみ潰しに調べるという力技とも言える．余次元 1 と平均凸を仮定しない状況では，今のところ自己縮小解の分類は得られていないので，この証明は余次元 1 かつ平均凸でなければ通用しない．

一方で，次に紹介する勾配縮小リッチソリトンのリジディティーは分類結果を使わない．使うのは，楕円型の最大値原理だけである．これは平均曲率流の自己縮小解のリジディティーの証明の模範となる可能性があるので，リッチフローの話ではあるがここで取り上げることにする．まずは勾配縮小リッチソリトンを定義する．

定義 3.4. リーマン多様体 (N,g) と N 上の関数 f の組が

$$\mathrm{Ric}(g) + \mathrm{Hess} f = \frac{1}{2} g$$

を満たすとき，(N,g,f) を**勾配縮小リッチソリトン**という．

勾配縮小リッチソリトンもやはりリッチフローの I 型特異点の放物型リスケーリングの極限として現れる．また，勾配縮小リッチソリトンが与えられると，N の微分同相写像の 1 パラメーター族による g の引き戻しと時間に依存したスカラー倍でリッチフローの解を構成できるので，勾配縮小リッチソリトンはリッチフローの自己相似解でもある．さて，Pigola-Rimoldi-Setti [7] の Theorem 3 の該当箇所だけ抜き出すと以下のようになる．

定理 3.5 (Pigola-Rimoldi-Setti [7]). (N,g,f) を n 次元の完備な勾配縮小リッチソリトンとする．もし，少なくとも 1 点でスカラー曲率が 0 になるならば (N,g) は $(\mathbb{R}^n, dx^2)$ と等長的である．

(証明の概略). S を (N,g) のスカラー曲率とすると，S は

$$\Delta S - \langle \nabla f, \nabla S \rangle \leq \left(1 - \frac{2}{n} S\right) S \tag{11}$$

という微分不等式を満たす．すると，まず，大森–ヤウの一般化最大値原理から，$\inf_M S \geq 0$ が分かる．点 $p \in M$ で $S(p) = 0$ となると仮定する．すると，$\inf_M S \geq 0$ であるから，p は S の最小値を達成している．すると，楕円型偏微分不等式に対する通常の強最大値原理（例えば Gilbarg-Trudinger [3] の Theorem 3.5 とその下の注意書き）により，$S \equiv 0$ となることが分かる．すると $S \equiv 0$ とな

る完備な勾配縮小リッチソリトンのポテンシャル関数 f は $\mathrm{Hess}f = \frac{1}{2}g$ を満たすことが分かる．するとPigola-Rimoldi-Setti [7] の Theorem 1 により，(N, g) は $(\mathbb{R}^n, dx^2)$ と等長的ということになる． □

定理 3.5 は要するに「勾配縮小リッチソリトンにはリジディティーがある」ということを言っている．すると，問 3.2 の直後の説明と同様の議論をリッチフローに対して行えば，問 2.8 のリッチフロー版は真ということになる．このことを明確に書いたのが Enders-Müller-Topping の Theorem 3.1 である．

定理 3.6 (Enders-Müller-Topping [2]). N をコンパクトな多様体とし，(N, g_t) を時間区間 $[0, T)$ $(T < \infty)$ 上で定義されたリッチフローとし，T で I 型特異点を形成すると仮定する．このとき一般特異点は実は特殊特異点である．

4 自己縮小解のリジディティー

この章では平均曲率流の自己縮小解に対して，上で紹介した Pigola-Rimoldi-Setti（定理 3.5）と同様の議論ができるかどうかについて考察する．自己縮小解の第二基本形式や平均曲率ベクトルの満たす楕円型偏微分方程式は Smoczyk の論文 [8] が詳しい．その論文では自己縮小解の定義は

$$H(F) = -F^{\perp} \tag{12}$$

であり，式 (10) と係数がずれているが，これは F 自体をスカラー倍することで一方を他方に揃えることができるから，この章では自己縮小解の定義は (12) を採用して話を進めることにする．リッチソリトンにおけるリッチ曲率 Ric とスカラー曲率 S は，それぞれ平均曲率流の自己縮小解における第二基本形式の 2 乗 $\langle A, A\rangle(\cdot\,, *) := \langle A(\cdot\,, *), A(\cdot\,, *)\rangle$ と平均曲率ベクトルのノルムの 2 乗 $|H|^2$ に対応していると思うと方針が立てやすいと思われる．$F : M^m \to \mathbb{R}^n$ を自己縮小解とすると，[8] の式 (9) により，

$$\Delta|H|^2 - 2|\nabla^{\perp}H|^2 - \langle F^{\top}, \nabla|H|^2\rangle + 2|P|^2 - 2|H|^2 = 0 \tag{13}$$

が成り立つ．ここで P は $P(X, Y) := \langle H, A(X, Y)\rangle$ で定まる M 上の対称 2 テンソルである．また，$F^{\top}$ は M 上の関数 f を $f(p) := |F(p)|^2/2$ と定めれば，∇f のこと（厳密にはその F による押し出し）に他ならない．$e_1, \ldots, e_m$ を正規直交局所枠とすると

$$|P|^2 = \sum_{i,j}\langle H, A(e_i, e_j)\rangle^2 \geq \sum_i \langle H, A(e_i, e_i)\rangle^2 \geq \frac{1}{m}\left(\sum_i \langle H, A(e_i, e_i)\rangle\right)^2 = \frac{1}{m}|H|^4 \tag{14}$$

となる．従って，等式 (13) と不等式 (14) から

$$\Delta|H|^2 - \langle \nabla f, \nabla|H|^2\rangle \leq 2\left(1 - \frac{1}{m}|H|^2\right)|H|^2 + 2|\nabla^{\perp}H|^2 \tag{15}$$

を得る．この楕円型不等式 (15) とリッチソリトンの場合のスカラー曲率の満たす楕円型不等式 (11) を比べると，非常に似ていることに気づく．しかし，厄介なのは右辺にある

$$|\nabla^{\perp}H|^2$$

という項である．この項があることにより，少なくともこの状態では Pigola-Rimoldi-Setti（定理 3.5）と同様の議論はできない．しかし，$|\nabla^\perp H|^2$ はもう少し分かりやすい量で上から評価することができる．Smoczyk の論文 [8] の式 (6) により，

$$\nabla^\perp_{e_i} H = A(e_i, \nabla f)$$

である．従って

$$|\nabla^\perp H|^2 \leq m|\nabla f|^2|A|^2$$

となる．これを不等式 (15) に代入すると

$$\Delta|H|^2 - \langle \nabla f, \nabla|H|^2\rangle \leq 2\left(1 - \frac{1}{m}|H|^2\right)|H|^2 + 2m|\nabla f|^2|A|^2 \tag{16}$$

を得る．右辺を $|H|^2$ の関数倍で上から評価できれば最大値原理が適用できる．例えば，ある定数 $C > 0$ が存在して $|A|^2 \leq C|H|^2$ が成り立つならば良い．これはいわゆる曲率のピンチング条件である．

定義 4.1. M を m 次元多様体, (N, g) をリーマン多様体とし，$F : M \to N$ をはめ込み写像とする．ある定数 $C > 0$ が存在し M 上で

$$|A|^2 \leq C|H|^2$$

が成り立つとき，$F : M \to N$ を**ピンチされたはめ込み写像**と呼ぶ．また C を**ピンチング定数**と呼ぶことにする．

自明な不等式 $\frac{1}{m}|H|^2 \leq |A|^2$ があるから，ピンチされたはめ込み写像に対しては，ピンチング定数 C は必ず $1/m$ 以上でなければならない．

定理 4.2 (Y)**.** 少なくとも 1 点で第二基本形式が消えるピンチされた完備な自己縮小解は平面（線形部分空間のこと）に限る．

(証明). $F : M^m \to \mathbb{R}^n$ を少なくとも 1 点で第二基本形式が消えるピンチされた完備な自己縮小解とする．仮定から，ある定数 $C > 0$ が存在して $|A|^2 \leq C|H|^2$ が成り立つ．すると，不等式 (16) から

$$\Delta|H|^2 - \langle \nabla f, \nabla|H|^2\rangle \leq 2\left(1 - \frac{1}{m}|H|^2 + 2mC|\nabla f|^2\right)|H|^2 \tag{17}$$

が成り立つ．仮定から，ある点 $p \in M$ が存在して $|H|^2(p) = 0$ が成り立つ．$|H|^2 \geq 0$ は明らかであるから，p は $|H|^2$ の最小値を達成している．従って強最大値原理（例えば Gilbarg-Trudinger [3] の Theorem 3.5 とその下の注意書き）により，$|H|^2 \equiv 0$ となることが分かる．すると，完備で極小な自己縮小解は平面（より正確に線形部分空間）になる．そのことの証明は，例えば Colding-Minicozzi の論文 [1] の Corollary 2.8 に書いてある． □

これは問 3.2 に対する部分的かつ肯定的な回答である．しかし，定理 4.2 を使って，問 2.8 にアプローチできるか？ということはまた別の問題である．問題は初期条件に対するピンチング条件が平均曲率流で保たれるか？ということである．保たれるならば，放物型リスケーリングの極限によって得られる自己縮小解もピンチング条件を満たすことになり，定理 4.2 が適用できる．例えば以下が知られている．

定理 4.3. M をコンパクトな m 次元多様体とし，$F_0 : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ をピンチされたはめ込み写像とする．$F : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{m+1}$ を F_0 を初期条件とする平均曲率流の解とすると，任意の $t \in [0,T)$ に対して F_t もピンチされたはめ込み写像になり，ピンチング定数は F_0 と同じである．

定理 4.3 は外の空間がユークリッド空間であり，考える部分多様体の余次元が 1 という 2 つの仮定が強い．いずれにせよ，この定理 4.3 と定理 4.2 を合わせることで，以下を得る．これは問 2.8 に対する部分的かつ肯定的な回答である．

定理 4.4 (Y)**.** M をコンパクトな m 次元多様体，$F : M^m \times [0,T) \to (\mathbb{R}^{m+1}, dx^2)$ を平均曲率流 $(T < \infty)$ とし，時刻 T で I 型特異点を形成すると仮定する．また F_0 はピンチされていると仮定する．このとき，全ての一般 I 型特異点は実は特殊 I 型特異点である．

今のところ，ユークリッド空間内の一般の余次元のピンチされたはめ込み写像が平均曲率流でピンチされ続けるかどうかは分かっていない．従って，定理 4.3 を一般の余次元で主張することは今のところできない．

参考文献

[1] T. H. Colding and W. P. II. Minicozzi. Generic mean curvature flow I: generic singularities. *Ann. of Math. (2)* 175 (2012), no. 2, 755–833.

[2] J. Enders, R. Müller, and P. M. Topping. On type-I singularities in Ricci flow. *Comm. Anal. Geom.*, 19 (2011), no. 5, 905–922.

[3] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. *Springer-Verlag, Berlin*, 2001.

[4] R. Hamilton. Four-manifolds with positive curvature operator. *J. Differential Geom.*, 24(2):153–179, 1986.

[5] G. Huisken. Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. *J. Differential Geom.*, 31(1):285–299, 1990.

[6] C. Mantegazza. Lecture notes on mean curvature flow. Progress in Mathematics, 290. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[7] S. Pigola, M. Rimoldi, Michele and A. G. Setti. Remarks on non-compact gradient Ricci solitons. *Math. Z.* 268 (2011), no. 3-4, 777–790.

[8] K. Smoczyk. Self-shrinkers of the mean curvature flow in arbitrary codimension. *Int. Math. Res. Not.* 2005, no. 48, 2983–3004.

[9] K. Smoczyk. Mean curvature flow in higher codimension - Introduction and survey. Bär, Christian; Lohkamp, Joachim; Schwarz, Matthias (eds.), Global Differential Geometry, Springer Proceedings in Mathematics, 2012, Volume 17, Part 2, 231-274.

[10] A. Stone. A density function and the structure of singularities of the mean curvature flow. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 2(4):443–480, 1994.

[11] X.-P. Zhu. Lectures on mean curvature flows. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics,

32. *American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA*, 2002.