

外力を持つ非等方的曲率流方程式の進行波解の存在 とその性質*

岡山大学・異分野基礎科学研究所[†] 物部 治徳

Harunori Monobe

Research Institute for Interdisciplinary Science,
Okayama University

§1 序

結晶成長や細胞運動などに見られるように、我々は様々な現象において動く界面を確認することができる。界面は、主に状態変化の場所を記述しており、結晶の表面や細胞の膜など薄いものを表す。界面の運動は現象に依存し、単純な動きから複雑な動きまで多種多様である。ここでは、その中でもスポット状のものが一定の速度で移動する現象に着目する。例えば、油滴の運動やケラトサイトと呼ばれる細胞の運動、また神経細胞の電位の現象にはスポットが一定の速度で移動する現象が確認されている。近年、これらの現象に対して数理モデルが提唱されており、興味深いことにそれらのいくつかのモデルには、次のような界面方程式の形が含まれていることが確認されている：

$$\beta(\mathbf{n})V = \gamma - \alpha(\mathbf{n})\kappa \quad \text{on } \Gamma(t) \quad (1)$$

ここで、 $\Gamma(t)$ は時間依存する \mathbb{R}^2 内の曲線、 κ は $\Gamma(t)$ 上の曲率、 V は $\Gamma(t)$ 上の法線速度、 \mathbf{n} は $\Gamma(t)$ 上の外向き単位法線ベクトル、 α, β, γ は与えられた関数とする。例えば、Choi-Lui[4] は細胞運動に関連した自由境界問題を解析しており、閉曲面で構成された進行波解が存在することを示した。同様の目的で、M-Ninomiya[10] は異なる自由境界問題に対して、類似した結果を得た。また、Chen et al. [2] は FitzHugh-Nagumo 方程式の

E-mail : monobe@okayama-u.ac.jp
〒700-8502 岡山市北区津島中 3-1-1

特異極限問題を考察し、同じく縮約方程式として表される自由境界問題に対して進行波解の存在を示した。

これらの結果を考察すると、曲率 γ は共通な構造として取り入れられている。一方で、外力 γ はモデルに依存して大きく異なることが確認できる。従って、自然と

(問) どのような外力 γ を持てば、方程式 (1) は閉曲面で構成された進行波解を持つのだろうか？

という問題意識が生まれる。本研究の目的は、この問いに対する部分的な解答を与えることである。 γ を一般的な形で扱うのは複雑さばかりが先行し、構造が見えなくなるので、ここでは最初のステップとして外力 γ は単位法線ベクトル \mathbf{n} のみに依存する場合を考える。つまり、次の界面方程式に着目する：

$$\beta(\mathbf{n})V = \gamma(\mathbf{n}) - \kappa \quad \text{on } \Gamma(t). \quad (2)$$

主定理を述べる前に、以下では、界面方程式 (2) で表される代表的な方程式の諸結果を紹介をする。

[例 1] まず、 $\gamma \equiv 0$ の場合、Mullins[5] によって提唱された結晶粒界に関連する次の曲率流方程式があげられる：

$$V = -\kappa \quad \text{on } \Gamma(t). \quad (3)$$

方程式 (3) の解の存在は Gage-Hamilton[7] や Chen-Giga-Goto[3] などによって示されている。これらの結果は (2) に対しても有効である。解の挙動に関する結果としては、 $\Gamma(t)$ が空間 2 次元内の曲線の場合は、初期値がジョルダン閉曲線であれば有限時間でその曲線は凸形状になり、最終的に一点に退化してしまうことが Grayson[8] や Gage-Hamilton[7] によって報告されている。ただし、この性質は空間 3 次元以上では成立しないことがわかっている。進行波解に関する結果としては、Grim Reaper と呼ばれる非有界な進行波の存在が確認されている ([8])。

[例 2] 外力 $\gamma \equiv A$ (A は正定数) の場合は、eikonal-curvature 方程式と呼ばれる幾何光学のモデルに関連する次の方程式がある：

$$V = A - \kappa \quad \text{on } \Gamma(t). \quad (4)$$

この方程式に対しは、半径 $1/A$ の円が不安定な定常解として存在するため、(3) のように空間 2 次元において任意のジョルダン曲線を初期値とする界面は、一点に退化するとは限らない。進行波解に関しては、空間 2 次元において谷口・二宮氏 [13] などにより V 字型進行波解 (非有界な曲線) の存在が確認されている。高次元に関しても Hamel ら [9] によ

り同様に非有界な進行波解の存在が確認されている。実は、方程式 (4) は反応拡散方程式系の特異極限問題とも関連性を持つ。例えば、ロトカ・ボルテラ方程式系や Allen-Cahn 方程式、FitzHugh-Nagumo 方程式などの縮約方程式と深く関係している (cf. [12])。

このように界面方程式 (2) は、様々な方程式と関係性を持つ重要な問題である。一方で、進行波解は非有界なものは確認されているが、ジョルダン閉曲線のように有界な長さを持つものに関しては、まだ結果が数少ないことが伺える。

§2 主定理

本研究ではジョルダン閉曲線によって構成される進行波解を考えたいので、方程式 (2) を満たす曲線 $\Gamma(t)$ が

$$\Gamma(t) = \Gamma_0 + t\mathbf{c}$$

と表されるものを考える。ただし、 Γ_0 は局所的に C^2 -関数として表されるジョルダン閉曲線、 \mathbf{c} は 2 次元空間のベクトルとする。以後、 $c = |\mathbf{c}|$ 、 $\mathbf{n}_0 = c^{-1}\mathbf{c}$ とする。ただし、 $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ の場合は、 \mathbf{n}_0 は任意のベクトルを対応させる。今、 s を Γ_0 の弧長パラメータ、 L をその周長とすると、 Γ_0 は

$$\Gamma_0 = \{(x(s), y(s)) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in [0, L)\}, \quad \mathbf{t}(s) = (x_s, y_s)$$

となる。また、 $(x(s), y(s))$ 上の単位法線ベクトル $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$ と x 軸のなす角度を θ と表すことにする。このとき、 θ は弧長 s に対して一つ定義することができ、関数 $\theta = \theta(s)$ としてみれる。よって、単位接線ベクトル \mathbf{t} および \mathbf{n} , V , κ は

$$\mathbf{t} = (x_s, y_s) = (-\sin \theta, \cos \theta), \quad \mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad V = c \cos(\theta - \eta), \quad \kappa = \theta_s$$

と表すことができる。ただし、 $\eta (\in [0, 2\pi))$ は \mathbf{n}_0 の角度を表し、 $\mathbf{n}_0 = (\cos \eta, \sin \eta)$ を満たす。これより、(2) は次のように書ける：

$$c\tilde{\beta}(\theta) \cos(\theta - \eta) = \tilde{\gamma}(\theta) - \theta_s$$

ここで、 $\tilde{\gamma}(\theta) = \gamma(\mathbf{n})$, $\tilde{\beta}(\theta) = \beta(\mathbf{n})$ を表す。以降、簡単のため $\tilde{\gamma}(\theta)$, $\tilde{\beta}(\theta)$ をそれぞれ周期 2π 関数 $\gamma(\theta)$, $\beta(\theta)$ と表すことにする。従って、次の常微分方程式系を得る：

$$\begin{cases} \theta_s = \gamma(\theta) - c\beta(\theta) \cos(\theta - \eta) & \text{in } (0, L), \\ x_s = -\sin \theta & \text{in } (0, L), \\ y_s = \cos \theta & \text{in } (0, L), \\ \theta(0) = \theta(L) - 2\pi = \theta_0, \\ x(0) = x(L) = x_0, \\ y(0) = y(L) = y_0. \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 (x_0, y_0) は \mathbb{R}^2 の点、 θ_0 は $[0, 2\pi)$ 内の任意の点とする。

仮定 1. α, β はリプシッツ連続な 2π 周期関数とする。特に、 β は与えられた正值関数とする。

定義 1. ある (c, η) に対して常微分方程式系 (5) の解

$$(\theta, x, y) \in C^{1,1}([0, L]) \times C^{2,1}([0, L]) \times C^{2,1}([0, L])$$

が存在するとする。この時、これらの解からなる (Γ_0, \mathbf{c}) (または $(\Gamma_0, c\mathbf{e}(\eta))$) を (2) の “コンパクトな進行波解” と言う。ただし、 $c \geq 0$ かつ $\eta \in [0, 2\pi)$ である。

定義 2. Γ_0 の曲率 θ_s が正 (負) の時、狭義凸 (凹) と言う。

定義 3. (2) のコンパクトな進行波解 (Γ_0, \mathbf{c}) がベクトル $\mathbf{e}(\xi) = (\cos \xi, \sin \xi)$ に平行な軸に対して対称である時、解を “ $\mathbf{e}(\xi)$ に対して軸対称なコンパクトな進行波解” と呼ぶ。特に、 $\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}(\xi)$ が成り立つ時、 (Γ_0, \mathbf{c}) を “進行方向に対して対称なコンパクトな進行波解” と呼ぶ。

定義 4. 任意の θ に対して $\gamma(\theta) > 0$ ($\gamma(\theta) \leq 0$) を満たす時、 γ は正值 (非負値) 関数と呼ぶ。また、ある角度 η_1, η_2 が存在して

$$\gamma(\eta_1) > 0, \quad \gamma(\eta_2) \leq 0$$

を満たす時、 γ は符号変化関数と呼ぶ。

以下で述べる主結果は、主に γ が定符号の場合と符号変化する場合とで分けられる。特に、符号変化に関する結果には適当な条件が必要となる：

定理 1.1. (2) にコンパクトな進行波解 (Γ_0, \mathbf{c}) が存在すれば、それは一意であり、全て狭義凸かつ不安定である。

証明では、リプシッツ連続性が本質であり、そのことを用いると曲率が常に正であることから導かれる。安定性解析に関しては、Ei-Yanagida[6] の結果を用いることで即座に得ることができる。

定理 1.2. γ が正值関数であれば、(2) はコンパクトな進行波解 (Γ_0, \mathbf{c}) を持つ。

γ が符号変化する場合、一般に進行波解は存在するかわからない。しかしながら、ある条件下では進行波解が存在することがわかる。

定義 5. 次の (c, η) の集合

$$\mathcal{S} := \left\{ (c, \eta) \mid \inf_{\theta \in [0, 2\pi)} \gamma(\theta) - c \cos(\theta - \eta) > 0 \right\}$$

を考える。このとき、十分小さな $\varepsilon > 0$ が存在して、任意の $\delta \in (0, \varepsilon)$ に対して

$$(\eta^* - \delta, c^*) \in \mathcal{S}, \quad (\eta_* + \delta, c_*) \in \mathcal{S},$$

が成り立つとき、 $\gamma(\theta)$ は “許容条件を満たす” と言う。ただし、 (η^*, c^*) は $\partial\mathcal{S} := Cl(\mathcal{S}) \setminus Int(\mathcal{S})$ の点で η の値が最大になるもの、 (η_*, c_*) は $\partial\mathcal{S}$ の点で η の値が最小になるものを表す。

定理 1.3. γ が符号変化関数とする。この時、 γ が許容条件を満たせば、(2) はコンパクトな進行波解 (Γ_0, \mathbf{c}) を持つ。

一般の形状 Γ_0 に対しては、許容条件が必要になるが、対称性を課すとその条件を除外できる。ここでは、簡単のために $\beta \equiv 1$ と仮定した定理を紹介する。

定理 1.4. $\beta \equiv 1$ とする。この時、(2) が進行方向に対して対称なコンパクトな進行波解 $(\Gamma_0, c\mathbf{e}(\eta))$ を一意に持つための γ の必要十分条件は次の (a) および (b) を満たすことである：

- (a) $\gamma(\theta) = \gamma(2\eta - \theta)$
- (b) γ が正値関数であれば、次を満たす：

$$\int_{\eta}^{\eta+\pi} \frac{\cos(\theta - \eta)}{\gamma(\theta)} d\theta \leq 0. \quad (6)$$

ただし、等号は $c = 0$ のときのみ成り立つ。 γ が符号変化関数であれば、次を満たす：

$$\sup_{|\theta - \pi| < \pi/2} \frac{\gamma(\theta + \eta)}{\beta(\theta + \eta) \cos \theta} < \inf_{|\theta| < \pi/2} \frac{\gamma(\theta + \eta)}{\beta(\theta + \eta) \cos \theta}. \quad (7)$$

§3 応用

3-1 界面方程式への応用

上記で得られた定理を用いることで次の結果を得ることができる。なお、この結果は [1] や [13] でも触れられている。

例 1.5. (3) にはコンパクトな進行波解は存在しない。また、(4) は $c > 0$ となるコンパクトな進行波解は存在せず、半径 $1/A$ の円がジョルダン閉曲線からなる唯一の定常解となる。

証明. (3) は $\gamma \equiv 0$ なので、定義 4 より符号変化関数である。また、 $\beta \equiv 1$ なので定理 1.4 が適用でき、(a) と (b) を満たすかどうか確かめれば良い。(a) は明らかに成り立つ。一方、(b) は (7) を確認すれば良いが、 $\gamma \equiv 0$ より (7) の両辺は 0 となるため成立しない。以上から、(3) はコンパクトな進行波解を持たない。

(4) は $\gamma \equiv A$ なので、正值関数である。また、 $\beta \equiv 1$ なので同様に、定理 1.4 より (a) と (b) を満たすか確かめれば良い。(a) は明らかに成り立つ。一方、(b) は (6) を確認すれば良い。すると

$$\int_{\eta}^{\eta+\pi} \frac{\cos(\theta - \eta)}{\gamma(\theta)} d\theta = \frac{1}{A} \int_{\eta}^{\eta+\pi} \cos(\theta - \eta) d\theta = 0$$

が成り立つ。したがって、 $c = 0$ のコンパクトな進行波解 (つまり定常解) が一意に存在する。簡単な計算から、定常解は半径 $1/A$ の円だとわかる。□

3-2 自由境界問題への応用

ここでは、自由境界問題への応用を紹介する。以下の自由境界問題を考察する：

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + k_1 U - u + k_2 & \text{in } Q := \bigcup_{t>0} \Omega(t) \times \{t\}, \\ u = 1 + A\kappa & \text{on } \Gamma := \bigcup_{t>0} \Gamma(t) \times \{t\}, \\ V = \eta U - 1 - A\kappa & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (8)$$

ただし、 $\Omega(t)$ を時刻 t における \mathbf{R}^2 の領域、 $\Gamma(t)$ を $\Omega(t)$ の境界とする。また、 U は

$$U = C_0 - \int_{\Omega(t)} u dx$$

とし、 d は拡散係数、 k_1, k_2, A, C_0 は正定数、 η は $\Gamma(t)$ を定義域に持つ与えられた関数とする。

方程式 (8) は細胞運動に関連した自由境界問題であり ([10])、細胞が動く様子を表す解としてジョルダン閉曲線を境界 $\Gamma(t)$ に持つ進行波解の存在を確かめることは重要となる。自由境界問題の進行波解を次のように定める：

定義 6. 方程式 (8) を満たす解 $(u, \Omega(t))$ が、 $C^{2,1}(Q) \times C^4(\Gamma)$ に属し、任意の時刻 t にお

いて、ある正定数 c とある単位ベクトル $\mathbf{n}_0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ を用いて

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x - ct \cos \theta_0, y - ct \sin \theta_0) \\ \Omega(t) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - ct \cos \theta_0, y - ct \sin \theta_0) \in \Gamma(0)\} \end{aligned}$$

と表されるとき、 $(u, \Omega(t))$ は方程式 (8) の “コンパクトな進行波解” とよぶ。

以下では簡単のため、進行方向 \mathbf{n}_0 が x 軸の正の方向に移動する解のみ、つまり、 $\mathbf{n}_0 = (1, 0)$ を考えた場合のみに触れる。なお、進行方向 \mathbf{n}_0 は任意の単位ベクトルとしても、同様の定理が成り立つ。

定理 1.6 (M-Ninomiya[11]). 関数 η は次の条件を満たすとする :

- (a) $\eta \in C^2([0, 2\pi])$,
- (b) $\eta(\theta) = \eta(2\pi - \theta)$ in $[0, \pi]$,
- (c) $\eta(\theta) > \eta(\pi - \theta) > 0$ in $[0, \pi/2)$.

さらに、係数 k_1, k_2, C_0, A は

$$k_1 C_0 - 1 + k < 0, \quad \min_{\theta \in [0, 2\pi]} \gamma C_0 - 1 > 0$$

を満たすとする。このとき、 $\mathbf{n}_0 = (1, 0)$ 方向に対称なコンパクトな進行波解が少なくとも 1 つ存在する。なお、 $\Omega(t)$ は狭義凸、速度は $c > 0$ である。また、 η が定数に十分近ければ進行波解は少なくとも 2 つ存在する。

この定理 1.6 の証明では、 $\Gamma(t)$ の近似解を構成する時に定理 1.4 が役立つ。詳しくは、[11] を参照。

§4 まとめ

本研究では、 $\gamma(\theta)$ に自由度を持たせ、界面方程式 (2) の進行波解の存在やその条件を考察した。その結果、いくつかの界面方程式や自由境界問題の進行波解の存在・非存在を示すことができた。しかしながら、 γ が符号変化する場合は、未解決であり別のアプローチが必要であると予想される。空間 3 次元以上の多次元の場合は、平均曲率関数の正值性と形状の凸性は直接関係していないため解析が困難であることが予想される。ただし、本研究は Christoffel 問題と深く関係していることがわかっており、それらに関する解析方法を用いることで部分的な答えが得られるのではないかと予想される。一方で、応用を視野に入れると γ が法線 \mathbf{n} のみに依存している状況は非常に特殊であり、 γ を空間変数 x, y

などに依存させる方が自然であることが予想される。従って、 γ を一般化したとき、進行波解が存在するための条件を探すのが、今後の課題である。

■謝辞 本研究集会での講演および執筆の機会を与えて下さった川上裕先生(金沢大学)に感謝申し上げます。本研究は、科学研究費補助金(若手研究(B), 課題番号15K17595)の助成を受けています。

参考文献

- [1] S.B. Angenent, *On the formation of singularities in the curve shortening flow*, J. Differ. Geom., **33** (1991), 601–633.
- [2] Y.Y. Chen, Y. Kohsaka and H. Ninomiya, *Traveling spots and traveling fingers in singular limit problems of reaction-diffusion systems*, Discret. Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **19** (2014), 697–714
- [3] Y.G. Chen, Y. Giga and S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Differ. Geom., **33** (1991), 749–786.
- [4] Y.S. Choi and R. Lui, *Existence of traveling domain solutions for a two-dimensional moving boundary problem*, Trans. Am. Math. Soc., **361** (2009), 4027–4044.
- [5] W.W. Mullins, *Solid surface morphologies governed by capillarity*, In: Robertson, W.D., Gjostein, N.A. (eds.) Metal Surfaces: Structure, Energetics and Kinetics. pp. 17–66, Am. Soc. Met., Ohio (1963).
- [6] S. I. Ei and E. Yanagida, *Dynamics of interfaces in competition-diffusion systems*, SIAM J. Appl. Math., **54** (1994), 1355–1373.
- [7] M. E. Gage and R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Differ. Geom., **23** (1986), 69–96.
- [8] M. A. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differ. Geom., **26** (1987), 285–314.
- [9] F. Hamel, R. Monneau and J.M. Roquejoffre, *Existence and qualitative properties of multidimensional conical bistable fronts*, Discret. Contin. Dyn. Syst. Ser. A, **13** (2005), 1069–1096.
- [10] H. Monobe and H. Ninomiya, *Multiple existence of traveling waves of a free*

- boundary problem describing cell motility*, Discret. Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **19** (2014), 789–799.
- [11] H. Monobe and H. Ninomiya, *Traveling wave solutions with convex domains for a free boundary problem*, Discret. Contin. Dyn. Syst. Ser. A, **37** (2017), 905–914.
- [12] M. Mimura and T. Tsujikawa, *Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth*, Physica A, **230** (1996), 499–543.
- [13] H. Ninomiya and M. Taniguchi, *Existence and global stability of traveling curve fronts in the Allen-Cahn equations*, J. Differ. Equ., **213** (2005), 204–233.