数理解析研究所講究録
第2068巻 2018年 69-101

様々な4次元空間内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面

熊本大学・大学院先端科学研究部　安藤 直也[1]
Naoya Ando
Faculty of Advanced Science and Technology
Kumamoto University

はじめに

次元が4のRiemann空間型, Lorentz空間型およびKähler多様体における平均曲率ベクトルが零である空間的曲面は, 空間の種類の違いがあるにも関わらず互いを関連づける論点を持っている. 本稿においては, このような曲面について知られている事柄を概説し, そして筆者が得た結果を報告したい. 本稿の要点は以下の通りである.

擬Riemann空間型内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面上にはある正則4次微分が定義される. これは3次元Riemann空間型内の極小曲面上のHopf微分の一般化であると考えられる. 4次元Riemann空間型内の極小曲面上の正則4次微分が恒等的に零であることと曲面が等方的極小であることは同値である. 4次元Euclid空間内の等方的極小曲面は, 空間を2次元複素数空間とみなしたときにある複素曲線と合同であるという性質によって特徴づけられる. 4次元球面内の等方的極小曲面は, 空間に付随するツイスター空間である複素3次元射影空間への水平(で正則)なリフトとツイスター写像の合成によってちょうど与えられる(一般の向きづけられた4次元Riemann多様体内の等方的極小曲面で空間の向きに適合するものもツイスター空間の観点で特徴づけることができる). 4次元Lorentz空間型内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面は, ほとんどの場合に共形Gauss写像によって与えられる. 3次元球面内の曲面の共形Gauss写像は4次元de Sitter空間への写像であり, 曲面の臍点を除いたところで空間的はめこみである. そして3次元球面内の曲面がWillmoreであることと, その臍点を除いたところで共形Gauss写像の平均曲率ベクトルが恒等的に零であることは同値である. 3次元球面内のWillmore曲面上で定義される正則4次微分は, Willmore曲面の共形Gauss写像が臍点を除いたところで定める正則4次微分と定数倍を除いて一致することがわかる. 4次元反de Sitter空間やMinkowski空間についても, これらを値域とする共形Gauss写像を考えることができそして現れる正則4次微分に関する同様の結論を得ることができる.

4次元Riemann空間型内の等方的極小曲面で主曲率が零にはならないもの, どの点でも正則4次微分が零にはならない極小曲面, および4次元Lorentz空間型内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面でどの点でも正則4次微分が零にはならないものは, いずれも

[1] 〒860-8555 熊本市中央区黒髪 2-39-1
熊本大学大学院先端科学研究部基礎科学部門数学分野
E-mail address: andonaoya@kumamoto-u.ac.jp

2 階の楕円型偏微分方程式系によって特徴づけられる. これらは互いに似た形をしているが, いずれも二つの未知関数のうちの一つを消去することで 4 階の楕円型方程式として表される. 従って, Willmore 曲面に対する Euler-Lagrange 方程式は 4 階の楕円型方程式であるが, 特徴づける方程式が 4 階であり楕円型であることは共形 Gauss 写像を通してより多くの種類の曲面に共通した性質であることがわかる. またそれぞれの偏微分方程式系に現れる等温座標系 (u, v) は, 対応する曲面上の正則 4 次微分にとって標準的であると考えることができる, つまり正則 4 次微分はいずれの場合においても $dw \otimes dw \otimes dw \otimes dw$ (但し $w = u + \sqrt{-1}v$) の定数倍と表される.

実次元が 4 の Kähler 多様体 (Kähler 曲面) 内の複素曲線は等方的極小であり空間の向きに適合する. 従って Kähler 曲面内にはたくさんの等方的極小曲面が存在することがわかる. 一方で, 複素曲線ではないが全測地的な曲面を含む Kähler 曲面が存在する. なお, Kähler 曲面内の実解析的な等方的極小曲面で空間の向きに適合しそして少なくとも一つの複素点を持つものは複素曲線である. Kähler 曲面がさらに二つの複素構造を持ちその結果超 Kähler 多様体である場合には, その中の等方的極小曲面で空間の向きに適合するものはちょうど空間の超 Kähler 構造が与えるある複素構造に関する複素曲線である. Kähler 曲面が超 Kähler 多様体であるための必要十分条件を, 積分曲面が等方的極小でありかつ空間の向きに適合する 2 次元分布を用いて与えることができ, また Kähler 曲面がもう一つの平行な概複素構造を許容することとして与えることもできる.

1 擬 Riemann 空間型内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面

1.1 Gauss, Codazzi および Ricci の方程式

N は $(n+2)$ 次元擬 Riemann 空間型で $(n \in \boldsymbol{N})$, 符号 $(p+2, q)$ を持つとする $(p \geqq 0,$ $q \geqq 0,$ $p+q=n)$. 擬 Riemann 空間型については, [34] を参考にできる. M を Riemann 面とする. $F : M \longrightarrow N$ は共形はめこみで, その平均曲率ベクトルが零であるとする. $\nu_1, \ldots, \nu_n$ は F に関する M 上の法束の局所枠で, $\overline{g}(\nu_i, \nu_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$ を満たすとする, 但し $\overline{g}$ は N の計量であり, また $i = 1, \ldots, p$ に対し $\varepsilon_i := 1$ とし $i = p+1, \ldots, p+q$ に対し $\varepsilon_i := -1$ とする. w を M の局所複素座標とし, $\partial_w := \partial/\partial w$, $\overline{\partial}_w := \partial/\partial \overline{w}$ とおく. $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ は ν_i の定義域上の複素 2 次微分で,

$$\Phi_i := \phi_i dw \otimes dw, \qquad \phi_i := \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_w} dF(\partial_w),\ \nu_i) \tag{1}$$

によって定義されるとする, 但し $\overline{\nabla}$ は $\overline{g}$ の Levi-Civita 接続であり, $\overline{g}$, $\overline{\nabla}$ および dF はいずれも必要に応じて考える接空間の複素化に拡張されるものとする.

$\{(U_\alpha, w_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を M の複素座標近傍系とする. $\mathcal{L}$ は M 上の正則直線束で, M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ に関する変換関数の族 $\{\theta_{\alpha\beta}\}$ は $U_\alpha \cap U_\beta$ 上 (但し $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ を満たすものについて) $\theta_{\alpha\beta} = (dw_\beta/dw_\alpha)^2$ で与えられるとする. $\mathcal{L}$ の切断はちょうど M 上の複素 2 次微分である. g を F による誘導計量とし, U_α 上 $g = \lambda_\alpha^2 dw_\alpha d\overline{w}_\alpha$ のように正値関数 λ_α を用いて表されるとする. $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Psi}$ を n 個の $\mathcal{L}$ の直積 $\mathcal{L}^n$ の切断とする. このとき $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Psi}$ は U_α

上でそれぞれ $(\phi_{\alpha,1},\ldots,\phi_{\alpha,n})$, $(\psi_{\alpha,1},\ldots,\psi_{\alpha,n})$ のように U_α 上の複素数値関数 $\phi_{\alpha,i}$, $\psi_{\alpha,i}$ を用いて表される. ここで

$$\tilde{g}_\alpha(\tilde{\Phi},\tilde{\Psi}) := \frac{4}{\lambda_\alpha^4}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\phi_{\alpha,i}\overline{\psi}_{\alpha,i}$$

とおくと, $\tilde{g}_\alpha(\tilde{\Phi},\tilde{\Psi})$ は α の選び方には依らないことがわかり, 従って $\mathcal{L}^n$ 上の非退化 Hermite 計量 $\tilde{g}$ を定義できる. また g の Levi-Civita 接続 ∇ は自然に正則 Hermite ベクトル束 $(\mathcal{L}^n,\tilde{g})$ の標準接続 $\tilde{\nabla}$ を定める. 従って $\tilde{\nabla}$ は, $\tilde{g}$ が $\tilde{\nabla}$ について平行でありかつ $\tilde{\nabla}$ の $(0,1)$-成分は $\overline{\partial}$ によって与えられる $(\mathcal{L}^n,\tilde{g})$ の一意な接続である. このとき F が満たすべき Gauss, Codazzi および Ricci の方程式はそれぞれ

$$\tilde{g}(\tilde{\Phi},\tilde{\Phi}) = L_0 - K, \quad \tilde{\nabla}_{\overline{\partial}_w}\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}\cdot\omega(\overline{\partial}_w), \quad \mathrm{Re}\,\tilde{\Omega} = \mathrm{Re}\,\Theta \tag{2}$$

によって与えられる ([14]), 但し

- K は g の曲率であり, L_0 は N の一定断面曲率である;
- ω は $(0,1)$-形式で Lie 群 $O(p,q,\boldsymbol{C}) = \{X \in GL(n,\boldsymbol{C}) \mid XI_{p,q}{}^tX = I_{p,q}\}$ (但し $I_{p,q} := (\varepsilon_i\delta_{ij})$) の Lie 代数に値を取る;
- $\tilde{\Omega} := d\omega + \overline{\omega}\wedge\omega$;
- Θ は $n\times n$ 行列で, (i,j)-成分が 2-形式 $(2\varepsilon_i\phi_i\overline{\phi}_j/\lambda^2)dw\wedge d\overline{w}$ で与えられるとする, 但し λ は $g=\lambda^2dwd\overline{w}$ で与えられる正値関数である.

さらに, M 上の共形計量 g および (2) を満たす $\mathcal{L}^n$ の切断 $\tilde{\Phi}$ に対し, M の各点の近傍の N への等長なはめこみで, 平均曲率ベクトルが零でありかつ $\overline{g}(\nu_i,\nu_j)=\varepsilon_i\delta_{ij}$ を満たす法束の適切な局所枠 $\{\nu_1,\ldots,\nu_n\}$ に関する複素 2 次微分が $\tilde{\Phi}$ によって与えられるものが, N の等長変換との合成を除いて一意に存在する ([14]).

1.2 正則 4 次微分

$n=p=1$ とする. このとき N は 3 次元 Riemann 空間型である. (2) の第一の方程式は曲面上の誘導計量と Hopf 微分の間の関係式であり, 第二の方程式はよく知られているように Hopf 微分が正則であることを意味する. 第三の方程式は自明である.

$n=p=2$ とする. このとき N は 4 次元 Riemann 空間型である. (2) の第一の方程式は

$$\frac{1}{\lambda^4}(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2) = L_0 - K$$

と表される. 第二の方程式は複素関数 ψ を用いて

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\overline{w}} = \psi\phi_2, \qquad \frac{\partial\phi_2}{\partial\overline{w}} = -\psi\phi_1 \tag{3}$$

と表され, 第三の方程式は

$$\mathrm{Im}\,\psi_w = \mathrm{Im}\,\frac{2\phi_1\overline{\phi}_2}{\lambda^2} \tag{4}$$

と表される. $Q := \Phi_1 \otimes \Phi_1 + \Phi_2 \otimes \Phi_2$ とおく. このとき Q は F に関する法束の局所正規直交枠 ν_1, ν_2 の選び方に依らない. 従って F は M 上に複素 4 次微分 Q を定める. さらに, (3) を用いて Q は正則であることがわかる. $N = S^4$ の場合, Q は [16] に現れる正則 4 次微分と定数倍を除いて一致する. $Q \equiv 0$ は極小はめこみ F が **等方的** (*isotropic*) であること, つまり M の各点での主曲率が単位法ベクトルの取り方に依らないことと同値である. 極小はめこみについて, 等方性よりも強い条件として **全等方性** (*total isotropicity*) が知られている ([19], [22]). [27], [37, Chapter 7, Part C] および [19] に基づいて, N 内の等方的極小曲面を, 法接続の曲率に関する方程式で特徴づけることができる ([38]). 2.2 節で, N 内の等方的極小曲面を特徴づける 2 階の楕円型方程式系 ([12]) を紹介する. また 2.4 節で, $N = E^4$ の場合にこの特徴づけが誘導計量と正則 3 次微分の間の関係として表される ([8]) ことについて説明する. S^4 内の等方的極小曲面は **超極小** (*superminimal*) であると言われ, S^4 に付随するツイスター空間 $\boldsymbol{C}P^3$ への水平 (で正則) なリフトとツイスター写像の合成によってちょうど与えられる ([16]). 2.5 節で, 向きづけられた 4 次元 Riemann 多様体に付随するツイスター空間および等方的極小曲面のツイスター空間の観点での特徴づけ ([23]) について説明する. N 内の極小曲面で $Q \neq 0$ を満たすものを, 法接続の曲率に関する方程式で特徴づけることができる ([38]). 2.3 節で, このような極小曲面を特徴づける 2 階の楕円型方程式系 ([12]) を紹介する. この方程式系に現れる等温座標系 (u, v) の座標曲線は, 各点での主曲率の絶対値の最大値に対応する主方向を与える. また, $w = u + \sqrt{-1}v$ とおくとき, $Q \neq 0$ を満たす極小曲面上の正則 4 次微分は定数倍を除いて $dw \otimes dw \otimes dw \otimes dw$ によって表される.

$n = 2, p = q = 1$ とする. このとき N は 4 次元 Lorentz 空間型である. (2) の第一の方程式は

$$\frac{1}{\lambda^4}(|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2) = L_0 - K \tag{5}$$

と表される. 第二の方程式は複素関数 ψ を用いて

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \overline{w}} = \psi \phi_2, \qquad \frac{\partial \phi_2}{\partial \overline{w}} = \psi \phi_1 \tag{6}$$

と表され, 第三の方程式は (4) と表される. $Q := \Phi_1 \otimes \Phi_1 - \Phi_2 \otimes \Phi_2$ とおく. このとき Q は F に関する法束の局所枠 ν_1, ν_2 で $\overline{g}(\nu_i, \nu_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$ を満たすものの選び方に依らない. 従って F は M 上に複素 4 次微分 Q を定め, さらに (6) を用いて Q は正則であることがわかる. $\tilde{\iota} := (1/\sqrt{2})(\nu_2 - \nu_1)$ および $\tilde{\nu} := (1/\sqrt{2})(\nu_2 + \nu_1)$ とおく. このとき $\tilde{\iota}, \tilde{\nu}$ は F の光的法ベクトル場で $\overline{g}(\tilde{\iota}, \tilde{\nu}) = -1$ を満たす. これらに対し

$$\Phi_{\tilde{\iota}} := \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_w} dF(\partial_w),\ \tilde{\iota}) dw \otimes dw,$$
$$\Phi_{\tilde{\nu}} := \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_w} dF(\partial_w),\ \tilde{\nu}) dw \otimes dw$$

とおくとき,

$$Q = -2\Phi_{\tilde{\iota}} \otimes \Phi_{\tilde{\nu}} \tag{7}$$

が成り立つ. $L_0 = 1$ とし, N を 4 次元 de Sitter 空間 S_1^4 とする. さらに, $\tilde{\iota}$ に関する F の主曲率は零にはならないとする. このとき $\tilde{\iota}$ は S^3 への Willmore はめこみ ι を定め, F

または $-F$ は ι の共形 Gauss 写像である. S^3 内の曲面の共形 Gauss 写像は曲面の非臍点の集合の共形はめこみであり, 元の曲面が Willmore であることとその非臍点の集合への共形 Gauss 写像の制限が零の平均曲率ベクトルを持つことは同値である ([17]). 3.3 節で S^3 内の曲面の共形 Gauss 写像について説明する. さらに, この幾つかの類似物, つまり幾つかの 3 次元空間内の空間的曲面から 4 次元 Lorentz 空間型への共形写像を考えることができるので, それらについても説明する. S^3 内の Willmore 曲面上には, その第一基本形式および第二基本形式に関する情報を組み合わせて正則 4 次微分 $\tilde{Q}$ が定義される ([17]). この $\tilde{Q}$ は, Willmore 曲面の共形 Gauss 写像が定める正則 4 次微分 Q に定数倍を除いて等しく, これらと同様のことが上述の共形 Gauss 写像の類似物を通して成り立つ ([14]). 3.4 節で正則 4 次微分 $\tilde{Q}$ およびこの類似物について説明する. 4 次元 Lorentz 空間型 N 内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面について, $Q \equiv 0$ はある光的法ベクトル場に関する型作用素が恒等的に零であることと同値であることが (7) からわかる. このことと Gauss-Codazzi-Ricci の方程式から, $Q \equiv 0$ は $K \equiv L_0$ と同値であることがわかる. $N = S^4_1$ でありかつある光的法ベクトル場 $\tilde{\iota}$ に関する F の主曲率が零にはならないならば, $Q \equiv 0$ は共形 Gauss 写像を通して対応する S^3 への Willmore はめこみ ι と E^3 へのある立体射影の合成が極小はめこみであることと同値である ([17]). 特に, 後者の条件は共形 Gauss 写像による誘導計量の曲率が恒等的に 1 に等しいことと同値である ([3]). Willmore 曲面については [4] を, Willmore 球面については [5] を参考にできる. N 内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面を, 法接続の曲率に関する方程式で特徴づけることができる ([1]). 3.2 節で, $Q \neq 0$ を満たすこのような曲面を特徴づける 2 階の楕円型方程式系 ([12]) を紹介する. この方程式系に現れる等温座標系 (u, v) の座標曲線の接線と光的法ベクトル場に関する主方向の間の角は未知関数の一つを与える. また, $w = u + \sqrt{-1}v$ とおくとき, 曲面上の正則 4 次微分 Q は定数倍を除いて $dw \otimes dw \otimes dw \otimes dw$ によって表される.

N は一般の $(n+2)$ 次元擬 Riemann 空間型で, 符号 $(p+2, q)$ を持つとする. このとき

$$Q := \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_\imath \Phi_i \otimes \Phi_\imath = \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_\imath \phi_i^2 \right) dw \otimes dw \otimes dw \otimes dw$$

は F に関する法束の局所枠 $\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$ で $\bar{g}(\nu_\imath, \nu_j) = \varepsilon_\imath \delta_{\imath j}$ を満たすものの選び方に依らない. 従って F は M 上に複素 4 次微分 Q を定める. さらに, (2) の第二の方程式を用いて, Q は正則であることがわかる.

上述のように, 4 次元 Riemann 空間型内の極小曲面が等方的であることとその上に定義される正則 4 次微分が恒等的に零であることは同値である. 一般の 4 次元 Riemann 多様体内の極小曲面についても等方性を考えることができ, 空間が向きづけられている場合には等方的極小曲面で空間の向きに適合するものは空間に付随するツイスター空間へのリフトの水平性によって特徴づけられる ([23]). 空間が Kähler 曲面である場合, 複素曲線は等方的極小曲面で空間の向きに適合するので, Kähler 曲面内にはこのような曲面がたくさん存在することがわかる. さらに, Kähler 曲面内の実解析的な等方的極小曲面で空間の向きに適合しかつ少なくとも一つの複素点を持つものは複素曲線である ([13]). 一方で, $\boldsymbol{CP}^2$, $\boldsymbol{CH}^2$, $\boldsymbol{CP}^1 \times \boldsymbol{CP}^1$ および $\boldsymbol{CH}^1 \times \boldsymbol{CH}^1$ には実解析的な全測地的曲面で複素点を持たないものが存在する ([13]). 4.1 節でこれらについて説明する. Kähler 曲面がさらに二つの複

素構造を持ちその結果超 Kähler 多様体である場合には, その中の等方的極小曲面で空間の向きに適合するものはちょうど空間の超 Kähler 構造が与えるある複素構造に関する複素曲線である. このことは, 実 4 次元超 Kähler 多様体に付随するツイスター空間の観点から [23] を参考にしてわかり, 一方でより直接の議論によってもわかる ([13]). 4.2 節でこれらについて説明する. Kähler 曲面が超 Kähler 多様体であるための必要十分条件をその上の正則 2-形式の観点で与えることができる. また単連結な Kähler 曲面が超 Kähler であることと Ricci 平坦であることは同値である. さらに, Kähler 曲面が超 Kähler 多様体であるための必要十分条件を, 積分曲面が等方的極小でありかつ空間の向きに適合する 2 次元分布を用いて与えることができ, また Kähler 曲面がもう一つの平行な概複素構造を許容することとして与えることもできる ([13]). 4.3 節でこれらについて説明する.

2 4 次元 Riemann 空間型内の極小曲面

2.1 Gauss, Codazzi および Ricci の方程式

N を 4 次元 Riemann 空間型とし, L_0 を一定断面曲率とする. M を向きづけられた 2 次元多様体とし, $F : M \longrightarrow N$ を M の N への極小はめこみとする. e_1, e_2 を M 上の接束の局所正規直交枠とし, (e_1, e_2) は M の向きを与えるとする. ν_1, ν_2 を F に関する M 上の法束の局所正規直交枠とする. $L_0 = 0$ ならば, N を E^4 とみなし, e_1, e_2, ν_1, ν_2 を E^4-値関数とみなす. $L_0 > 0$ ならば, N を E^5 内の原点を中心とし半径が $1/\sqrt{L_0}$ である超球面とみなす; $L_0 < 0$ ならば, $N = \{x \in E^5_1 \mid \langle x, x \rangle = 1/L_0\}$ と考える, 但し E^5_1 は連結, 単連結, 完備かつ平坦な 5 次元 Lorentz 空間型である: E^5_1 は $\boldsymbol{R}^5$ と微分同相であり,

$$x := (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5), \quad y := (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5) \in \boldsymbol{R}^5$$

に対し

$$\langle x, y \rangle := x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 + x^4y^4 - x^5y^5$$

で定められる不定値計量を持つ. よって $L_0 \neq 0$ ならば, F, e_1, e_2, ν_1, ν_2 を $\boldsymbol{R}^5$-値関数とみなす.

$\theta \in \boldsymbol{R}$ に対し, $\nu(\theta) := (\cos\theta)\nu_1 + (\sin\theta)\nu_2$ とおく. このとき $\nu(\theta)$ は F の単位法ベクトル場である. $k(\theta)$ を $\nu(\theta)$ に関する F の主曲率とし, 局所枠 e_1, e_2 および ν_1, ν_2 の定義域の固定された 1 点で

$$k_1 := \max\{|k(\theta)| \mid \theta \in \boldsymbol{R}\}$$

とおく. 以下, $k_1 > 0$ および $|k(0)| = k_1$ を仮定する. さらに, e_1, e_2 は ν_1 に関する F の主方向を与え

$$A_{\nu_1}(e_1) = k_1 e_1, \qquad A_{\nu_1}(e_2) = -k_1 e_2$$

を満たすとする. $k_2 := k(\pi/2)$ とおく. このとき

$$A_{\nu_2}(e_1) = k_2 e_2, \qquad A_{\nu_2}(e_2) = k_2 e_1$$

を仮定できる.

1-形式 ω_0^1, ω_0^2 を $dF = e_1\omega_0^1 + e_2\omega_0^2$ で定める. このとき (ω_0^1, ω_0^2) は (e_1, e_2) の双対枠である. 次が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
&(dF\ de_1\ de_2\ d\nu_1\ d\nu_2) \\
&= (F\ e_1\ e_2\ \nu_1\ \nu_2)\begin{pmatrix} 0 & -L_0\omega_0^1 & -L_0\omega_0^2 & 0 & 0 \\ \omega_0^1 & 0 & -\omega_1^2 & -k_1\omega_0^1 & -k_2\omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega_1^2 & 0 & k_1\omega_0^2 & -k_2\omega_0^1 \\ 0 & k_1\omega_0^1 & -k_1\omega_0^2 & 0 & -\alpha \\ 0 & k_2\omega_0^2 & k_2\omega_0^1 & \alpha & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

但し ω_1^2, α は 1-形式である. $ddF = 0$, $dde_i = 0$, $dd\nu_i = 0$ および (8) を用いて, Gauss-Codazzi-Ricci の方程式

$$
K = -k_1^2 - k_2^2 + L_0, \quad dk = 2k{*}\omega_1^2 - \sqrt{-1}\,\bar{k}{*}\alpha, \quad d\alpha = -2k_1k_2\omega_0^1 \wedge \omega_0^2 \tag{9}
$$

を得る, 但し K は F による誘導計量 g の曲率であり, $k := k_1 + \sqrt{-1}k_2$ であり, また $*$ は Hodge の $*$-作用素である.

2.2 等方的かつ主曲率が零ではない場合の特徴づけ

まず k_1 と k_2 が恒等的に等しい場合を考える. 関数 k_0 を $k_0 := k_1 = k_2$ で定める. このとき (9) はそれぞれ

$$
K - L_0 = -2k_0^2, \quad d\log k_0 = 2{*}\omega_1^2 - {*}\alpha, \quad d\alpha = -2k_0^2\omega_0^1 \wedge \omega_0^2. \tag{10}
$$

と表される. F が等方的であることから, 単位法ベクトル場 ν_1 および等温座標系 (u, v) を選んで F_{uv} が ν_1 に直交しているようにできる. このとき (u, v) の座標曲線の接線は ν_1 に関する F の主方向である. よってある関数 p が $e_1 = e^{-p}\partial/\partial u$, $e_2 = e^{-p}\partial/\partial v$ を満たすと仮定してよい. このとき ${*}\omega_1^2 = -dp$ が得られ, この式と (10) の第 2 式から ${*}\alpha = -dq$ を得る, 但し $q := 2p + \log k_0$ である. よって (10) の第 1 式および第 3 式を用いて,

$$
p_{uu} + p_{vv} = 2\frac{e^{2q}}{e^{2p}} - L_0e^{2p}, \qquad q_{uu} + q_{vv} = -2\frac{e^{2q}}{e^{2p}} \tag{11}
$$

を得る.

p, q は $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D 上の 2 変数 u, v の関数で (11) を満たすとする. そして

$$
\omega_0^1 := e^p du, \quad \omega_0^2 := e^p dv, \quad \omega_1^2 := {*}dp, \quad \alpha := {*}dq \tag{12}
$$

および $k_1 = k_2 := e^q/e^{2p}$ とおく. このとき, 線形過剰決定系の解の存在および一意性についての議論から, $L_0 = 0$ ならば D の各点 a の近傍上で (8) を満たす $\boldsymbol{R}^4$-値関数 F, e_1, e_2, ν_1, ν_2 が存在し, $L_0 \neq 0$ ならば同様の $\boldsymbol{R}^5$-値関数 F, e_1, e_2, ν_1, ν_2 が存在することがわかり, そして a で与えられた初期値に対しこれらは一意であることがわかる. さらに, 初期値および a の近傍 U を選ぶことで, 以下のような F, e_1, e_2, ν_1, ν_2 を見出すことができる:

- $F : U \longrightarrow N$ は極小はめこみである;

- F による誘導計量 g は $g = e^{2p}(du^2 + dv^2)$ で与えられそして g の曲率 K は L_0 より小さい;
- ν_1, ν_2 は F に関する法束の局所正規直交枠である;
- U の各点での F の主曲率は単位法ベクトルの選び方に依らず $\pm e^q/e^{2p}$ に等しい.

以上のようにして, 次を得ることができる:

定理 2.1 ([12]) (M, g) を 2 次元 Riemann 多様体とし, (M, g) の曲率 K は実数 L_0 より小さいとする. このとき次の (a), (b) は同値である:

(a) M の各点の近傍 U の N への等長かつ極小なはめこみで, U の各点での主曲率が単位法ベクトルの取り方に依らないものが存在する;

(b) M の各点の近傍上の等温座標系 (u, v) に対し, ある関数 p, q が $g = e^{2p}(du^2 + dv^2)$ および (11) を満たす.

さらに, これら (a), (b) が成り立つならば, (a) に現れるはめこみは N の等長変換との合成を除いて計量 g によって一意に定まり, U の各点での主曲率は $\pm e^q/e^{2p}$ で与えられる.

2.3 各点での主曲率が単位法ベクトルに依る場合の特徴づけ

以下においては, $k_1 > |k_2|$ の場合を考える. このとき (9) の第二式を用いて,

$$\begin{aligned} 0 &= ddk \\ &= 2dk \wedge *\omega_1^2 + 2kd{*}\omega_1^2 - \sqrt{-1}d\overline{k} \wedge *\alpha - \sqrt{-1}\,\overline{k}d{*}\alpha \\ &= 2kd{*}\omega_1^2 - \sqrt{-1}\,\overline{k}d{*}\alpha \end{aligned} \tag{13}$$

を得る. よって, $k_1^2 - k_2^2 \neq 0$ に注意して, (13) から $d{*}\omega_1^2 = 0$ および $d{*}\alpha = 0$ を得る. よってある関数 p, q がそれぞれ $dp = -*\omega_1^2$ および $dq = -*\alpha$ を満たす. このとき (9) の第一式および第三式を用いて,

$$p_{uu} + p_{vv} = \frac{1}{e^{2p}}\cosh 2q - L_0 e^{2p}, \qquad q_{uu} + q_{vv} = -\frac{1}{e^{2p}}\sinh 2q \tag{14}$$

を得ることができる.

p, q は $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D 上の 2 変数 u, v の関数で (14) を満たすとする. そして ω_0^1, ω_0^2, ω_1^2, α を (12) のようにおきそして

$$k_1 + \sqrt{-1}k_2 := \frac{1}{e^{2p}}(\cosh q + \sqrt{-1}\sinh q) \tag{15}$$

とおく. このとき, $L_0 = 0$ ならば D の各点 a の近傍上で (8) を満たす $\boldsymbol{R}^4$-値関数 F, e_1, e_2, ν_1, ν_2 が存在し, また $L_0 \neq 0$ ならば同様の $\boldsymbol{R}^5$-値関数 F, e_1, e_2, ν_1, ν_2 が存在し, そして a で与えられた初期値に対しこれらは一意である. さらに, 初期値および a の近傍 U を選ぶことで, 以下のような F, e_1, e_2, ν_1, ν_2 を見出すことができる:

- $F : U \longrightarrow N$ は極小はめこみである;
- F による誘導計量 g は $g = e^{2p}(du^2 + dv^2)$ で与えられそして g の曲率 K は L_0 より小さい;
- ν_1, ν_2 は F に関する法束の局所正規直交枠である;
- U の各点 a での ν_i に関する F の主曲率は $\pm k_i$ に等しく, k_1 は a での主曲率の絶対値の最大値である.

以上のようにして, 次を得ることができる:

定理 2.2 ([12]) (M, g) を 2 次元 Riemann 多様体とし, (M, g) の曲率 K は実数 L_0 より小さいとする. $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ は M 上の 1 次元分布で, M の任意の点で g に関して直交しているとする. このとき次の (a), (b) は同値である:

(a) M の各点の近傍 U の N への等長かつ極小なはめこみで, U の各点での主曲率が単位法ベクトルの取り方に依りかつ $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ が U の任意の点で主曲率の絶対値の最大値に対応する主方向を与えるようなものが存在する;

(b) M の各点の近傍上のある等温座標系 (u, v) およびある関数 p, q が $g = e^{2p}(du^2 + dv^2)$, $\partial/\partial u \in \mathcal{D}_1$, $\partial/\partial v \in \mathcal{D}_2$ および (14) を満たす.

さらに, これら (a), (b) が成り立つならば, (a) に現れるはめこみは N の等長変換との合成を除いて計量 g および 1 次元分布 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ によって一意に定まり, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ に対応する主曲率は $\pm(1/e^{2p})\cosh q$ で与えられる.

注意 定理 2.2 の (a) のようなはめこみが定める正則 4 次微分 Q は $Q \neq 0$ を満たす. (u, v) を定理 2.2 の (b) のような等温座標系とするとき, (15) および $\cosh^2 q - \sinh^2 q \equiv 1$ を用いて $Q = (1/4)dw \otimes dw \otimes dw \otimes dw$ が成り立つことがわかる.

2.4 4 次元 Euclid 空間内の等方的極小曲面

E^4 内の連結な等方的極小曲面は, E^4 を $\boldsymbol{C}^2$ と同一視したときに, $\boldsymbol{C}^2$ 内のある連結な複素曲線と合同である. $\boldsymbol{C}^2$ 内の複素曲線は誘導計量およびある正則 3 次微分によって特徴づけられる. また $\boldsymbol{C}^2$ 内の複素曲線は局所的にアファイン Schwarz 写像と平行移動の合成によって与えられる. 以下において, これらについて説明する.

(x^1, y^1, x^2, y^2) を E^4 の標準的な直交座標系とする. $\overline{I}$, $\overline{J}$, $\overline{K}$ は E^4 上の概複素構造で, 基底 $(\partial/\partial x^1, \partial/\partial y^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial y^2)$ に関する表現行列がそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

によって与えられるとする. このとき $\overline{I}\overline{J} = -\overline{J}\overline{I} = \overline{K}$ が成り立つ. また $\overline{I}$, $\overline{J}$, $\overline{K}$ は E^4 の計量 $\overline{g}$ を保つ. そしてこれらは $\overline{g}$ の Levi-Civita 接続 $\overline{\nabla}$ に関して平行である. 従って $(\overline{g}, \overline{I}, \overline{J}, \overline{K})$ は超 Kähler 構造である.

M を連結な Riemann 面とし, I を M の複素構造とする. $F : M \longrightarrow E^4$ を複素構造 $\overline{I}$ に関する正則はめこみとする. このとき M 上の接束 TM 上で $dF \circ I = \overline{I} \circ dF$ が成り立つ. $w = u + \sqrt{-1}v$ を M の局所複素座標とするとき, F による誘導計量 g は実数値関数 α を用いて $g = e^{2\alpha}dwd\overline{w} = e^{2\alpha}(du^2 + dv^2)$ と表される. 次のようにおく:

$$\begin{aligned} T_1 &:= dF\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \quad T_2 := \overline{I} \circ dF\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = dF\left(\frac{\partial}{\partial v}\right), \\ N_1 &:= \overline{J} \circ dF\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \quad N_2 := \overline{K} \circ dF\left(\frac{\partial}{\partial u}\right). \end{aligned}$$

このときある実数値関数 μ_1, μ_2 が

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{T_1}T_1 = -\overline{\nabla}_{T_2}T_2 &= \alpha_u T_1 - \alpha_v T_2 + \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2, \\ \overline{\nabla}_{T_1}T_2 = \overline{\nabla}_{T_2}T_1 &= \alpha_v T_1 + \alpha_u T_2 - \mu_2 N_1 + \mu_1 N_2 \end{aligned} \tag{16}$$

を満たす. (16) から, F は等方的極小であり各点での主曲率は $\pm e^{-\alpha}\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$ に等しいことがわかる. また共形的な等方的極小はめこみ $F : M \longrightarrow E^4$ は (16) と同様の式を満たしまた実解析的であるので, ([6] を参考にして) F と E^4 のある等長変換との合成が $\boldsymbol{C}^2$ への正則はめこみであることがわかる. よって次を得る:

命題 2.3 $F : M \longrightarrow E^4 = \boldsymbol{C}^2$ を共形はめこみとする. F が等方的極小はめこみであることと, F と E^4 のある等長変換との合成が $\boldsymbol{C}^2$ への正則はめこみであることは同値である.

正則はめこみ $F : M \longrightarrow E^4$ に対し, (16) および $\overline{\nabla}$ が平坦であることを用いて, Gauss-Codazzi-Ricci の方程式は

$$\alpha_{uu} + \alpha_{vv} - 2(\mu_1^2 + \mu_2^2) = 0 \tag{17}$$

および

$$\begin{aligned} -(\mu_1)_v - (\mu_2)_u - 2(\mu_1\alpha_v + \mu_2\alpha_u) &= 0, \\ (\mu_1)_u - (\mu_2)_v + 2(\mu_1\alpha_u - \mu_2\alpha_v) &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

によって与えられることがわかる. (18) は $\phi := e^{2\alpha}(\mu_1 + \sqrt{-1}\mu_2)$ が w の正則関数であることと同値である. また (17) は, g の曲率 K が $K = -2|\phi|^2e^{-6\alpha}$ と表されることと同値である.

M 上の 3 次共変テンソル場 T を

$$T(V_1, V_2, V_3) := \overline{g}(\overline{J} \circ dF(V_1), h(V_2, V_3))$$

で定める, 但し V_i は M の接ベクトルで, h は F の第二基本形式である. T を M 上の接束の複素化上に拡張したものも T で表す. このとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &T\left(\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial w}\right) = \frac{1}{2}\phi, \\ &T\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}}, \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial w}\right) = T\left(\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \overline{w}}, \frac{\partial}{\partial w}\right) = T\left(\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right) = 0. \end{aligned}$$

よって M 上のある正則 3 次微分 Φ が $\mathrm{Re}\,\Phi = T$ および $\Phi = \phi\, dw^3$ を満たす. 次の定理が成り立つ:

定理 2.4 ([8]) $F : M \longrightarrow E^4$ を M の E^4 への共形はめこみとする. $g = e^{2\alpha} dw d\overline{w}$ を F による誘導計量とし, K を g の曲率とする. このとき次の (a), (b) は同値である:

(a) F と E^4 のある等長変換との合成は複素構造 $\bar{I}$ に関する正則はめこみである;

(b) M 上のある正則 3 次微分 Φ が $T = \mathrm{Re}\,\Phi$ および $K = -2|\phi|^2/e^{6\alpha}$ を満たす, 但し Φ は局所的に $\Phi = \phi\, dw^3$ と表されているとする.

さらに, M 上の共形計量 $g = e^{2\alpha} dw d\overline{w}$ および正則 3 次微分 $\Phi = \phi\, dw^3$ が $K = -2|\phi|^2/e^{6\alpha}$ を満たすならば, M の各点の近傍の E^4 への $\bar{I}$ に関する正則はめこみ F が存在して

- F による誘導計量は g によって与えられ,
- F が定める 3 次共変テンソル場 T は $T = \mathrm{Re}\,\Phi$ によって与えられる;

F のようなはめこみは E^4 の $\bar{I}$ に関する正則等長変換および平行移動との合成を除いて一意である.

注意 定理 2.4 における (b) が成り立つとし, $K \neq 0$ を仮定する. このとき $p := \alpha$, $q := \log|\phi| - p$ は $L_0 = 0$ に対する (11) を満たす.

さらに, 次が成り立つ:

定理 2.5 ([8]) F は M の $E^4 \cong \boldsymbol{C}^2$ への $\bar{I}$ に関する正則はめこみで, 二つの正則関数 f^1, f^2 を用いて $F = (f^1, f^2)$ と表されるとする. また, M の任意の局所複素座標 z に対し, $f^1 f^2_z - f^2 f^1_z \neq 0$ が成り立つとする. このとき M の各点の近傍上の局所複素座標 w を選んで $i = 1, 2$ に対し $f^i_{ww} + \phi f^i = 0$ が成り立つようにできる, 但し ϕ は $T = \mathrm{Re}\,\Phi$ を満たす M 上の正則 3 次微分 Φ の w に関する成分である.

注意 定理 2.5 から特に $\boldsymbol{C}^2 \cong E^4$ 内の複素曲線は局所的にアファイン Schwarz 写像と平行移動の合成によって与えられることがわかる. 複素平面 $\boldsymbol{C}$ の領域上の正則関数 $q = q(w)$ に対し, 線形方程式 $f_{ww} - qf = 0$ の基本解 (f^1, f^2) は様々な種類の Schwarz 写像を定める. **アファイン Schwarz 写像** (*affain Schwarz map*) は基本解 (f^1, f^2) が定める $\boldsymbol{C}^2$ への写像である ([29]). 元々の **Schwarz 写像** (*Schwarz map*) はアファイン Schwarz 写像と標準的な射影 $\pi : \boldsymbol{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{CP}^1$ との合成によって与えられる. **微分 Schwarz 写像** (*derived Schwarz map*) は導関数 f^1_w, f^2_w の組が与える $\boldsymbol{CP}^1$ への写像である ([36]). **双曲的 Schwarz 写像** (*hyperbolic Schwarz map*) は 3 次元双曲空間 H^3 内の平坦波面を与え, また H^3 の理想境界を $\boldsymbol{CP}^1$ とみなすことによって元々の Schwarz 写像および微分 Schwarz 写像を双曲的 Schwarz 写像の双曲的 Gauss 写像とみなすことができるようになる ([35]). また **de Sitter Schwarz 写像** (*de Sitter Schwarz map*) は 3 次元 de Sitter 空間 S^3_1 への写像で, S^3_1 の理想境界の各連結成分を $\boldsymbol{CP}^1$ とみなすことによって de Sitter Schwarz 写像は双曲的 Schwarz 写像の双曲的 Gauss 写像の類似物を持つと考えることができるようになる ([24]). **球面 Schwarz 写像** (*sphere Schwarz map*) は 3 次元単位球面 S^3 への写像であり, モノドロミー群が正多面体群によって与えられる超幾何微分

方程式に付随する球面 Schwarz 写像が [41] において調べられ, また球面 Schwarz はめこみの第一および第二基本形式の $(\log\rho^2)_{w\overline{w}} = 1/\rho^4$ を満たす正値関数 ρ による特徴づけが [8] において与えられた.

2.5 4 次元球面内の等方的極小曲面

M を連結な Riemann 面とし, F を M の S^4 への共形はめこみとする. F が等方的極小はめこみであることと, F が S^4 に付随するツイスター空間である $\boldsymbol{CP}^3$ から S^4 への射影 (S^4 に付随するツイスター写像) と $\boldsymbol{CP}^3$ において水平な (正則) はめこみ $\tilde{F} : M \longrightarrow \boldsymbol{CP}^3$ の合成と表されることは同値である ([16]). また, F を M の向きづけられた 4 次元 Riemann 多様体 N への共形はめこみとするとき, F が等方的極小で空間の向きに適合することと F が N に付随するツイスター空間 $\tilde{N}$ への水平なリフト $\tilde{F} : M \longrightarrow \tilde{N}$ を持つことは同値である ([23]). 以下においては, まず向きづけられた 4 次元内積空間 X の外積空間 $\bigwedge^2 X$ の線形変換である $*$-作用素の固有空間について説明する. そして N に付随するツイスター空間 $\tilde{N}$ について説明し, 特に上述の [23] の結果を説明する. そして $N = S^4$ に付随するツイスター空間は $\boldsymbol{CP}^3$ であることについて説明する. ツイスター空間については [22] を参考にできる.

2.5.1 向きづけられた 4 次元内積空間の 2 重外積空間

X を 4 次元内積空間とする. X の 2 重外積空間 $\bigwedge^2 X$ は 6 次元線形空間であり, $\bigwedge^2 X$ の内積として X の正規直交基底 e_1, e_2, e_3, e_4 に対し $\{\omega_{ij} \mid 1 \leqq i < j \leqq 4\}$ $(\omega_{ij} := e_i \wedge e_j)$ が $\bigwedge^2 X$ の正規直交基底であるようなものをとる. $\bigwedge^2 X$ のこの内積は X の内積によって決まり, X の正規直交基底 e_1, e_2, e_3, e_4 の取り方には依らない. 以下, X の向きを指定する. X の向きを与える順序づけられた正規直交基底の全体からなる集合を $\mathcal{B}_X$ で表す. $\bigwedge^2 X$ の線形変換である $*$-作用素 $*$ は

- $*$ と $*$ 自身の合成 $* \circ *$ は $\bigwedge^2 X$ の恒等変換であり,
- $\mathcal{B}_X$ の元 (e_1, e_2, e_3, e_4) に対し $*\omega_{12} = \omega_{34}$, $*\omega_{13} = \omega_{42}$, $*\omega_{14} = \omega_{23}$ が成り立つ

という条件によって定められる. $*$ の固有値は 1 および -1 であり, 固有値 ± 1 に対する固有空間 $\bigwedge^2_\pm X$ は

$$E_{\pm,1} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_{12} \pm \omega_{34}), \quad E_{\pm,2} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_{13} \pm \omega_{42}), \quad E_{\pm,3} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_{14} \pm \omega_{23})$$

を正規直交基底とする. $\bigwedge^2_+ X$ と $\bigwedge^2_- X$ は内積空間 $\bigwedge^2 X$ において互いに直交する.

T を X の向きを保つ直交変換とする. このとき $\mathcal{B}_X$ の各元 (e_1, e_2, e_3, e_4) に対し, T は $\mathcal{B}_X$ の元 $(T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4))$ を与える. $(e_1, e_2, e_3, e_4) \in \mathcal{B}_X$ に対し, SO(4) のある元 A が T の (e_1, e_2, e_3, e_4) に関する表現行列である:

$$(T(e_1)\ T(e_2)\ T(e_3)\ T(e_4)) = (e_1\ e_2\ e_3\ e_4)A. \tag{19}$$

$\bigwedge^2 X$ の線形変換 Φ_T を

$$\Phi_T(\omega_{ij}) = \Phi_T(e_i \wedge e_j) = T(e_i) \wedge T(e_j) \tag{20}$$

によって定める. Φ_T は T によって決まり, $\mathcal{B}_X$ の元 (e_1, e_2, e_3, e_4) の取り方には依らない. T' を X の向きを保つ直交変換とするとき, $\Phi_{T \circ T'} = \Phi_T \circ \Phi_{T'}$ が成り立つ. Φ_T の $\bigwedge^2_\pm X$ への制限 $\Phi_{T,\pm} := \Phi_T|_{\bigwedge^2_\pm X}$ を調べる. そのためにまず SO(4) の元は SU(2) の元と SO(3) の元の積で表されることに着目する, 但し SU(2) は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SU}(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \ \alpha, \beta \in \boldsymbol{C},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \\
&\cong \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 \\ b_2 & b_1 & b_4 & -b_3 \\ b_3 & -b_4 & b_1 & b_2 \\ b_4 & b_3 & -b_2 & b_1 \end{pmatrix} \middle| \ b_i \in \boldsymbol{R},\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = 1 \right\}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

によって SO(4) の部分群と考えられ, また SO(3) は

$$
\mathrm{SO}(3) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \middle| \ \begin{array}{l} c_{ij} \in \boldsymbol{R},\ c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + c_{3i}c_{3j} = \delta_{ij}, \\ \det(c_{ij}) = 1 \end{array} \right\}
$$

によってやはり SO(4) の部分群と考えられる. SO(4) の各元 A に対し, SU(2) の元 B および SO(3) の元 C が唯一つずつ定まり $A = BC$ が成り立つ. $\mathcal{B}_X$ の元 (e_1, e_2, e_3, e_4) を選んで, T の表現行列 A が SU(2) の元 B に等しくなるとする. このとき $\Phi_T(E_{+,i}) = E_{+,i}$ が成り立つので, $\Phi_{T,+}$ は $\bigwedge^2_+ X$ の恒等変換である. また

$$
\begin{aligned}
&(\Phi_T(E_{-,1})\ \Phi_T(E_{-,2})\ \Phi_T(E_{-,3})) \\
&= (E_{-,1}\ E_{-,2}\ E_{-,3}) \begin{pmatrix} b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 - b_4^2 & 2b_1b_4 + 2b_2b_3 & -2b_1b_3 + 2b_2b_4 \\ -2b_1b_4 + 2b_2b_3 & b_1^2 + b_3^2 - b_2^2 - b_4^2 & 2b_1b_2 + 2b_3b_4 \\ 2b_1b_3 + 2b_2b_4 & -2b_1b_2 + 2b_3b_4 & b_1^2 + b_4^2 - b_2^2 - b_3^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

が成り立ち, (22) から $\Phi_{T,-}$ は $\bigwedge^2_- X$ の直交変換であることがわかる. (22) は連結な実 3 次元 Lie 群である SU(2) からやはり連結な実 3 次元 Lie 群である SO(3) への 2 重被覆準同型を与える ($\mathrm{SU}(2) \cong \mathrm{Spin}(3)$). $\mathcal{B}_X$ の元 (e_1, e_2, e_3, e_4) を選んで T の表現行列 A が SO(3) の元 C に等しくなるならば,

$$
(\Phi_T(E_{\pm,1})\ \Phi_T(E_{\pm,2})\ \Phi_T(E_{\pm,3})) = (E_{\pm,1}\ E_{\pm,2}\ E_{\pm,3}) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}
$$

が成り立つので, $\Phi_{T,\pm}$ は $\bigwedge^2_\pm X$ の直交変換である. 以上から, 次を得る:

命題 2.6 X の向きを保つ直交変換 T に対し, $\Phi_{T,\pm}$ は $\bigwedge^2_\pm X$ の直交変換である. 特に, $\mathcal{B}_X$ の元を選んで T の表現行列が SU(2) に含まれるようにできるならば, $\Phi_{T,+}$ は $\bigwedge^2_+ X$ の恒等変換である.

$\mathcal{B}_X$ の二つの元 $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, $e' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ に対し SU(2) の元 B および

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \ \theta \in [0, 2\pi) \right\} \cong \mathrm{SO}(2) \tag{23}$$

の元 C が存在して $e' = eBC$ が成り立つとき, $e \sim e'$ と記すことにする. $\sim$ が $\mathcal{B}_X$ における同値関係であることは,

$$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SO}(2) = \{BC \mid B \in \mathrm{SU}(2),\ C \in \mathrm{SO}(2)\}$$

が SO(4) の部分群であることからわかり, そしてこのことは次のようにわかる: SU(2) × SO(2) の 2 つの元 BC, $B'C'$ (B, $B' \in \mathrm{SU}(2)$, C, $C' \in \mathrm{SO}(2)$) に対し $(BC)(B'C') = (BDB'D^{-1})(CC')$ が成り立つ (但し D は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 & 0 & 0 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ 0 & 0 & \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

という形の SU(2) の元である) ので, $(BC)(B'C') \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SO}(2)$ が成り立つ; $B \in \mathrm{SU}(2)$, $C \in \mathrm{SO}(2)$ に対し,

$$(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1} = (D^{-1}B^{-1}D)C^{-1} \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SO}(2)$$

が成り立つ. $\mathcal{B}_X$ の元 $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ に対し, $\omega := \left(1/\sqrt{2}\right)(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4)$ は $\bigwedge^2_+ X$ の単位ベクトルであり, ω は e の同値類 $[e] \in \mathcal{B}_X/\sim$ によって決まり $[e]$ の元の取り方に依らない. こうして写像

$$\Xi : \mathcal{B}_X/\sim \longrightarrow U\left(\textstyle\bigwedge^2_+ X\right) := \left\{\omega \in \textstyle\bigwedge^2_+ X \mid \omega \text{の長さ} = 1\right\}$$

が定義できる. Ξ が全単射であることは次のようにわかる.

- $[e], [e'] \in \mathcal{B}_X/\sim$ に対し, $\Xi([e]) = \Xi([e'])$ を仮定する. $[e']$ の元 e' を選んで $e'_1 = e_1$ とできる. このとき $\Xi([e]) = \Xi([e'])$ から $e'_2 = e_2$ がわかり, そして $[e'] = [e]$ を得る. 従って Ξ は単射である.

- $e = (e_1, e_2, e_3, e_4) \in \mathcal{B}_X$ および $U\left(\bigwedge^2_+ X\right)$ の元 ω に対し, 実数 c_1, c_2, c_3 で $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ および $\omega = c_1 E_{+,1} + c_2 E_{+,2} + c_3 E_{+,3}$ を満たすものが存在する. 従って X の向きを保つ直交変換 T で SO(3) の元を表現行列とするものが存在して $\Phi_T(E_{+,1}) = \omega$ が成り立つ. このとき $T(e) := (T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)) \in \mathcal{B}_X$ でありそして $\Xi([T(e)]) = \omega$ であるので, Ξ は全射である.

よって $\mathcal{B}_X/\sim$ と $U\left(\bigwedge^2_+ X\right)$ を同一視できる. これは Lie 群 SO(4) の閉部分群 SU(2)×SO(2) による剰余類集合である等質空間 SO(4)/(SU(2) × SO(2)) と S^2 を同一視できるということである.

2.5.2 向きづけられた 4 次元 Riemann 多様体に付随するツイスター空間

N を向きづけられた 4 次元 Riemann 多様体とする．このとき N 上のベクトル束 $\bigwedge^2 TN$ は二つの部分束

$$\textstyle\bigwedge_+^2 TN := \bigcup_{b\in N} \bigwedge_+^2 T_bN, \quad \bigwedge_-^2 TN := \bigcup_{b\in N} \bigwedge_-^2 T_bN$$

の直和と表される．本稿では，N に付随する**ツイスター空間** (*twistor space*) $\tilde{N}$ を

$$\tilde{N} := U\bigl(\textstyle\bigwedge_+^2 TN\bigr) = \bigcup_{b\in N} U\bigl(\bigwedge_+^2 T_bN\bigr)$$

で与えられる球面束とする．

$\bar{g}$ を N の計量とし，$\bar{\nabla}$ を $\bar{g}$ の Levi-Civita 接続とする．このとき $\bar{\nabla}$ は N 上の接束 TN の接続であり，そしてベクトル束 $\bigwedge^2 TN$ の接続 $\tilde{\nabla}$ を与える．$\tilde{\nabla}$ については [30, p. 40], [32, p. 53] を参考にできる．I を開区間とし，$\gamma : I \longrightarrow N$ を曲線とする．γ の**リフト** (*lift*) $\tilde{\gamma}$ は I から $\tilde{N}$ への写像で，各 $t \in I$ に対し $\tilde{\gamma}(t) \in U\bigl(\bigwedge_+^2 T_{\gamma(t)}N\bigr)$ を満たすものである．$\gamma : I \longrightarrow N$ のリフト $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \tilde{N}$ に対し，γ に沿うベクトル場 E_1, E_2, E_3, E_4 で各 $t \in I$ に対し $(E_1(t), E_2(t), E_3(t), E_4(t)) \in \mathcal{B}_{T_{\gamma(t)}N}$ および

$$\tilde{\gamma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1(t) \wedge E_2(t) + E_3(t) \wedge E_4(t)) \tag{24}$$

を満たすものが存在する．$\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \tilde{N}$ が**水平** (*horizontal*) であるとは，任意の $t \in I$ に対し $\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)}\tilde{\gamma}(t)$ が零であるときにいう．$t_0 \in I$ に対し，$(e_1, e_2, e_3, e_4) \in \mathcal{B}_{T_{\gamma(t_0)}N}$ をとる．このとき γ に沿う平行なベクトル場 E_1, E_2, E_3, E_4 の組で $E_i(t_0) = e_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を満たすものが唯一つ存在する．そして各 $t \in I$ に対し $\tilde{\gamma}(t)$ を (24) のように定めると，$\tilde{\gamma}$ は γ の水平なリフトである．逆に，$\tilde{\gamma}$ を γ の水平なリフトとすると，γ に沿う平行なベクトル場 E_1, E_2, E_3, E_4 を選んで (24) が成り立つようにできる: E_1 として γ に沿う平行なベクトル場を任意にとるとき，$\tilde{\nabla}_{\gamma'}\tilde{\gamma} = 0$ から γ に沿うベクトル場 E_2 で (24) を満たすものは平行であることがわかる．γ の水平なリフトは $e = (e_1, e_2, e_3, e_4) \in \mathcal{B}_{T_{\gamma(t_0)}N}$ の同値類 $[e] \in \mathcal{B}_{T_{\gamma(t_0)}N}/\!\sim\, \cong U\bigl(\bigwedge_+^2 T_{\gamma(t_0)}N\bigr)$ によって一意に定められる．

M を Riemann 面とし，$F : M \longrightarrow N$ を共形はめこみとする．各 $a \in M$ および $\mathcal{B}_{T_{F(a)}N}$ の元 (e_1, e_2, e_3, e_4) で $e_1, e_2 \in dF(T_aM)$ を満たしかつ (e_1, e_2) が $dF(T_aM)$ の向きを与えるようなものに対し，

$$\tilde{F}(a) := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) \in U\bigl(\textstyle\bigwedge_+^2 T_{F(a)}N\bigr) \tag{25}$$

とおく．$\tilde{F}(a)$ は上のような (e_1, e_2, e_3, e_4) の取り方に依らない．従って (25) によって M から $\tilde{N}$ への写像 $\tilde{F}$ を定義できる．$\tilde{F} : M \longrightarrow \tilde{N}$ を F の**リフト**という．M の各点 a のある近傍 U 上の F に沿うベクトル場 E_1, E_2, E_3, E_4 で，各 $x \in U$ に対し $(E_1(x), E_2(x), E_3(x), E_4(x))$ は $\mathcal{B}_{T_{F(x)}N}$ の元で $E_1(x), E_2(x) \in dF(T_xM)$ を満たしかつ $(E_1(x), E_2(x))$ が $dF(T_xM)$ の向きを与えるようなものが存在する．このとき F のリフト $\tilde{F}$ は U 上で

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1(x) \wedge E_2(x) + E_3(x) \wedge E_4(x)) \quad (x \in U) \tag{26}$$

と表される. $\tilde{F}: M \longrightarrow \tilde{N}$ が **水平** であるとは, M の各点 a の近傍 U 上で $\tilde{\nabla}_{E_1}\tilde{F}$ および $\tilde{\nabla}_{E_2}\tilde{F}$ が零であるときにいう.

$w = u + \sqrt{-1}v$ を M の各点の近傍 U 上の局所複素座標とし, $T_1 := dF(\partial/\partial u)$, $T_2 := dF(\partial/\partial v)$ とおく. F が等方的極小はめこみならば, $\left(\overline{\nabla}_{T_1}T_1\right)^{\top}$, $\left(\overline{\nabla}_{T_1}T_1\right)^{\perp}$ の長さはそれぞれ $\left(\overline{\nabla}_{T_1}T_2\right)^{\top}$, $\left(\overline{\nabla}_{T_1}T_2\right)^{\perp}$ の長さに等しくかつ

$$\overline{g}\left(\left(\overline{\nabla}_{T_1}T_1\right)^{\top},\ \left(\overline{\nabla}_{T_1}T_2\right)^{\top}\right) = 0, \qquad \overline{g}\left(\left(\overline{\nabla}_{T_1}T_1\right)^{\perp},\ \left(\overline{\nabla}_{T_1}T_2\right)^{\perp}\right) = 0$$

が成り立つ, 但し $\left(\overline{\nabla}_{T_i}T_j\right)^{\top}$, $\left(\overline{\nabla}_{T_i}T_j\right)^{\perp}$ はそれぞれ $\overline{\nabla}_{T_i}T_j$ の F に関する接成分および法成分である. 等方的極小はめこみ F が **N の向きに適合する** (*compatible with the orientation of N*) とは, F の主曲率が零ではない M の点 a に対し $\left(T_1, T_2, \overline{\nabla}_{T_1}T_1, \overline{\nabla}_{T_1}T_2\right)$ が $T_{F(a)}N$ の向きを与える順序づけられた基底であるときにいうことにする.

定理 2.7 (**[23]**) $F: M \longrightarrow N$ を共形はめこみとする. このとき次の (a), (b) は同値である:

(a) F は等方的極小はめこみで N の向きに適合する;

(b) F のリフト $\tilde{F}: M \longrightarrow \tilde{N}$ は水平である.

証明 $F: M \longrightarrow N$ は等方的極小はめこみで N の向きに適合するとする. F による誘導計量 g を $g = e^{2\alpha}dwd\overline{w} = e^{2\alpha}(du^2 + dv^2)$ と表す, 但し α は実数値関数である. N_1, N_2 は M の各点の近傍 U 上の F の法ベクトル場で, $\overline{g}(N_i, N_j) = e^{2\alpha}\delta_{ij}$ を満たしかつ $F(U)$ の各点での接空間の順序づけられた基底 (T_1, T_2, N_1, N_2) は N の向きを与えるとする. このとき U 上のある実数値関数 μ_1, μ_2 に対し (16) が成り立つ. T_1, T_2, N_1, N_2 に対し,

$$E_1 := \frac{1}{e^{\alpha}}T_1, \quad E_2 := \frac{1}{e^{\alpha}}T_2, \quad E_3 := \frac{1}{e^{\alpha}}N_1, \quad E_4 := \frac{1}{e^{\alpha}}N_2$$

とおく. このとき (E_1, E_2, E_3, E_4) は $F(U)$ の各点での接空間の向きを与える順序づけられた正規直交基底を与える. そして (16) を

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{E_1}E_1 &= (e^{-\alpha})_v E_2 + \frac{\mu_1}{e^{\alpha}}E_3 + \frac{\mu_2}{e^{\alpha}}E_4, \\
\overline{\nabla}_{E_1}E_2 &= -(e^{-\alpha})_v E_1 - \frac{\mu_2}{e^{\alpha}}E_3 + \frac{\mu_1}{e^{\alpha}}E_4, \\
\overline{\nabla}_{E_2}E_1 &= -(e^{-\alpha})_u E_2 - \frac{\mu_2}{e^{\alpha}}E_3 + \frac{\mu_1}{e^{\alpha}}E_4, \\
\overline{\nabla}_{E_2}E_2 &= (e^{-\alpha})_u E_1 - \frac{\mu_1}{e^{\alpha}}E_3 - \frac{\mu_2}{e^{\alpha}}E_4
\end{aligned} \tag{27}$$

と書き換えることができ, さらに (27) を用いて

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\nabla}_{E_1}E_3\right)^{\top} &= \left(\overline{\nabla}_{E_2}E_4\right)^{\top} = -\frac{\mu_1}{e^{\alpha}}E_1 + \frac{\mu_2}{e^{\alpha}}E_2, \\
\left(\overline{\nabla}_{E_2}E_3\right)^{\top} &= -\left(\overline{\nabla}_{E_1}E_4\right)^{\top} = \frac{\mu_2}{e^{\alpha}}E_1 + \frac{\mu_1}{e^{\alpha}}E_2
\end{aligned} \tag{28}$$

がわかる. (27) および (28) を用いて

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{E_1}\tilde{F} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\overline{\nabla}_{E_1}E_1\right)\wedge E_2 + E_1\wedge\left(\overline{\nabla}_{E_1}E_2\right) + \left(\overline{\nabla}_{E_1}E_3\right)\wedge E_4 + E_3\wedge\left(\overline{\nabla}_{E_1}E_4\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{\mu_1}{e^\alpha}E_3 + \frac{\mu_2}{e^\alpha}E_4\right)\wedge E_2 + E_1\wedge\left(-\frac{\mu_2}{e^\alpha}E_3 + \frac{\mu_1}{e^\alpha}E_4\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left(-\frac{\mu_1}{e^\alpha}E_1 + \frac{\mu_2}{e^\alpha}E_2\right)\wedge E_4 + E_3\wedge\left(-\frac{\mu_2}{e^\alpha}E_1 - \frac{\mu_1}{e^\alpha}E_2\right)\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

がわかり, 同様に $\tilde{\nabla}_{E_2}\tilde{F} = 0$ もわかる. よって $\tilde{F} : M \longrightarrow \tilde{N}$ は水平である. 逆に, $\tilde{F} : M \longrightarrow \tilde{N}$ が水平ならば, (27) および (28) を満たす実数値関数 μ_1, μ_2 が存在することがわかり, 従って $F : M \longrightarrow N$ は等方的極小はめこみで N の向きに適合する. □

2.5.3 4 次元球面に付随するツイスター空間

$N = S^4$ とする. SO(5) は $S^4 \cong \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(4)$ 上の接束 TS^4 に同伴する主 SO(4) 束とみなされる. 従って S^4 に付随するツイスター空間 $\tilde{N} = U\left(\bigwedge^2_+ TS^4\right)$ は, 2.5.1 節の最後の段落における議論を参考にすることで, 等質空間 $\mathrm{SO}(5)/(\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SO}(2))$ とみなされる, 但し SO(4) は

$$
\mathrm{SO}(4) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ 0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{l} a_{ij} \in \boldsymbol{R},\\ a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j} + a_{4i}a_{4j} = \delta_{ij},\\ \det(a_{ij}) = 1 \end{array} \right\}
$$

によって SO(5) の部分群と考えられている. 本節では, $\mathrm{SO}(5)/(\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SO}(2))$ は $\boldsymbol{CP}^3$ と同一視されることについて説明したい. そのために, まず

$$
\mathrm{Sp}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B\\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{l} A, B \in \mathrm{M}(2, \boldsymbol{C}),\\ A\,{}^t\overline{A} + B\,{}^t\overline{B} = I_2,\ A\,{}^tB = B\,{}^tA \end{array} \right\}
$$

の SO(5) への 2 重被覆について説明し, $\mathrm{SO}(5)/(\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SO}(2))$ は $\mathrm{Sp}(2)/(\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1))$ と書き換えられることを説明したい. そして $\mathrm{Sp}(2)/(\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1))$ は $\boldsymbol{CP}^3$ と同一視されることについて説明したい.

SU(4) の各元 A は 4 次元内積空間 X の複素化 $X\otimes\boldsymbol{C}$ の線形変換 T を (19) によって与える. この T は $\bigwedge^2 X$ の複素化 $\bigwedge^2 X\otimes\boldsymbol{C}$ の線形変換 Φ_T を (20) によって与える. $\bigwedge^2 X\otimes\boldsymbol{C}$ を実ベクトル空間とみなしたとき,

$$
\left\{ \left(\sqrt{-1}\right)^i E_{\varepsilon,k} \,\middle|\, i\in\{0,1\},\ k\in\{1,2,3\},\ \varepsilon\in\{+,-\} \right\}
$$

は $\bigwedge^2 X\otimes\boldsymbol{C}$ の基底である. そしてこれが $\bigwedge^2 X\otimes\boldsymbol{C}$ の正規直交基底であるような $\bigwedge^2 X\otimes\boldsymbol{C}$ の内積を考えることができる. $\sqrt{-1}E_{-,1}$, $\sqrt{-1}E_{-,2}$, $\sqrt{-1}E_{-,3}$ が生成する $\bigwedge^2 X\otimes\boldsymbol{C}$ の実 3 次元部分空間を $\sqrt{-1}\bigwedge^2_- X$ で表すとする. このとき $\bigwedge^2 X\otimes\boldsymbol{C}$ の線形変換 Φ_T の実 6

次元部分空間 $\bigwedge_+^2 X \oplus \sqrt{-1}\bigwedge_-^2 X$ への制限は $\bigwedge_+^2 X \oplus \sqrt{-1}\bigwedge_-^2 X$ の線形変換である．そして次が成り立つ:

命題 2.8 T は $X \otimes \boldsymbol{C}$ の線形変換で, SU(4) の元 A を用いて (19) によって与えられているとする．

(a) A が SU(4) の部分群である Sp(2) の元ならば, Φ_T は $E_{+,1}$, $E_{+,2}$, $E_{+,3}$, $\sqrt{-1}E_{-,1}$, $\sqrt{-1}E_{-,3}$ が生成する $\bigwedge_+^2 X \oplus \sqrt{-1}\bigwedge_-^2 X$ の実 5 次元部分空間の直交変換を与える．こうして得られる Sp(2) から SO(5) への準同型は 2 重被覆である (Sp(2) $\cong$ Spin(5)).

(b) A が Sp(2) の部分群である

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -\delta \\ \overline{\beta} & 0 & \overline{\alpha} & 0 \\ 0 & \overline{\delta} & 0 & \overline{\gamma} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \boldsymbol{C}, \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,\ |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \end{array} \right\} \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$$

の元ならば, Φ_T は $E_{+,1}$, $E_{+,3}$, $\sqrt{-1}E_{-,1}$, $\sqrt{-1}E_{-,3}$ が生成する $\bigwedge_+^2 X \oplus \sqrt{-1}\bigwedge_-^2 X$ の実 4 次元部分空間の直交変換を与える．こうして得られる SU(2) × SU(2) から SO(4) への準同型は 2 重被覆である (SU(2) × SU(2) $\cong$ Spin(4)).

証明　まず (b) を示したい．A が Sp(2) の部分群

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \overline{\beta} & 0 & \overline{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha, \beta \in \boldsymbol{C}, \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \end{array} \right\} \cong \mathrm{SU}(2) \tag{29}$$

の元ならば

$$\begin{aligned} &(\Phi_T(E_{+,1})\ \Phi_T(\sqrt{-1}E_{-,1})\ \Phi_T(E_{+,3})\ \Phi_T(\sqrt{-1}E_{-,3})) \\ &= (E_{+,1}\ \sqrt{-1}E_{-,1}\ E_{+,3}\ \sqrt{-1}E_{-,3}) \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\alpha & -\mathrm{Im}\,\alpha & \mathrm{Re}\,\beta & \mathrm{Im}\,\beta \\ \mathrm{Im}\,\alpha & \mathrm{Re}\,\alpha & \mathrm{Im}\,\beta & -\mathrm{Re}\,\beta \\ -\mathrm{Re}\,\beta & -\mathrm{Im}\,\beta & \mathrm{Re}\,\alpha & -\mathrm{Im}\,\alpha \\ -\mathrm{Im}\,\beta & \mathrm{Re}\,\beta & \mathrm{Im}\,\alpha & \mathrm{Re}\,\alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{30}$$

が成り立ち, A が Sp(2) の部分群

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \overline{\delta} & 0 & \overline{\gamma} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \gamma, \delta \in \boldsymbol{C}, \\ |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \end{array} \right\} \cong \mathrm{SU}(2) \tag{31}$$

の元ならば

$$(\Phi_T(E_{+,1})\ \Phi_T(\sqrt{-1}E_{-,1})\ \Phi_T(E_{+,3})\ \Phi_T(\sqrt{-1}E_{-,3}))$$
$$= (E_{+,1}\ \sqrt{-1}E_{-,1}\ E_{+,3}\ \sqrt{-1}E_{-,3}) \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\gamma & -\mathrm{Im}\,\gamma & -\mathrm{Re}\,\delta & \mathrm{Im}\,\delta \\ \mathrm{Im}\,\gamma & \mathrm{Re}\,\gamma & -\mathrm{Im}\,\delta & -\mathrm{Re}\,\delta \\ \mathrm{Re}\,\delta & \mathrm{Im}\,\delta & \mathrm{Re}\,\gamma & \mathrm{Im}\,\gamma \\ -\mathrm{Im}\,\delta & \mathrm{Re}\,\delta & -\mathrm{Im}\,\gamma & \mathrm{Re}\,\gamma \end{pmatrix} \tag{32}$$

が成り立つ. よって A が (b) で与えられている部分群の元ならば, Φ_T は $E_{+,1}$, $E_{+,3}$, $\sqrt{-1}E_{-,1}$, $\sqrt{-1}E_{-,3}$ が生成する部分空間の直交変換を与える. そして連結な実 6 次元 Lie 群 $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)$ から連結な実 6 次元 Lie 群 SO(4) への準同型 Φ を得る. (29) および (31) で与えられている Sp(2) の部分群のそれぞれへの Φ の制限は SO(4) へのうめこみであることが (30) および (32) からわかる. さらに, (29) および (31) で与えられている Sp(2) の部分群の Φ による像は SO(4) の単位元において横断的に交わっていることもわかる. 従って $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)$ の単位元における Φ の微分は全単射である. よって [39, Proposition 3.26] から準同型 $\Phi : \mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(4)$ は被覆写像であることがわかり, 2 重被覆であることもわかる. こうして命題 2.8 の (b) が示された. また A が (b) で与えられている $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)$ に同型な Sp(2) の部分群の元ならば, $\Phi_T(E_{+,2}) = E_{+,2}$ が成り立つ. また

- A が Sp(2) の部分群
$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle|\ \theta \in [0, 2\pi) \right\} \cong \mathrm{SO}(2) \tag{33}$$
の元ならば,
$$(\Phi_T(E_{+,2})\ \Phi_T(E_{+,3})) = (E_{+,2}\ E_{+,3}) \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$
が成り立ちかつ Φ_T は $E_{+,1}$, $\sqrt{-1}E_{-,1}$, $\sqrt{-1}E_{-,3}$ を動かさない;
- A が Sp(2) の部分群
$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sqrt{-1}\sin\theta & 0 & 0 \\ \sqrt{-1}\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sqrt{-1}\sin\theta \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle|\ \theta \in [0, 2\pi) \right\} \tag{34}$$
$$\cong \mathrm{SO}(2)$$
の元ならば,
$$(\Phi_T(E_{+,2})\ \Phi_T(\sqrt{-1}E_{-,3})) = (E_{+,2}\ \sqrt{-1}E_{-,3}) \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$
が成り立ちかつ Φ_T は $E_{+,1}$, $\sqrt{-1}E_{-,1}$, $E_{+,3}$ を動かさない;

- A が Sp(2) の部分群

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in [0, 2\pi) \right\} \cong \mathrm{SO}(2) \tag{35}$$

の元ならば,

$$(\Phi_T(E_{+,1})\ \Phi_T(E_{+,2})) = (E_{+,1}\ E_{+,2}) \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

が成り立ちかつ Φ_T は $\sqrt{-1}E_{-,1}$, $E_{+,3}$, $\sqrt{-1}E_{-,3}$ を動かさない;

- A が Sp(2) の部分群

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & -\sqrt{-1}\sin\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sqrt{-1}\sin\theta & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sqrt{-1}\sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in [0, 2\pi) \right\} \tag{36}$$
$$\cong \mathrm{SO}(2)$$

の元ならば,

$$(\Phi_T(\sqrt{-1}E_{-,1})\ \Phi_T(E_{+,2})) = (\sqrt{-1}E_{-,1}\ E_{+,2}) \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

が成り立ちかつ Φ_T は $E_{+,1}$, $E_{+,3}$, $\sqrt{-1}E_{-,3}$ を動かさない.

以上に現れた SO(2) に同型な Sp(2) の 4 つの部分群の各元は $E_{+,1}$, $E_{+,2}$, $E_{+,3}$, $\sqrt{-1}E_{-,1}$, $\sqrt{-1}E_{-,3}$ が生成する $\bigwedge^2_+ X \oplus \sqrt{-1}\bigwedge^2_- X$ の実 5 次元部分空間の直交変換を与える. Sp(2) は連結である ([31, 系 7.58], [40, 定理 20]) ので, 実 10 次元 Lie 群 Sp(2) は (b) で与えられている $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ に同型な部分群および上述の SO(2) に同型な 4 つの部分群によって生成されていることが [39, Proposition 3.18] を用いてわかる. よって Sp(2) から連結な実 10 次元 Lie 群 SO(5) への準同型 Φ を得る. さらに, Sp(2) の上述の部分群の Φ による像は SO(5) の単位元において横断的に交わっているので, 準同型 $\Phi : \mathrm{Sp}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(5)$ は被覆写像であり, さらに 2 重被覆である. こうして命題 2.8 の (a) が示された. □

参考 SU(3) は

$$\mathrm{SU}(3) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{l} a_{ij} \in \boldsymbol{C}, \\ a_{1i}\overline{a}_{1j} + a_{2i}\overline{a}_{2j} + a_{3i}\overline{a}_{3j} = \delta_{ij}, \\ \det(a_{ij}) = 1 \end{array} \right\} \tag{37}$$

によって SU(4) の部分群であると考えられる. 連結な実 15 次元 Lie 群 SU(4) は (29), (33), (34), (35), (36) および (37) で与えられている部分群によって生成されていることを

用いて, SU(4) の各元 A に対し Φ_T の $\bigwedge^2_+ X \oplus \sqrt{-1}\bigwedge^2_- X$ への制限は $\bigwedge^2_+ X \oplus \sqrt{-1}\bigwedge^2_- X$ の直交変換であることがわかる. このとき SU(4) から SO(6) への準同型 Φ を得る. Φ は被覆写像であり, さらに 2 重被覆である ($\mathrm{SU}(4) \cong \mathrm{Spin}(6)$).

SU(2), SO(2) をそれぞれ (21), (23) によって SO(4) の部分群とみなす. このときこれらは SO(5) の部分群とみなされ, そして命題 2.8 から対応する Sp(2) の部分群が存在することがわかる. SO(5) の部分群である SU(2) に対応する Sp(2) の部分群は (31) のものと 2 元からなる部分群 $\{\pm I_4\}$ の積と表されるものである. SO(5) の部分群である SO(2) に対応する Sp(2) の部分群は U(1) と同型な

$$\left\{\mathrm{diag}\left(e^{\sqrt{-1}\theta},\ e^{-\sqrt{-1}\theta},\ e^{-\sqrt{-1}\theta},\ e^{\sqrt{-1}\theta}\right) \,\middle|\, \theta \in [0, 2\pi)\right\}$$

である. よって $\mathrm{SO}(5)/(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SO}(2))$ は $\mathrm{Sp}(2)/(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1))$ と書き換えられる. また $\mathrm{Sp}(2)/\mathrm{SU}(2)$ は S^7 と同一視され, $\mathrm{Sp}(2)/(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1))$ は $\boldsymbol{C}P^3$ と同一視される.

3 4 次元 Lorentz 空間型内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面

3.1 Gauss, Codazzi および Ricci の方程式

N を連結, 単連結かつ完備な 4 次元 Lorentz 空間型とし, L_0 を N の一定断面曲率とする. $L_0 = 0$ ならば, N は Minkowski 空間 E^4_1 である. $L_0 > 0$ ならば, N は de Sitter 空間 $S^4_1(L_0)$ であり

$$S^4_1(L_0) = \left\{x \in E^5_1 \,\middle|\, \langle x, x\rangle = \frac{1}{L_0}\right\}$$

と表される. $L_0 < 0$ ならば, N は反 de Sitter 空間 $H^4_1(L_0)$ であり

$$H^4_1(L_0) = \left\{x \in E^5_2 \,\middle|\, \langle x, x\rangle' = \frac{1}{L_0}\right\}$$

と表される, 但し E^5_2 は連結, 単連結, 完備かつ平坦な 5 次元擬 Riemann 空間型であり $\boldsymbol{R}^5$ と微分同相で不定値計量

$$\langle x, y\rangle' := x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 - x^4y^4 - x^5y^5$$

を持つ. N の計量を $\langle\ ,\ \rangle$ で表す.

M を向きづけられた 2 次元多様体とする. $F : M \longrightarrow N$ は M の N への空間的はめこみで, 平均曲率ベクトルが零であるとする. このとき F の光的法ベクトル場 $\tilde{\iota}$, $\tilde{\nu}$ で $\langle\tilde{\iota}, \tilde{\nu}\rangle = -1$ を満たすものが存在する. 以下, $\tilde{\iota}$ および $\tilde{\nu}$ に関する F の主曲率は零にはならないとする. このとき $\tilde{\iota}$ に関する主曲率は恒等的に ± 1 に等しいと仮定してよい. $\tilde{e}'_1$, $\tilde{e}'_2$ は M の各点の近傍 U 上のベクトル場で,

- $(\tilde{e}'_1, \tilde{e}'_2)$ は F による誘導計量 $\tilde{g}$ に関する正規直交枠で M の向きを与え,

- $A_{\tilde{\imath}}(\tilde{e}'_1) = \tilde{e}'_1$, $A_{\tilde{\imath}}(\tilde{e}'_2) = -\tilde{e}'_2$ を満たす ($A_{\tilde{\imath}}$ は $\tilde{\imath}$ に関する F の型作用素である)

とする. $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ は U 上のベクトル場で,

- $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ は $\tilde{g}$ に関する正規直交枠で M の向きを与え,
- $A_{\tilde{\nu}}(\tilde{e}_1) = e^{-4\phi}\tilde{e}_1$, $A_{\tilde{\nu}}(\tilde{e}_2) = -e^{-4\phi}\tilde{e}_2$ を満たす (但し ϕ は U 上の関数である)

とする. θ は U 上の関数で,

$$\tilde{e}'_1 = (\cos\theta)\tilde{e}_1 + (\sin\theta)\tilde{e}_2, \quad \tilde{e}'_2 = -(\sin\theta)\tilde{e}_1 + (\cos\theta)\tilde{e}_2 \tag{38}$$

を満たすとする. このとき $A_{\tilde{\imath}}(\tilde{e}'_\imath) = (-1)^{\imath-1}\tilde{e}'_\imath$ および (38) を用いて, 次を得る:

$$A_{\tilde{\imath}}(\tilde{e}_1) = (\cos 2\theta)\tilde{e}_1 + (\sin 2\theta)\tilde{e}_2, \quad A_{\tilde{\imath}}(\tilde{e}_2) = (\sin 2\theta)\tilde{e}_1 - (\cos 2\theta)\tilde{e}_2. \tag{39}$$

$L_0 = 0$ ならば $N = E^4_1$ であるので, $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{\imath}$, $\tilde{\nu}$ は U 上の E^4_1-値関数である. $L_0 \neq 0$ ならば, F, $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{\imath}$, $\tilde{\nu}$ は U 上の $\boldsymbol{R}^5$-値関数である. (39) を用いて,

$$\begin{aligned}
&(dF\ d\tilde{e}_1\ d\tilde{e}_2\ d\tilde{\imath}\ d\tilde{\nu}) \\
&= (F\ \tilde{e}_1\ \tilde{e}_2\ \tilde{\imath}\ \tilde{\nu}) \begin{pmatrix} 0 & -L_0\tilde{\omega}^1_0 & -L_0\tilde{\omega}^2_0 & 0 & 0 \\ \tilde{\omega}^1_0 & 0 & -\tilde{\omega}^2_1 & -\tilde{\omega}_{2\theta} & -e^{-4\phi}\tilde{\omega}^1_0 \\ \tilde{\omega}^2_0 & \tilde{\omega}^2_1 & 0 & -\tilde{\omega}'_{2\theta} & e^{-4\phi}\tilde{\omega}^2_0 \\ 0 & -e^{-4\phi}\tilde{\omega}^1_0 & e^{-4\phi}\tilde{\omega}^2_0 & \beta & 0 \\ 0 & -\tilde{\omega}_{2\theta} & -\tilde{\omega}'_{2\theta} & 0 & -\beta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{40}$$

を得る, 但し

- $(\tilde{\omega}^1_0, \tilde{\omega}^2_0)$ は $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ の双対枠であり,
- $\tilde{\omega}_{2\theta} := (\cos 2\theta)\tilde{\omega}^1_0 + (\sin 2\theta)\tilde{\omega}^2_0$, $\tilde{\omega}'_{2\theta} := (\sin 2\theta)\tilde{\omega}^1_0 - (\cos 2\theta)\tilde{\omega}^2_0$ であり,
- $\tilde{\omega}^2_1$, β は U 上の 1-形式である.

$ddF = 0$, $dd\tilde{e}_i = 0$, $dd\tilde{\imath} = 0$, $dd\tilde{\nu} = 0$ および (40) を用いて, Gauss-Codazzi-Ricci の方程式

$$\begin{aligned}
\tilde{K} &= 2e^{-4\phi}\cos 2\theta + L_0, \\
\beta &= 2*\tilde{\omega}^2_1 + 4d\phi = -2*\tilde{\omega}^2_1 - 2*d\theta, \\
d\beta &= -2e^{-4\phi}\sin 2\theta\,\tilde{\omega}^1_0 \wedge \tilde{\omega}^2_0
\end{aligned} \tag{41}$$

を得る, 但し $\tilde{K}$ は $\tilde{g}$ の曲率である.

3.2 光的法ベクトル場に関する主曲率が零ではない場合の特徴づけ

(u, v) は U 上の等温座標系で, M の向きを与えるとする. このとき $\tilde{g}$ を $\tilde{g} = \lambda^2(du^2+dv^2)$ と表すことができる, 但し λ は U 上の正値関数である. (41) の第二式から, $d\beta = 2d{*}\tilde{\omega}^2_1 = -d{*}d\theta$ を得る. よって (41) の第三式を用いて,

$$\frac{1}{\lambda^2}(\theta_{uu} + \theta_{vv}) = \frac{2}{e^{4\phi}}\sin 2\theta \tag{42}$$

を得る. (41) の第二式から,

$$\tilde{\omega}_1^2 = *d\phi - \frac{1}{2}d\theta \tag{43}$$

を得る. よって (41) の第一式および (43) を用いて,

$$\frac{1}{\lambda^2}(\phi_{uu} + \phi_{vv}) = -\frac{2}{e^{4\phi}}\cos 2\theta - L_0 \tag{44}$$

を得る. $\hat{\omega}_0^1 := \lambda du$, $\hat{\omega}_0^2 := \lambda dv$ とおく. t は U 上の関数で

$$\tilde{\omega}_0^1 = (\cos t)\hat{\omega}_0^1 + (\sin t)\hat{\omega}_0^2, \qquad \tilde{\omega}_0^2 = -(\sin t)\hat{\omega}_0^1 + (\cos t)\hat{\omega}_0^2$$

を満たすとする. このとき $\tilde{\omega}_1^2 = dt + \left(\hat{l}_1\hat{\omega}_0^1 + \hat{l}_2\hat{\omega}_0^2\right)$ を示すことができる, 但し $\hat{l}_1$, $\hat{l}_2$ は (u, v) の座標曲線の測地的曲率である. この式と (43) から,

$$dt + \left(\hat{l}_1\hat{\omega}_0^1 + \hat{l}_2\hat{\omega}_0^2\right) = *d\phi - \frac{1}{2}d\theta \tag{45}$$

を得る. よって

$$-\frac{1}{\lambda^2}((\log\lambda)_{uu} + (\log\lambda)_{vv})\tilde{\omega}_0^1 \wedge \tilde{\omega}_0^2 = \tilde{K}\tilde{\omega}_0^1 \wedge \tilde{\omega}_0^2 = -d*d\phi$$

が成り立つ. このとき $h := \log\lambda - \phi$ は $h_{uu} + h_{vv} = 0$ を満たす. よって等温座標系 (u, v) を選んで $\lambda = e^{\phi}$ が成り立つようにできる. よって (44) および (42) をそれぞれ

$$\phi_{uu} + \phi_{vv} = -\frac{2}{e^{2\phi}}\cos 2\theta - L_0 e^{2\phi}, \qquad \theta_{uu} + \theta_{vv} = \frac{2}{e^{2\phi}}\sin 2\theta \tag{46}$$

と書き換えることができる. また $\lambda = e^{\phi}$ から $*d\phi = \hat{l}_1\hat{\omega}_0^1 + \hat{l}_2\hat{\omega}_0^2$ がわかるので, (45) から $d(\theta + 2t) = 0$ を得る. よって $t = -\theta/2$ としてよい.

ϕ, θ は $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D 上の 2 変数 u, v の関数で (46) を満たすとする. そして

$$\tilde{\omega}_0^1 := e^{\phi}(\cos(\theta/2)du - \sin(\theta/2)dv), \quad \tilde{\omega}_0^2 := e^{\phi}(\sin(\theta/2)du + \cos(\theta/2)dv),$$
$$\tilde{\omega}_1^2 := *d\phi - \frac{1}{2}d\theta, \quad \beta := 2d\phi - *d\theta$$

とおく. このとき, 線形過剰決定系の解の存在および一意性についての議論から, $L_0 = 0$ ならば D の各点 a の近傍上で (40) を満たす $\boldsymbol{R}^4$-値関数 F, $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{\iota}$, $\tilde{\nu}$ が存在し, また $L_0 \neq 0$ ならば同様の $\boldsymbol{R}^5$-値関数 F, $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{\iota}$, $\tilde{\nu}$ が存在することがわかり, そして a での初期値に対しこれらは一意であることがわかる. さらに, 初期値および a の近傍 U を選ぶことで, 以下のような F, $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{\iota}$, $\tilde{\nu}$ を見出すことができる:

- $F : U \longrightarrow N$ は空間的はめこみで平均曲率ベクトルが零である;
- F による誘導計量 $\tilde{g}$ は $\tilde{g} = e^{2\phi}(du^2 + dv^2)$ で与えられそして $\tilde{g}$ の曲率 $\tilde{K}$ は L_0 と異なる;
- $\tilde{\iota}$, $\tilde{\nu}$ は F の光的法ベクトル場で $\langle\tilde{\iota}, \tilde{\nu}\rangle = -1$ を満たす;

- $\tilde{\iota}$, $\tilde{\nu}$ に関する F の主曲率はそれぞれ ± 1, $\pm e^{-4\phi}$ である.

以上のようにして, 次を得ることができる:

定理 3.1 ([12]) $(M, \tilde{g})$ を 2 次元 Riemann 多様体とし, $\tilde{g}$ の曲率 $\tilde{K}$ は実数 L_0 とは異なるとする. $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ は M 上の二つの 1 次元分布で, M の任意の点で $\tilde{g}$ に関して直交しているとする. このとき次の (a), (b) は同値である:

(a) M の各点の近傍の N への等長はめこみで, 平均曲率ベクトルが零でありかつ $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ が光的法ベクトル場 $\tilde{\nu}$ に関する主方向を与えるようなものが存在する;

(b) M の各点の近傍上のある等温座標系 (u, v) およびある関数 ϕ, θ が $\tilde{g} = e^{2\phi}(du^2 + dv^2)$, $\cos(\theta/2)\partial/\partial u - \sin(\theta/2)\partial/\partial v \in \mathfrak{D}_1$ および (46) を満たす.

さらに, これら (a), (b) が成り立つならば,

- (a) に現れるはめこみは N の等長変換との合成を除いて計量 $\tilde{g}$ および 1 次元分布 $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ によって一意に決まり,
- θ は $\theta \in (-\pi/4, \pi/4)$ または $\theta \in (\pi/4, 3\pi/4)$ を満たすと仮定でき,
- $\tilde{\iota}$ は (a) に現れるはめこみの光的法ベクトル場で $\langle \tilde{\iota}, \tilde{\nu} \rangle = -1$ を満たすとするとき, $\cos(\theta/2)\partial/\partial u + \sin(\theta/2)\partial/\partial v$ は $\tilde{\iota}$ に関する主方向を与え,
- $\tilde{\iota}$ に関する主曲率の一つと $\tilde{\nu}$ に関する主曲率の一つの積は $\pm 1/e^{4\phi}$ に等しい.

注意 定理 3.1 の (a) のようなはめこみが定める正則 4 次微分 Q は $Q \neq 0$ を満たす. (u, v) を定理 3.1 の (b) のような等温座標系とするとき, (7) を用いて $Q = \pm(1/2)dw \otimes dw \otimes dw \otimes dw$ が成り立つことがわかる.

参考 定理 2.2 の条件 (b) および定理 3.1 の条件 (b) は 2 次元多様体上の Riemann 計量と 1 次元分布の関係を述べているものである. 従って定理 2.2 および定理 3.1 は誘導計量とある法ベクトル場に関する主分布の関係による特徴づけを与えている. こうした形の結果は 3 次元 Riemann 空間型内の曲面に対しても得られている. 3 次元 Riemann 空間型内の曲面で臍点を持たずかつ主曲率が零にはならないものの上では, Gauss の方程式および Codazzi の方程式から導かれる $F_u = \alpha + \beta e^F$, $F_v = \gamma + \delta e^{-F}$ という形の過剰決定系を考えることができる. この過剰決定系の解の集合は曲面上の誘導計量および主分布によって決まり, 主曲率を与える関数は系の解から得られる. 系が別の解を持つならば, その解に対応する曲面を考えることができ, その曲面は元の曲面と合同ではないが主分布が対応するように等長である. 上の過剰決定系が整合条件を満たすとする. このとき系の解の集合は関数の 1 径数族である. 空間が E^3 ならば, 系の各解に対応する曲面は**モールディング** (*molding*) であると言われ, 曲率線の族の一つが測地線からなるという性質を持つ ([20, pp. 152–153], [18, pp. 277–281], [10]). モールディングな曲面は**主方向平行** (*parallel curved*) であることがわかる, つまり E^3 内のある平面 P が存在して曲面の各点でのある主方向が P に平行である ([2]). 空間が平坦ではないならば, 曲面上の過剰決定系の整合条件から必ずしも測地線からなる曲率線の族の存在は導かれない ([11]). 曲面上の

過剰決定系が整合条件を満たさないとする. このとき系は高々二つの解を持つ. 系がちょうど二つの解を持つための条件が得られていて ([9], [11]), 零ではない一定平均曲率を持つ曲面上の過剰決定系が整合条件を満たさないならば系はちょうど二つの解を持つ. また系が「重解」を持つための条件が得られていて ([7], [11]), 極小曲面上の過剰決定系が整合条件を満たさないならば系は「重解」を持つ.

3.3 共形 Gauss 写像

元々の共形 Gauss 写像は S^3 内の向きづけられた曲面から 4 次元 de Sitter 空間 $S_1^4 = S_1^4(1)$ への共形写像である ([17]). 曲面の非臍点の集合上では共形 Gauss 写像は空間的はめこみであり, このはめこみの平均曲率ベクトルが零であることと元の曲面が Willmore であることは同値である ([17]). 他の幾つかの 3 次元空間内の空間的曲面に対しても 4 次元 Lorentz 空間型への共形写像として共形 Gauss 写像を定義することができ, 4 次元 Lorentz 空間型への空間的はめこみで平均曲率ベクトルが零であるものの殆どは共形 Gauss 写像の観点で特徴づけることができる ([14]). 以下において, これらについて説明する.

まず

$$L^+ := \{x = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) \in E_1^5 \mid \langle x, x\rangle = 0,\ x^5 > 0\}$$

とおく. このとき S^3 を $L^+ \cap \{x^5 = 1\}$ とみなすことができる. M を向きづけられた 2 次元多様体とし, $\iota : M \longrightarrow S^3$ を M の S^3 へのはめこみとする. このとき ι を M 上の L^+-値関数とみなすことができる. e_3 を ι の S^3 における単位法ベクトル場とする. e_3 の向きを M および S^3 の向きを踏まえて自然に定め, H を e_3 に関する ι の平均曲率とする. E_1^5 において e_3 と $H\iota$ の和 $e_3 + H\iota$ を考えることができ, そして $e_3 + H\iota$ は S_1^4 に値をとることがわかる. $\gamma_\iota := e_3 + H\iota$ とおく. $\mathrm{Reg}\,(\iota)$ を ι の非臍点からなる集合とする. $\mathrm{Reg}\,(\iota)$ は M の開集合であり, $\gamma_\iota|_{\mathrm{Reg}\,(\iota)}$ は S_1^4 への空間的はめこみでその誘導計量 $\tilde{g}$ は $\tilde{g} = (H^2 - K + 1)g$ で与えられる, 但し g は ι による誘導計量であり K は g の曲率である. $\gamma_\iota : M \longrightarrow S_1^4$ を $\iota : M \longrightarrow S^3$ の **共形 Gauss 写像** (*conformal Gauss map*) という.

M 上の L^+-値関数である ι は S_1^4 への空間的はめこみ $\gamma_\iota|_{\mathrm{Reg}\,(\iota)}$ の光的法ベクトル場を与える. ι に関する $\gamma_\iota|_{\mathrm{Reg}\,(\iota)}$ の型作用素のトレースは零である. ν は $\gamma_\iota|_{\mathrm{Reg}\,(\iota)}$ の光的法ベクトル場で $\langle \nu, \iota\rangle = -1$ を満たすとする. このとき ν に関する $\gamma_\iota|_{\mathrm{Reg}\,(\iota)}$ の型作用素のトレースは $-(1/\varepsilon^2)(\Delta H + 2\varepsilon^2 H)$ に等しい, 但し $\varepsilon := \sqrt{H^2 - K + 1}$ であり Δ は g に関する M 上の Laplacian である. S^3 内の Willmore 曲面に対する Euler-Lagrange 方程式は $\Delta H + 2\varepsilon^2 H = 0$ で与えられるので, 次を得る:

定理 3.2 ([17]) M の S^3 へのはめこみ ι が Willmore であることと $\mathrm{Reg}\,(\iota)$ の S_1^4 への空間的はめこみ $\gamma_\iota|_{\mathrm{Reg}\,(\iota)}$ の平均曲率ベクトルが零であることは同値である.

以上と同様に考えることにより, M の 3 次元 Euclid 空間 $E^3 = L^+ \cap \{x^5 = x^1 + 1\}$ または 3 次元双曲空間 $H^3 = L^+ \cap \{x^1 = 1\}$ へのはめこみ ι の共形 Gauss 写像 $\gamma_\iota : M \longrightarrow S_1^4$ を定義でき, ι の値域を E^3 または H^3 に置き換えることで定理 3.2 の類似物を得ることができる ([14]). また

$$L := \{x = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) \in E_2^5 \mid \langle x, x\rangle' = 0\}$$

とおくとき, M の 3 次元 de Sitter 空間 $S_1^3 = L \cap \{x^5 = 1\}$, 3 次元 Minkowski 空間 $E_1^3 = L \cap \{x^5 = x^1 + 1\}$ または 3 次元反 de Sitter 空間 $H_1^3 = L \cap \{x^1 = 1\}$ への空間的はめこみ ι の共形 Gauss 写像 $\gamma_\iota : M \longrightarrow H_1^4 = H_1^4(1)$ を定義でき, ι の値域を S_1^3, E_1^3 または H_1^3 に置き換えそして S_1^4 を H_1^4 に置き換えることで定理 3.2 の類似物を得ることができる ([14]). また 4 次元 Minkowski 空間 E_1^4 の計量 $\langle\ ,\ \rangle$ は

$$\langle x, y\rangle = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 - x^4y^4$$

$(x = (x^1, x^2, x^3, x^4), y = (y^1, y^2, y^3, y^4) \in E_1^4)$ で与えられるが, E_1^4 において

$$L^+ := \{x = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in E_1^4 \mid \langle x, x\rangle = 0,\ x^4 > 0\}$$

とおくとき, M の $L^+ \subset E_1^4$ への空間的はめこみ ι の共形 Gauss 写像 $\gamma_\iota : M \longrightarrow E_1^4$ を定義でき, ι の値域を $L^+ \subset E_1^4$ に, S_1^4 を E_1^4 に置き換えそして ι が Willmore であることを ι が $\Delta H - 2\varepsilon^2 = 0$ を満たすという条件に置き換えることで定理 3.2 の類似物を得ることができる ([14]), 但し ε は二つの主曲率の差の 1/2 倍である.

$\gamma : M \longrightarrow S_1^4$ は空間的はめこみで, その平均曲率ベクトルは零であるとする. さらに γ の光的法ベクトル場 ι に関する主曲率は零にはならないとする. $\iota^5 \equiv 1$ を仮定でき, このとき ι は M の $S^3 = L^+ \cap \{x^5 = 1\}$ へのはめこみである. H は M 上の関数で, $(\gamma - H\iota)^5 \equiv 0$ を満たすとする. このとき $e := \gamma - H\iota$ ははめこみ $\iota : M \longrightarrow S^3$ の単位法ベクトル場であり, H は ι の e に関する平均曲率である. ι の共形 Gauss 写像は γ または $-\gamma$ に等しく, 従って ι は Willmore はめこみである. 同様の議論が, S^3 を E^3 または H^3 に置き換えても M の各点の近傍上で成り立つ; また S_1^4 を H_1^4 にそして S^3 を S_1^3, E_1^3 または H_1^3 に置き換えても成り立つ; また S_1^4 を E_1^4 に, S^3 を $L^+ \subset E_1^4$ に置き換えそして ι が Willmore であることを ι が $\Delta H - 2\varepsilon^2 = 0$ を満たすという条件に置き換えても成り立つ ([14]).

3.4 正則 4 次微分

S^3 内の Willmore 曲面上にはある正則 4 次微分が定義される ([17]). その方法を参考にすることで, 定理 3.2 の類似物が成り立つ曲面上にも正則 4 次微分を定義することができる ([14]). それらの曲面の共形 Gauss 写像を非臍点の集合に制限したものは 4 次元 Lorentz 空間型への空間的はめこみで平均曲率ベクトルが零であるので, 1.2 節で見たように曲面上に正則 4 次微分が定義され, そして上述の正則 4 次微分と定数倍を除いて等しい ([14]). 以下において, これらについて説明する.

M を Riemann 面とする. 共形はめこみ $\iota : M \longrightarrow S^3$ に対し, M 上の 4 次共変テンソル場 Ξ を

$$\Xi := 2h \otimes \mathrm{Hess}_H + (H^2 + 1)h \otimes h - 2dH \otimes \nabla h \tag{47}$$

で定める, 但し h は ι の第二基本形式でありまた Hess_H は ι による誘導計量 g の Levi-Civita 接続に関する ι の平均曲率 H の Hessian である. Ξ を M 上の接束の複素化上に拡張したものも Ξ で表す.

命題 3.3 ([17]) $\iota : M \longrightarrow S^3$ が共形的な Willmore はめこみならば, M 上の複素 4 次微分

$$\tilde{Q} := \Xi\left(\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial w}\right) dw \otimes dw \otimes dw \otimes dw$$

は正則である, 但し w は M の局所複素座標である.

ι の値域を E^3 または H^3 に置き換えかつ (47) の右辺第 2 項の H^2+1 を H^2 または H^2-1 に置き換えることで, 命題 3.3 の類似物を得ることができる ([14]). また ι の値域を S^3_1, E^3_1 または H^3_1 に置き換えかつ (47) の右辺第 2 項の H^2+1 を $-H^2+1$, $-H^2$ または $-H^2-1$ に置き換えることで, 命題 3.3 の類似物を得ることができる ([14]). また ι の値域を $L^+ \subset E^4_1$ に置き換え ι は共形はめこみで $\Delta H - 2\varepsilon^2 = 0$ を満たすとし, そして (47) の右辺第 2 項の H^2+1 を $-2H$ に置き換えることで, 命題 3.3 の類似物を得ることができる ([14]).

Riemann 面 M の S^4_1 への共形はめこみで平均曲率ベクトルが零でありかつある光的法ベクトル場に関する主曲率が零にはならないものは, 共形 Gauss 写像を通してちょうど M の S^3 への Willmore はめこみで臍点を持たないものに対応する. 1.2 節で見たように前者のようなはめこみは M 上に正則 4 次微分 Q を定め, また本節で見たように後者のようなはめこみも M 上に正則 4 次微分 $\tilde{Q}$ を定める. Q および $\tilde{Q}$ の定義の方法は互いに全く異なるように見えるが, 次が成り立つ:

定理 3.4 ([14]) $\iota : M \longrightarrow S^3$ が共形的な Willmore はめこみならば, S^4_1 への共形はめこみ $F := \gamma_\iota|_{\mathrm{Reg}(\iota)}$ が定める正則 4 次微分 Q は ι が定める正則 4 次微分 $\tilde{Q}$ に定数倍を除いて等しい.

E^3, H^3, S^3_1, E^3_1 および H^3_1 への共形的な Willmore はめこみおよび $L^+ \subset E^4_1$ への共形はめこみで $\Delta H - 2\varepsilon^2 = 0$ を満たすものに対し, 定理 3.4 の類似物が成り立つ ([14]).

4 Kähler 曲面内の極小曲面

4.1 Kähler 曲面内の複素曲線および等方的極小曲面

N を Kähler 曲面 (実 4 次元 Kähler 多様体) とする. $\bar{I}$ を N の複素構造とし, $\bar{g}$ を N の Kähler 計量とする. 従って $\bar{g}$ は複素多様体 $(N, \bar{I})$ の Hermite 計量であり, $\bar{I}$ は $\bar{g}$ の Levi-Civita 接続 $\bar{\nabla}$ に関して平行である.

(z^1, z^2) を $(N, \bar{I})$ の局所複素座標とし, $z^i := x^i + \sqrt{-1}y^i$ とおく. N は向きづけ可能であるが, N の向きは $(\partial/\partial x^1, \partial/\partial y^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial y^2)$ によって与えられるとする.

M を連結な Riemann 面とし, I を M の複素構造とする. $F : M \longrightarrow N$ を M の N への共形はめこみとする. M の点 x が F に関して <u>**複素**</u> (*complex*) であるとは, T_xM 上 $\bar{I} \circ dF = dF \circ I$ が成り立つときにいう. 従って F が正則であることは M の任意の点が F に関して複素であることと同値である.

共形はめこみ F が等方的極小はめこみで N の向きに適合するとする. このとき, $x \in M$ が F に関する複素点ならば, x で $\bar{I}(\bar{\nabla}_{T_1}T_1) = \bar{\nabla}_{T_1}T_2$ が成り立つ, 但し $T_1 = dF(\partial/\partial u)$,

$T_2 = dF(\partial/\partial v)$ でありまた $w = u + \sqrt{-1}v$ は M の局所複素座標である. このことに注意することで, 次を得る:

定理 4.1 ([13]) $(N, \overline{g}, \overline{I})$ を Kähler 曲面とする. M を連結な Riemann 面とし, $F : M \longrightarrow N$ を共形はめこみとする. このとき次の (a), (b) は同値である:

(a) F は複素構造 $\overline{I}$ に関して正則である;

(b) F は実解析的な等方的極小はめこみで N の向きに適合し, かつ F に関する複素点が存在する.

注意 定理 4.1 の (b) において, F に関する複素点の存在についての条件を除くことはできない: $\boldsymbol{CP}^2$, $\boldsymbol{CH}^2$, $\boldsymbol{CP}^1 \times \boldsymbol{CP}^1$ および $\boldsymbol{CH}^1 \times \boldsymbol{CH}^1$ には実解析的, 全測地的な全実曲面が存在する. また 全測地的ではない全実曲面 (一般化された Clifford トーラス) が知られている ([33]). さらに, Jacobi の楕円関数を用いて S^5 への水平な極小はめこみを考えることにより, 全測地的ではない全実曲面が構成された ([21]). S^5 への水平な極小はめこみについては [26] を参考にできる.

定理 4.1 の (a) から (b) が得られることについては, 2.5.2 節で説明したツイスター空間の観点からも説明することができる. 本節の残りにおいてこのことについて説明したい.

X を向きづけられた 4 次元内積空間とし, ω を $U(\bigwedge^2_+ X)$ の元とする. $\Xi([e]) = \omega$ を満たす $\mathcal{B}_X$ の各元 $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ に対し, $\overline{I}(e_1) := e_2$ とおく. 固定された ω に対し e_1 は X の任意の単位ベクトルで有り得るので, X の直交変換 $\overline{I}$ を得る. $-\overline{I} \circ \overline{I}$ は X の恒等変換なので, $\overline{I}$ は X の複素構造である. また $e_4 = \overline{I}(e_3)$ が成り立つ. 以下, X の直交変換である複素構造を **直交複素構造** (*orthogonal complex structure*) とよび, X の直交複素構造 $\overline{I}$ が **X の向きに適合する** とは X の単位ベクトル e および e, $\overline{I}(e)$ と直交する単位ベクトル $e^{\perp}$ に対し $(e, \overline{I}(e), e^{\perp}, \overline{I}(e^{\perp})) \in \mathcal{B}_X$ が成り立つときにいうことにする. 従って $\omega \in U(\bigwedge^2_+ X)$ は X の向きに適合する直交複素構造を定める. $\overline{I}$ を X の向きに適合する直交複素構造とするとき, $\omega := \left(1/\sqrt{2}\right)\left(e \wedge \overline{I}(e) + e^{\perp} \wedge \overline{I}(e^{\perp})\right)$ は $U(\bigwedge^2_+ X)$ の元でありそして ω は e, $e^{\perp}$ の取り方に依らず $\overline{I}$ によって決まることがわかる. 以上から, $U(\bigwedge^2_+ X)$ は X の向きに適合する直交複素構造の集合と同一視できることがわかった.

参考 向きづけられた 4 次元 Riemann 多様体 N に付随するツイスター空間 $\tilde{N}$ を本稿では $U(\bigwedge^2_+ TN)$ とした. N 内の曲線の水平なリフトの接線を用いて, $U(\bigwedge^2_{\pm} TN)$ の各々の上の 4 次元分布 $\tilde{\mathfrak{D}}$ を構成できる. このとき $U(\bigwedge^2_{\pm} TN)$ の各々の概複素構造 $\tilde{I}$ で $\tilde{\mathfrak{D}}$ および $U(\bigwedge^2_{\pm} TN)$ の各ファイバーの各点での接平面を保つものが存在する. さらに, このような概複素構造 $\tilde{I}$ として, $U(\bigwedge^2_{\pm} TN)$ の各点 $\tilde{y}$ での $\tilde{I}$ の $\tilde{\mathfrak{D}}$ への制限が $\tilde{y}$ に対応する直交複素構造を与えるものを選ぶことができる. $U(\bigwedge^2_{\pm} TN)$ の各々の概複素構造で以上の条件を満たすものは二つ存在する. そのうちのある一つが $U(\bigwedge^2_+ TN)$ (および $U(\bigwedge^2_- TN)$) の積分可能な概複素構造であることと N が反自己双対 (および自己双対) である, つまり N の Weyl の共形曲率テンソル W が $W_+ = 0$ (および $W_- = 0$) を満たすことは同値であることが知られている ([15]). また Riemann 面 M の N への共形はめこみ F がこの概複素構造に関する正則なリフトを持つ極小はめこみであることと F が定理 2.7 の (a), (b) のいずれかを満たすことは同値であることが知られている ([23]).

N を向きづけられた 4 次元 Riemann 多様体とする. $\overline{I}$ は N の概複素構造で, N の各点 y で T_yN の向きに適合する直交複素構造を与えるとする. このとき N の計量 $\overline{g}$ は概複素多様体 $(N, \overline{I})$ の Hermite 計量である. $\overline{I}$ は N に付随するツイスター空間 $\tilde{N}$ の切断とみなされる. 従って N の各点の近傍上で N の向きを与える正規直交枠 (E_1, E_2, E_3, E_4) が存在して, $\overline{I}$ は局所的に $\left(1/\sqrt{2}\right)(E_1 \wedge E_2 + E_3 \wedge E_4)$ と表される. $(E_1^*, E_2^*, E_3^*, E_4^*)$ を (E_1, E_2, E_3, E_4) の双対枠とする. このとき $(N, \overline{I})$ の Hermite 計量 $\overline{g}$ の Kähler 形式 Ω は

$$\Omega = E_1^* \wedge E_2^* + E_3^* \wedge E_4^* \tag{48}$$

と局所的に表される.

$\overline{I}$ が $\overline{g}$ の Levi-Civita 接続 $\overline{\nabla}$ に関して平行であるとする. このとき Ω も平行である. 1-形式 ω_j^i を $\overline{\nabla} E_j = \sum_{i=1}^4 \omega_j^i E_i$ で定める. このとき $\omega_i^j = -\omega_j^i$ が成り立つ. そして

$$0 = (\overline{\nabla}\Omega)(E_k, E_l) = -\Omega(\overline{\nabla}E_k, E_l) - \Omega(E_k, \overline{\nabla}E_l) \tag{49}$$

であるが, (48) を用いることで $(k, l) = (1, 4)$, $(2, 3)$ ならば (49) から $\omega_1^3 = \omega_2^4$ がわかり, $(k, l) = (1, 3)$, $(2, 4)$ ならば (49) から $\omega_1^4 = -\omega_2^3$ がわかる ($(k, l) = (1, 2)$, $(3, 4)$ ならば (49) は自明な式である). よって

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}(E_1 \wedge E_2 + E_3 \wedge E_4) \\
&= \left(\overline{\nabla}E_1\right) \wedge E_2 + E_1 \wedge \left(\overline{\nabla}E_2\right) + \left(\overline{\nabla}E_3\right) \wedge E_4 + E_3 \wedge \left(\overline{\nabla}E_4\right) \\
&= (\omega_1^3 E_3 + \omega_1^4 E_4) \wedge E_2 + E_1 \wedge (\omega_2^3 E_3 + \omega_2^4 E_4) \\
&\qquad + (\omega_3^1 E_1 + \omega_3^2 E_2) \wedge E_4 + E_3 \wedge (\omega_4^1 E_1 + \omega_4^2 E_2) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{50}$$

を得る. 逆に, $\tilde{\nabla}(E_1 \wedge E_2 + E_3 \wedge E_4) = 0$ を仮定するとき, (50) と同様の計算を行なうことで $\omega_1^3 = \omega_2^4$ および $\omega_1^4 = -\omega_2^3$ を得ることができ, 従って $\overline{\nabla}\Omega = 0$ がわかりそして $\overline{I}$ が $\overline{\nabla}$ に関して平行であることがわかる. こうして N の概複素構造 $\overline{I}$ が $\overline{\nabla}$ に関して平行であることと $\tilde{\nabla}(E_1 \wedge E_2 + E_3 \wedge E_4) = 0$ は同値であることがわかった.

$(N, \overline{g}, \overline{I})$ を Kähler 曲面とする. M を Riemann 面とし, $F : M \longrightarrow N$ を $\overline{I}$ に関する正則はめこみとする. このとき M 上の接束において $\overline{I} \circ dF = dF \circ I$ が成り立つ. $\tilde{F} : M \longrightarrow \tilde{N}$ を F のリフトとする. このとき任意の $x \in U$ に対し, $\tilde{F}(x)$ は $T_{F(x)}N$ の向きに適合する直交複素構造 $\overline{I}_{F(x)}$ に対応する $U\left(\bigwedge_+^2 T_{F(x)}N\right)$ の元である. $\tilde{F}$ は局所的に (26) のように表され, U 上で $\overline{I}E_1 = E_2$ が成り立つ. $\overline{I}$ は $\overline{\nabla}$ に関して平行であるので, 前段落における結果から $\tilde{\nabla}_{E_1}\tilde{F}$ および $\tilde{\nabla}_{E_2}\tilde{F}$ は零であることがわかる, すなわち $\tilde{F} : M \longrightarrow \tilde{N}$ は水平である. よって定理 2.7 から, F は等方的極小はめこみで N の向きに適合することがわかる. こうして定理 4.1 の (a) から (b) を導くことができる.

4.2 実 4 次元超 Kähler 多様体内の複素曲線および等方的極小曲面

$(N, \overline{g})$ を 4 次元 Riemann 多様体とする. $\overline{I}$, $\overline{J}$, $\overline{K}$ は N の概複素構造で, 次を満たすとする:

(a) $\overline{I}\overline{J} = \overline{K}$;

(b) $\overline{g}$ は $\overline{I}$, $\overline{J}$, $\overline{K}$ に関する Hermite 計量である;

(c) $\overline{I}$, $\overline{J}$, $\overline{K}$ は $\overline{g}$ の Levi-Civita 接続 $\overline{\nabla}$ に関して平行である.

このとき $(N,\overline{g},\overline{I},\overline{J},\overline{K})$ は超 Kähler 多様体である. $S^2=\{(a,b,c)\in \boldsymbol{R}^3 \mid a^2+b^2+c^2=1\}$ の各点 (a,b,c) に対し, $(N,\overline{g},a\overline{I}+b\overline{J}+c\overline{K})$ は Kähler 多様体である. N の向きは複素構造 $a\overline{I}+b\overline{J}+c\overline{K}$ を定める $(a,b,c)\in S^2$ の取り方には依らない.

M を連結な Riemann 面とし, $F:M\longrightarrow N$ を共形はめこみとする. F が等方的極小はめこみで N の向きに適合するならば, ある $(a,b,c)\in S^2$ に対し F は $a\overline{I}+b\overline{J}+c\overline{K}$ に関して正則である. このことは, M 上の S^2-値関数 (a,b,c) を M 上の接束において $(a\overline{I}+b\overline{J}+c\overline{K})\circ dF=dF\circ I$ を満たすものとするとき, 仮定から a, b, c が定数であることを導くことによって示される ([13]). 一方で, [23] を参考にしてツイスター空間の観点からも示される. まず仮定および定理 2.7 から, F のリフト $\tilde{F}$ は水平であることがわかる. M の 1 点 x_0 に対し, $\tilde{F}(x_0)\in U\bigl(\bigwedge_+^2 T_{F(x_0)}N\bigr)$ に対応する $T_{F(x_0)}N$ の向きに適合する直交複素構造はある $(a,b,c)\in S^2$ を用いて $a\overline{I}+b\overline{J}+c\overline{K}$ と表される. N の複素構造 $a\overline{I}+b\overline{J}+c\overline{K}$ は $\overline{\nabla}$ に関して平行でありそして水平なリフトは初期値によって一意に定められるので, M の任意の点 x に対し $\tilde{F}(x)$ に対応する $T_{F(x)}N$ の向きに適合する直交複素構造は上に現れた $(a,b,c)\in S^2$ を用いて $a\overline{I}+b\overline{J}+c\overline{K}$ と表されることがわかる. これは F が $a\overline{I}+b\overline{J}+c\overline{K}$ に関して正則であることを意味する. こうして以上のいずれの方法によっても, 次を得る:

定理 4.2 ([23], [13]) $(N,\overline{g},\overline{I},\overline{J},\overline{K})$ を 4 次元超 Kähler 多様体とする. M を連結な Riemann 面とし, $F:M\longrightarrow N$ を共形はめこみとする. このとき次の (a), (b) は同値である:

(a) ある $(a,b,c)\in S^2$ に対し, F は複素構造 $a\overline{I}+b\overline{J}+c\overline{K}$ に関して正則である;

(b) F は等方的極小はめこみで N の向きに適合する.

4.3 実 4 次元超 Kähler 多様体の特徴づけ

m を正の整数とし, N を $4m$ 次元 Riemann 多様体とする. このとき N のホロノミー群が

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(m)&=\left\{C\in \mathrm{U}(2m)\;\middle|\; {}^tC\begin{pmatrix} O_m & I_m\\ -I_m & O_m\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix} O_m & I_m\\ -I_m & O_m\end{pmatrix}\right\}\\ &=\left\{\begin{pmatrix} A & -B\\ \overline{B} & \overline{A}\end{pmatrix}\;\middle|\; A,B\in \mathrm{M}(m,\boldsymbol{C}),\ \begin{array}{l} A\,{}^t\overline{A}+B\,{}^t\overline{B}=I_m,\\ A\,{}^tB=B\,{}^tA\end{array}\right\}\end{aligned}$$

に含まれることと, N が超 Kähler 多様体である, つまり N の概複素構造 $\overline{I}$, $\overline{J}$, $\overline{K}$ で 4.2 節の冒頭の (a), (b), (c) を満たすものが存在することは同値である. N が Kähler 多様体であるとき, その Kähler 計量の制限ホロノミー群が $\mathrm{SU}(2m)$ に含まれることと計量が Ricci 平坦であることは同値である ([28, Proposition 6.1.1]). $\mathrm{Sp}(m)$ は $\mathrm{SU}(2m)$ の部分群である

ので, 超 Kähler 多様体の計量は Ricci 平坦である. さらに, $\mathrm{Sp}(1) \cong \mathrm{SU}(2)$ なので, 多様体が単連結ならば実 4 次元超 Kähler 多様体はちょうど Ricci 平坦な Kähler 曲面である. また Kähler 曲面 $(N, \overline{g}, \overline{I})$ に対し, N の概複素構造 $\overline{J}$ が存在して $(N, \overline{g}, \overline{I}, \overline{J}, \overline{K})$ (但し $\overline{K} = \overline{IJ}$) が超 Kähler 多様体であることと, N 上の零にはならない正則 2-形式 $\Psi = \psi\, dz^1 \wedge dz^2$ で $|\psi| = \sqrt{\det(\overline{g}_{i\overline{j}})}$ を満たすものが存在することは同値である, 但し $\overline{g}_{i\overline{j}} := \overline{g}(\partial/\partial z^i, \partial/\partial \overline{z}^j)$ である. $K3$-曲面は超 Kähler 構造を許容する ([28, Theorem 7.3.13]).

$(N, \overline{g}, \overline{I})$ を Kähler 曲面とする. このとき N の各点の近傍 V の概複素構造 $\overline{J}$ で, $\overline{IJ} = -\overline{JI}$ が成り立ちかつ $\overline{g}$ が $\overline{J}$ に関する Hermite 計量であるものが存在する. $\overline{K} := \overline{IJ}$ とおくと, $\overline{K}$ は V の概複素構造である. 以下, 複素構造 $\overline{I}$ の **変形** (*deformation*) とは, N の概複素構造で局所的に S^2-値関数 (a, b, c) を用いて $a\overline{I} + b\overline{J} + c\overline{K}$ と表されるものであるとする. $\overline{I}$ の変形はちょうど N に付随するツイスター空間 $\tilde{N}$ の切断である. Kähler 曲面が超 Kähler 多様体であるための必要十分条件について, 前段落で述べたものに加えて次が成り立つ:

定理 4.3 ([13]) $(N, \overline{g}, \overline{I})$ を Kähler 曲面とする. このとき N のある概複素構造 $\overline{J}, \overline{K}$ に対し $(N, \overline{g}, \overline{I}, \overline{J}, \overline{K})$ が超 Kähler 多様体であることと次の各々は同値である:

- $\overline{I}$ の変形 $\overline{I}' \neq \pm\overline{I}$ が存在して, N 上の接束が局所的に $\overline{I}'$-不変で包合的な 2 次元分布 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ の直和で表され, かつ各 $\mathcal{D}_i$ の積分曲面は N の向きに適合する等方的極小曲面である;
- $\overline{I}$ の変形 $\overline{I}' \neq \pm\overline{I}$ で $\overline{g}$ の Levi-Civita 接続に関して平行であるものが存在する.

注意 $\boldsymbol{CP}^2$, $\boldsymbol{CH}^2$, $\boldsymbol{CP}^1 \times \boldsymbol{CP}^1$ および $\boldsymbol{CH}^1 \times \boldsymbol{CH}^1$ は Ricci 平坦ではないので, これらの複素構造の任意の開集合への制限のどのような変形も平行ではないことがわかる. 従って定理 4.1 の直後の注意で挙げた曲面は, 空間の複素構造に関する複素曲線ではないだけではなく, 空間の複素構造の平行な変形に関する複素曲線にはなりえない.

参考 向きづけられた 4 次元 Riemann 多様体 N が自己双対かつ Einstein であるとする. M を種数が 0 の Riemann 面とする. $F : M \longrightarrow N$ は共形はめこみで, リフトが調和切断であるとする. F のリフトが水平であるための条件およびリフトは水平ではないが F は極小であるための条件が F に関する M 上の法束の Euler 標数および N のスカラー曲率を用いて与えられている ([25]). この結果から, N が超 Kähler である場合には, F のリフトが水平であるための条件およびリフトは水平ではないが F は極小であるための条件が F に関する M 上の法束の Euler 標数を用いて与えられることがわかる.

謝辞

川上裕氏に講演の機会を頂いたことに感謝の意を表します. 國分雅敏先生に 3.3 節および 3.4 節に関する貴重なご指摘を頂いたことに感謝の意を表します. 本研究は科学研究費補助金 (17K05221) の支援を受けています.

参考文献

[1] L. J. Alías and B. Palmer, Curvature properties of zero mean curvature surfaces in four-dimensional Lorenzian space forms, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **124** (1998) 315–327.

[2] N. Ando, A two-dimensional Riemannian manifold with two one-dimensional distributions, Kyushu J. Math. **59** (2005) 285–299.

[3] N. Ando, Willmore surfaces in S^3 and minimal surfaces in S^4_1, Kumamoto J. Math. **18** (2005) 57–68.

[4] 安藤直也, Willmore 予想および Willmore 曲面について, 山口大学数理科学レクチャーノート No.1, 2012.

[5] 安藤直也, Willmore 球面について, 中内伸光編, Willmore 曲面について, 山口大学数理科学レクチャーノート No.2, 2013.

[6] 安藤直也, 4 次元 de Sitter 空間内の平均曲率ベクトルが零である曲面について, 中内伸光編, Willmore 曲面について 第 2 巻, 山口大学数理科学レクチャーノート No.3, 2014.

[7] N. Ando, A family of surfaces in E^3 given by an over-determined system, Current Developments in Differential Geometry and its Related Fields, 57–75, World Scientific, 2016.

[8] N. Ando, Local characterizations of complex curves in $\boldsymbol{C}^2$ and sphere Schwarz maps, Internat. J. Math. **27** (2016) 1650067 (16 pages).

[9] N. Ando, Over-determined systems in relation to principal curvatures, J. Geom. **108** (2017) 355–373.

[10] N. Ando, Molding surfaces and Liouville's equation, preprint.

[11] N. Ando, Two generalizations of an over-determined system on a surface, preprint.

[12] N. Ando, Surfaces with zero mean curvature vector in 4-dimensional space forms, preprint.

[13] N. Ando, Complex curves and isotropic minimal surfaces in hyperKähler 4-manifolds, preprint.

[14] N. Ando, Surfaces in pseudo-Riemannian space forms with zero mean curvature vector, preprint.

[15] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin and I. M. Singer, Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A **362** (1978) 425–461.

[16] R. Bryant, Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-sphere, J. Differential Geom. **17** (1982) 455–473.

[17] R. Bryant, A duality theorem for Willmore surfaces, J. Differential Geom. **20** (1984) 23–53.

[18] R. L. Bryant, S. S. Chern and P. A. Griffiths, Exterior differential systems, Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Vol. 1 (1980) 219–338, Science Press, Beijing, 1982.

[19] E. Calabi, Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres, J. Differential Geom. **1** (1967) 111–125.

[20] É. Cartan, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, 2nd ed., Hermann, 1971.

[21] I. Castro and F. Urbano, New examples of minimal Lagrangian tori in the complex projective plane, Manuscripta Math. **85** (1994) 265–281.

[22] J. Eells and S. Salamon, Twistorial construction of harmonic maps of surfaces into four-manifolds, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze **12** (1985) 589–640.

[23] T. Friedrich, On surfaces in four-spaces, Ann. Glob. Anal. Geom. **2** (1984) 257–287.

[24] S. Fujimori, M. Noro, K. Saji, T. Sasaki and M. Yoshida, Schwarz maps for the hypergeometric differential equation, Intern. J. Math. **26** (2015) 1541002.

[25] K. Hasegawa, Surfaces in four-dimensional hyperKähler manifolds whose twistor lifts are harmonic sections, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011) 309–317.

[26] J. Inoguchi, T. Taniguchi and S. Udagawa, Finite gap solutions for horizontal minimal surfaces of finite type in 5-sphere, Journal of Integrable Systems **1** (2016) 1–34.

[27] T. Itoh, Minimal surfaces in 4-dimensional Riemannian manifolds of constant curvature, Kodai Math. Sem. Rep. **23** (1971) 451–458.

[28] D. D. Joyce, Compact manifolds with special holonomy, Oxford University Press, 2000.

[29] R. Kobayashi, T. Nishizaka, S. Shinzato and M. Yoshida, Affine Schwarz map for the hypergeometric differential equation, Funkcial. Ekvac. **51** (2008) 281–305.

[30] 小林昭七, 接続の微分幾何とゲージ理論, 裳華房, 1989.

[31] 小林俊行, 大島利雄, リー群と表現論, 岩波書店, 2005.

[32] J. M. Lee, Riemannian Manifolds, Springer, 1997.

[33] G. D. Ludden, M. Okumura and K. Yano, A totally real surface in CP^2 that is not totally geodesic, Proc. Amer. Math. Soc. **53** (1975) 186–190.

[34] B. O'Neill, Semi-Riemannian geometry, With applications to relativity, Pure and Applied Mathematics 103, Academic Press, Inc., New York, 1983.

[35] T. Sasaki, K. Yamada and M. Yoshida, The hyperbolic Schwarz map for the hypergeometric differential equation, Experiment. Math. **17** (2008) 269–282.

[36] T. Sasaki, K. Yamada and M. Yoshida, Derived Schwarz map of the hypergeometric differential equation and a parallel family of flat fronts, Intern. J. Math. **19** (2008) 847–863.

[37] M. Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, vol. 4, Publish or Perish, 1975.

[38] R. A. Tribuzy and I. V. Guadalupe, Minimal immersions of surfaces into 4-dimensional space forms, Rendiconti del Seminario Matematico della Universitá di Padova **73** (1985) 1–13.

[39] F. W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer, 1983.

[40] 横田一郎, 群と位相, 裳華房, 1971.

[41] M. Yoshida, Affine and sphere Schwarz maps for the hypergeometric differential equation, Kumamoto J. Math. **29** (2016) 35–54.