

# 3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間内の 時間的極小曲面のガウス曲率について

九州大学大学院数理学府\* 赤嶺 新太郎

Shintaro Akamine

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

## 1 序

3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間  $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, -dt^2 + dx^2 + dy^2)$  内の時間的、および空間的曲面とは、 $\mathbb{L}^3$  からの誘導計量が、それぞれローレンツ計量およびリーマン計量を与えている曲面を指す。3次元ユークリッド空間  $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, dx^2 + dy^2 + dz^2)$  内の曲面や  $\mathbb{L}^3$  内の空間的曲面などのリーマン部分多様体の場合とは顕著に異なる  $\mathbb{L}^3$  内の時間的曲面の性質として、曲面の主曲率が実数の範囲内で常に取れるとは限らない、というものがある。これは曲面の主曲率を与える型作用素が常に実対角化可能ではないということに起因する。時間的曲面のうち、その平均曲率が恒等的に零になっているものを時間的極小曲面と呼び、時間的極小曲面に対して上記の型作用素の対角化可能性の問題を考える。時間的極小曲面に対する型作用素の対角化可能性の問題は、曲面のガウス曲率の符号を調べることに帰着されるため、本稿では

時間的極小曲面がある種の特異点を許容する場合に、特異点の近傍で曲面のガウス曲率はどう振る舞いをするか

という問題を考え、そのことに関する研究結果をプレプリント [1] の内容に基づき、報告する。最後に応用として曲面上の全ての正則点で型作用素が対角化可能でない、すなわち、全擬臍的な時間的極小曲面上に現れる特異点について考察する。

---

\*〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地

## 2 極小面とその特異点

### 2.1 準備

3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間  $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle = -dt^2 + dx^2 + dy^2)$  に対して、向き付けられた2次元多様体  $\Sigma$  から  $\mathbb{L}^3$  へのはめ込み  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  が**時間的 (timelike)** または**空間的 (spacelike)** であるとは、 $f$  による第一基本形式  $I = f^*\langle \cdot, \cdot \rangle$  が、それぞれローレンツ計量、リーマン計量を与えることをいう。時間的是はめ込み  $f$  に対して、 $\Sigma$  の各点の近傍では**ナル座標**と呼ばれる、第一基本形式  $I = f^*\langle \cdot, \cdot \rangle$  が

$$I = 2Fdu dv, \quad F \text{ は零にならない関数}$$

と書ける局所座標  $(u, v)$  の存在が知られている ([14, Section 1.3] を参照)。ここで、 $\mathbb{L}^3$  内の曲線  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$  が**ナル曲線 (null curve)** であるとは、速度ベクトル場  $\gamma' = d\gamma/dt$  が任意の点  $t \in I$  で**光的 (lightlike)**、すなわち、

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \gamma'(t) \neq 0, \quad t \in I$$

を満たす曲線のことをいうが、ナル座標  $(u, v)$  とは、座標曲線の  $f$  による像がナル曲線となるような座標系に他ならない。

時間的是はめ込み  $f$  に対して、その単位法ベクトル場を  $\nu$  とする。  $f$  に対する型作用素  $S$  と第二基本形式  $II$  は、

$$df(S(X)) = -\bar{\nabla}_X \nu, \quad II(X, Y) = \langle \bar{\nabla}_{df(X)} df(Y), \nu \rangle,$$

で定義される。ここで、 $X$  と  $Y$  は  $\Sigma$  上の滑らかなベクトル場で、 $\bar{\nabla}$  は  $\mathbb{L}^3$  上の Levi-Civita 接続である。平均曲率  $H$  およびガウス曲率  $K$  は次で定義される。

$$H = \text{tr } II/2, \quad K = \det S.$$

空間的是はめ込みの場合とは異なり、時間的是はめ込みに対する型作用素  $S$  は各点において常に実対角化可能とは限らず、 $S$  の固有方程式の判別式  $H^2 - K$  の符号に応じて、次の3つの場合に別れる。

- (1)  $S$  が実数体  $\mathbb{R}$  上で対角化可能。このとき、 $H^2 - K \geq 0$  が成り立ち、等号が成立する点のことを**臍点 (umbilic point)** と呼ぶ。
- (2)  $S$  が  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  上で対角化可能。このとき、 $H^2 - K \leq 0$  が成り立つ。ここで、 $\mathbb{C}$  は複素数体である。

(3)  $S$  が  $\mathbb{C}$  上で対角化可能でない. この条件を満たす点を **擬臍点 (quasi-umbilic point)** と呼び ([2] を参照),  $H^2 - K = 0$  が成り立つ.

平均曲率  $H$  が恒等的に零になる時間的是め込み  $f$  のことを **時間的極小曲面 (timelike minimal surface)** と呼ぶが, 上記のことから, そのような曲面上の  $K < 0$  となる点で  $S$  は実対角化可能であり,  $K > 0$  となる点では  $S$  は  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  上でのみ対角化可能となる. また, ガウス曲率が零の平坦点は, 臍点と擬臍点からなる.

時間的是め込み  $f$  をナル座標  $(u, v)$  により表示しておく. このとき,  $Q = \langle f_{uu}, \nu \rangle$  および  $R = \langle f_{vv}, \nu \rangle$  をそれぞれ  $f$  の **ホップ微分** (の係数) と呼ぶ. 平均曲率  $H$  が一定であることと,  $Q$  が  $u$  にのみ依存し,  $R$  が  $v$  にのみ依存することが同値である (例えば, [5, Section 4] を参照). さらに次が成り立つ.

**命題 1.** 時間的是め込み  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  に対して, 点  $p \in \Sigma$  の近傍でナル座標  $(u, v)$  を取り, ホップ微分を  $Q$  および  $R$  とする. このとき, 次が成り立つ.

- (1)  $p$  が臍点であることの必要十分条件は,  $Q(p) = R(p) = 0$ .
- (2)  $p$  が擬臍点であることの必要十分条件は,  $Q(p) = 0$  または  $R(p) = 0$  のいずれか一方のみが成り立つことである.

## 2.2 時間的極小曲面と極小面

時間的極小曲面の研究に際しては, 前節のナル曲線を考えることが重要になる. 実際, 任意のナル座標  $(u, v)$  上で表示された時間的是め込み  $f$  は,  $H\nu = \frac{2}{F} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$  を満たすので, 任意の時間的極小曲面はナル座標によって変数分離された次の表示を持つことが分かる.

**事実 2** ([9]).  $\varphi(u)$  および  $\psi(v)$  を各点においてそれらの微分  $\varphi'(u)$  および  $\psi'(v)$  が一次独立な  $\mathbb{L}^3$  内のナル曲線とする. このとき

$$f(u, v) = \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{2} \quad (2.1)$$

は時間的極小曲面を与える. 逆に任意の時間的極小曲面は, 局所的にはある 2 つのナル曲線  $\varphi(u)$  および  $\psi(v)$  を用いて, 式 (2.1) で表される.

本稿では, 上記の時間的極小曲面にある種の特異点を許容したクラスを考える. 文献 [12] において, 高橋は余階数 1, すなわち, 接平面の像が一次元に退化する特異点のみを許容する時間的極小曲面のクラスとして次を導入した.

**定義 3** ([12]). 2次元多様体  $\Sigma$  に対して, 滑らかな写像  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  が**極小面 (minface)** であるとは, 次を満たす場合をいう.

- (1)  $\Sigma$  の各点に対して, それを含む座標近傍  $(U; u, v)$  が存在して,  $f$  は  $U$  上ではナル曲線による表示 (2.1) を持つ.
- (2)  $\Sigma$  の開かつ稠密な部分集合  $W$  が存在して,  $f$  の  $W$  上への制限がはめ込みになる.

ここで,  $f$  がはめ込みにならないような  $\Sigma$  上の点を極小面  $f$  の**特異点**と呼び, 特異点でない点を**正則点**と呼ぶ.

事実 2 により, 極小面  $f$  とは時間的極小曲面で, ある開稠密集合の外側で特異点を許容するものとなっている. さらに,  $f$  を生成するナル曲線  $\varphi$  と  $\psi$  は, 定義により正則曲線となるため, 極小面上に現れる特異点の余階数は全て 1 になる.

他方で, 平均曲率が恒等的に零の空間的曲面 (極大曲面と呼ばれる) で余階数 1 の特異点のみを許容するもののクラスとして, 梅原-山田 [13] により導入された**極大面 (maxface)** の概念がある.

極小面は定義から局所的にはナル曲線 2 つの和に分解されるが, 特にナル曲線の定義から曲面自体を次のように表示できることがわかる.

$$\begin{aligned} f(u, v) = & \frac{1}{2} \int_{u_0}^u (-1 - (g_1)^2, 1 - (g_1)^2, 2g_1) \hat{\omega}_1 du \\ & + \frac{1}{2} \int_{v_0}^v (1 + (g_2)^2, 1 - (g_2)^2, -2g_2) \hat{\omega}_2 dv + f(u_0, v_0), \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで,  $g_1 = g_1(u)$ ,  $g_2 = g_2(v)$ ,  $\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_1(u)$ ,  $\hat{\omega}_2 = \hat{\omega}_2(v)$  はそれぞれ一変数関数である. 関数  $g_i$  ( $i = 1, 2$ ) は  $\pm\infty$  の値も取り得るが, 次が成り立つ.

$$g_i(p) = \pm\infty \Rightarrow \hat{\omega}_i(p) = 0 \text{ かつ } g_i \hat{\omega}_i(p), g_i^2 \hat{\omega}_i(p) \in \mathbb{R}.$$

$\mathbb{L}^3$  の合同変換により, 各点の近傍では常に  $g_i$  は極を持たないに取ることができる ([12] または [1] の Appendix 参照) ので, 以下では常にそのような座標近傍  $(U; u, v)$  と 4 つ組  $(g_1, g_2, \hat{\omega}_1 du, \hat{\omega}_2 dv)$  を考えることにする. このような 4 つ組  $(g_1, g_2, \hat{\omega}_1 du, \hat{\omega}_2 dv)$  を極小面  $f$  の座標近傍  $(U; u, v)$  上での**実ワイエルシュトラス・データ**と呼ぶ. 座標近傍  $(U; u, v)$  上で  $f$  の第一基本形式  $I$  が,

$$I = \hat{\omega}_1 \hat{\omega}_2 (1 - g_1 g_2)^2 du dv$$

となるため, 座標近傍  $(U; u, v)$  において, 点  $p = (u_0, v_0)$  が特異点であることと

$$g_1(u_0)g_2(v_0) = 1 \quad (2.3)$$

が成り立つことは同値である。

**注意 4.** [12]においては、パラ・リーマンを用いた極小面の定義が与えられ、それに対してパラ複素数を用いたワイエルシュトラス型の表現公式 (特異点がない場合には, Konderak [6] によって考察されている) が与えられたほか, パラ正則関数を1変数実数値関数の組に分解することで, 式(2.2)が導かれている. このようなナル曲線を用いた表現公式は, 時間的極小曲面が特異点を持たない場合には Gu [4], Magid [8], 井ノ口-Toda [5] などによって複数の観点から導かれている.

## 2.3 フロントと波面

次に主結果を述べる際に必要となるフロントや波面といった特異点付きの曲面の概念を述べておく.  $U$  を  $\mathbb{R}^2$  の領域とし, 滑らかな写像  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  が**フロント**であるとは,  $U$  上でユークリッド計量  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  の意味での単位法ベクトル場  $n$  が存在するときをいう. さらに ルジャンドル持ち上げと呼ばれる写像の組

$$L = (f, n): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$$

がはめ込みを与えるとき,  $f$  を**波面** (front または **wave front**) と呼ぶ. フロント  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対して,  $f$  がはめ込みにならない点  $p \in U$  をフロント  $f$  の**特異点**と呼ぶ. 特異点は, 符号付き面積密度関数と呼ばれる関数  $\lambda = \det(f_u, f_v, n)$  の零点に他ならないが, 特に  $d\lambda_p \neq 0$  を満たす特異点  $p$  のことを**非退化特異点**と呼ぶ. 非退化特異点  $p$  の近傍では, 陰関数定理により,  $\gamma(0) = p$  を満たす正則曲線  $\gamma = \gamma(t): (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  でその像が  $p$  の回りでは,  $f$  の特異点集合と一致しているものが取れる. このような曲線  $\gamma$  を  $p$  における  $f$  の**特異曲線**と呼ぶ.

次に写像 (芽) の  $\mathcal{A}$ -同値性とフロントや波面に現れる典型的な特異点について述べる.  $U_i$  を  $\mathbb{R}^2$  の領域,  $p_i$  を  $U_i$  の点とする ( $i = 1, 2$ ). 2つのなめらかな写像  $f_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  と  $f_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  が  $p_1 \in U_1$  および  $p_2 \in U_2$  で  $\mathcal{A}$ -同値, または**右左同値**であるとは,  $\Phi(p_1) = p_2$  を満たす  $\mathbb{R}^2$  の局所微分同相写像  $\Phi$  と,  $\Psi(f_1(p_1)) = f_2(p_2)$  を満たす  $\mathbb{R}^3$  の局所微分同相写像  $\Psi$  が存在して  $f_2 = \Psi \circ f_1 \circ \Phi^{-1}$  を満たすことをいう. フロント  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  の特異点  $p$  が**カスプ辺** (cuspidal edge), **ツバメの尾** (swallowtail), または**カスプ状交叉帽子** (cuspidal cross cap) であるとは,  $f$  が  $p$  上で次の写像  $f_C, f_S$ , または  $f_{CCR}$  の原点と  $\mathcal{A}$ -同値であることをいう (図1参照):

$$\begin{aligned} f_C(u, v) &= (u^2, u^3, v), & f_S(u, v) &= (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v), \\ f_{CCR}(u, v) &= (u, v^2, uv^3). \end{aligned}$$

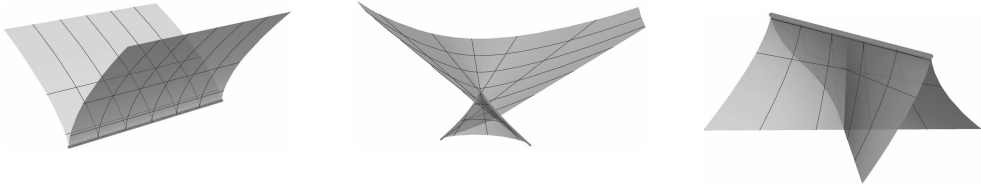


図1 左からカspb辺, ツバメの尾およびカspb状交叉帽子.

高橋 [12] は, 極小面に対するワイエルシュトラス型の表現公式を与え, 極小面上にしばしば現れる特異点であるカspb辺, ツバメの尾およびカspb状交叉帽子に対する次の判定法を与えた.

**事実 5** ([12]). 写像  $f: U \rightarrow \mathbb{L}^3$  を実ワイエルシュトラス・データ  $(g_1, g_2, \hat{\omega}_1 du, \hat{\omega}_2 dv)$  を持つ極小面とする. このとき,  $f$  は各点の近傍でフロントルとなり, 次が成り立つ.

- (1) 特異点  $p$  が非退化であることの必要十分条件は,  $g'_1(p) \neq 0$  または  $g'_2(p) \neq 0$ .
- (2) 特異点  $p$  上で  $f$  が波面であることの必要十分条件は,

$$\frac{g'_1}{g_1^2 \hat{\omega}_1} - \frac{g'_2}{g_2^2 \hat{\omega}_2} \neq 0 \text{ at } p.$$

- (3) 特異点  $p$  がカspb辺であることの必要十分条件は,

$$\frac{g'_1}{g_1^2 \hat{\omega}_1} - \frac{g'_2}{g_2^2 \hat{\omega}_2} \neq 0 \text{ かつ } \frac{g'_1}{g_1^2 \hat{\omega}_1} + \frac{g'_2}{g_2^2 \hat{\omega}_2} \neq 0 \text{ at } p.$$

- (4) 特異点  $p$  がツバメの尾であることの必要十分条件は,

$$\frac{g'_1}{g_1^2 \hat{\omega}_1} - \frac{g'_2}{g_2^2 \hat{\omega}_2} \neq 0, \frac{g'_1}{g_1^2 \hat{\omega}_1} + \frac{g'_2}{g_2^2 \hat{\omega}_2} = 0 \text{ かつ } \left( \frac{g'_1}{g_1^2 \hat{\omega}_1} \right)' \frac{g'_2}{g_2} - \left( \frac{g'_2}{g_2^2 \hat{\omega}_2} \right)' \frac{g'_1}{g_1} \neq 0 \text{ at } p.$$

- (5) 特異点  $p$  がカspb状交叉帽子であることの必要十分条件は,

$$\frac{g'_1}{g_1^2 \hat{\omega}_1} - \frac{g'_2}{g_2^2 \hat{\omega}_2} = 0, \frac{g'_1}{g_1^2 \hat{\omega}_1} + \frac{g'_2}{g_2^2 \hat{\omega}_2} \neq 0 \text{ かつ } \left( \frac{g'_1}{g_1^2 \hat{\omega}_1} \right)' \frac{g'_2}{g_2} + \left( \frac{g'_2}{g_2^2 \hat{\omega}_2} \right)' \frac{g'_1}{g_1} \neq 0 \text{ at } p.$$

### 3 特異点の近傍におけるガウス曲率の符号判定定理

#### 3.1 カspb辺以外の非退化特異点の近傍におけるガウス曲率

極小面はユークリッド計量に対する法ベクトル場を考えることで, 特異点上でも単位法ベクトル場を定義でき, フロントルの構造を持つことが分かる. 一般には極小面上の特異

点は波面の特異点を与えるわけではないが、特異点の近傍でのガウス曲率の符号が負になるか正になるかは、カスプ辺以外の特異点の近傍では、次のように特異点上で極小面の写像が波面の構造を持つかどうかで決まる。

**定理 6 ([1]).** 写像  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  を極小面,  $p \in \Sigma$  を  $f$  のカスプ辺でない特異点とする。このとき、次が成り立つ。

- (1)  $f$  が特異点  $p$  上で波面になるならば、特異点  $p$  の近傍には臍点も擬臍点も存在しない。さらにガウス曲率  $K$  は  $p$  の近傍で負になり、 $\lim_{q \rightarrow p} K(q) = -\infty$  が成り立つ。特に、そのような特異点の近傍では常に実数の主曲率が取れる。
- (2)  $f$  が特異点  $p$  上で波面にはならず、 $p$  がフロントルの非退化特異点になるならば、特異点  $p$  の近傍には臍点も擬臍点も存在しない。さらにガウス曲率  $K$  は  $p$  の近傍で正になり、 $\lim_{q \rightarrow p} K(q) = \infty$  が成り立つ。特に、そのような特異点の近傍では常に複素数の主曲率のみが取れる。

証明は、平坦点が特異点  $p$  の近傍には存在しないことを示し、極小面を生成するナル曲線の擬弧長 ([1] とその参考文献を参照) から特別なナル座標を構成した上で、事実 5 を使うことでなされる。

ツバメの尾は波面の特異点であり、カスプ状交叉帽子は波面の特異点ではないが、フロントルの非退化特異点である ([3, 13] を参照) ため、そのような特異点の近傍ではガウス曲率はそれぞれ定理 6 の (1), (2) の振る舞いをする事がわかった。

**例 7.** (2.1) において、2本のナル曲線を次のようにして取ることで得られる極小面を**時間的エネパー曲面**という。

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}(-u - \frac{u^3}{3}, u - \frac{u^3}{3}, u^2), \quad \psi(v) = \frac{1}{2}(v + \frac{v^3}{3}, v - \frac{v^3}{3}, v^2).$$

この曲面は、ツバメの尾を持つ (図 2, 左) ので、少なくとも特異点の近傍ではガウス曲率が負になることが定理 6 の (1) よりわかる。他方で、

$$\hat{f}(u, v) = \frac{\varphi(u) - \psi(v)}{2}$$

と書かれる曲面は、時間的エネパー曲面の共役曲面と呼ばれ、カスプ状交叉帽子を持つ (図 2, 右)。したがって、定理 6 の (2) により、特異点の近傍ではガウス曲率が正になることがわかる。

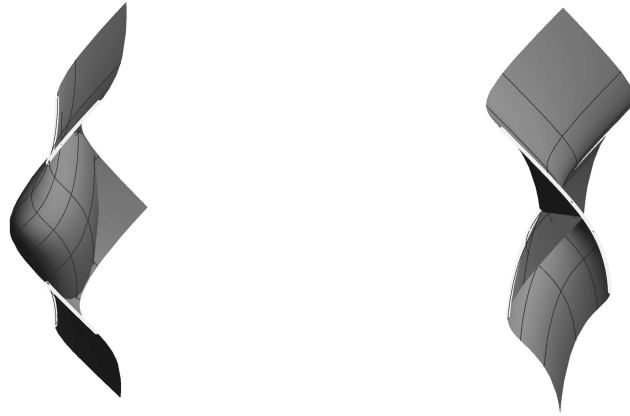


図2 時間的エネパー曲面とその共役曲面.

### 3.2 カスパ辺の近傍におけるガウス曲率

他方で、カスパ辺の近傍のガウス曲率の符号は一般には決まらない。例えば、あるカスパ辺の近傍でガウス曲率の符号が正になる場合もあれば負になる場合もある（例7の2つの曲面を参照）。またガウス曲率がカスパ辺の近傍で発散しない場合もある。従って極小面上のカスパ辺の近傍におけるガウス曲率の符号を調べるためには、カスパ辺の性質をより精密に考察する必要がある。カスパ辺を持つ波面に対しては、[10, 11] などにより多くの不変量が導入され、それらによって波面の幾何学的な性質が明らかにされている。特に、次で定義されるカスパ辺の特異曲率と呼ばれる不変量はカスパ辺の近傍における曲面のガウス曲率の挙動と密接に関係している。

**定義 8** ([11]). 波面  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  上の特異曲線  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  がカスパ辺からなるとする。カスパ辺  $\gamma$  に対する**特異曲率 (singular curvature)**  $\kappa_s$  は、次で定義される：

$$\kappa_s(t) = \operatorname{sgn}(d\lambda(\eta)) \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), n)}{|\hat{\gamma}'(t)|^3},$$

ここで、 $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$ 、 $|\hat{\gamma}'(t)| = \langle \hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}'(t) \rangle_E^{1/2}$  であり、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  は  $\mathbb{E}^3$  の内積である。

特異点を持たない正則曲面  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{E}^3$  上の曲線  $\gamma$  の測地的曲率  $\kappa_g$  は、 $n$  を  $\Sigma$  の単位法ベクトル場、 $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$  とすると、

$$\kappa_g(t) = \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), n)}{|\hat{\gamma}'(t)|^3}$$



と書かれるため、カस्प辺上の特異曲率は、ある種の符号付きの測地的曲率と考えることができる。特異曲率の符号は次のように定まっている：カस्प辺が折れる向きと同じ方向に特異曲線の像が曲がっているカस्प辺の特異曲率が正、逆にカस्प辺が折れる向きと逆方向に特異曲線の像が曲がっているカस्प辺の特異曲率が負となる（図3参照）。



図3  $\kappa_s > 0$  のカस्प辺 (左) と  $\kappa_s < 0$  のカस्प辺 (右)。

[11]において、佐治-梅原-山田は、 $\mathbb{E}^3$  からの誘導計量に関するガウス曲率  $K_E$  が有界なとき、カस्प辺の形には特異曲率から来る次のような制限があることを証明した。

**事実 9** ([11, Theorem 3.1]).  $\mathbb{E}^3$  からの誘導計量に関する曲面のガウス曲率  $K_E$  が有界なとき、カस्प辺の近傍で  $K_E$  が正（または非負）ならば、カस्प辺の特異曲率  $\kappa_s$  は負（または非正）になる。

また、カस्प辺が別の波面の非退化特異点につながっているとき、特異曲率は次の挙動を示すことが知られている。

**事実 10** ([11, Corollary 1.14]). カस्प辺が別の波面の非退化特異点につながっているとき、カस्प辺の特異曲率は  $-\infty$  に発散する。

ここで、次の例からわかるように、事実9の逆は一般には成り立たないことに注意しておく。

**例 11** ([11, Example 2.8]). クエン曲面

$$f(x, y) = \left( \frac{2(\cos x + x \sin x) \cosh y}{x^2 + \cosh^2 y}, \frac{2(\sin x - x \cos x) \cosh y}{x^2 + \cosh^2 y}, y - \frac{\cosh y \sinh y}{x^2 + \cosh^2 y} \right)$$

は、ガウス曲率  $K_E = -1$  の曲面で、特異点としてカस्प辺とツバメの尾を持つ（図4参照）。従って、事実10によりガウス曲率負の曲面の上に特異曲率が負のカस्प辺が得られ

るため、事実9の逆は一般には成り立たないことがわかる。

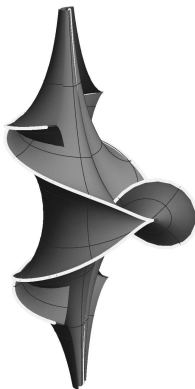


図4 クエン曲面.

$\mathbb{L}^3$  内の極小面上に現れるカスプ辺に対しても、事実9のように、カスプ辺の特異曲率とガウス曲率の間に次の関係が成立する。

**定理 12** ([1]). 極小面  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  上のカスプ辺の近傍に臍点は存在しない. さらに、カスプ辺  $p \in \Sigma$  の特異曲率  $\kappa_s$  が  $\kappa_s(p) \neq 0$  を満たすならば、 $\mathbb{L}^3$  からの誘導計量に関するガウス曲率  $K$  と  $\kappa_s$  の符号は  $p$  の近傍で一致する. 一方で、 $\kappa_s(p) = 0$  ならば、 $p$  を通る  $\Sigma$  上の正則曲線で擬臍点からなるものが存在する.

証明は、極小面  $f$  を式 (2.2) で表示した際に、カスプ辺上の特異曲率  $\kappa_s$  が

$$\kappa_s = \frac{2g'_1 g'_2}{\hat{\omega}_1 \hat{\omega}_2 (g_1 + g_2)^2} \frac{1}{\left( \frac{g'_1}{g_1^2 \hat{\omega}_1} + \frac{g'_2}{g_2^2 \hat{\omega}_2} \right)}$$

と計算できることによる (ガウス曲率  $K$  については命題 13 を参照). なお、事実5の (2) および (3) と併せると、極小面上のカスプ辺に対して、事実 10 を証明することは易しいこともわかる. また、定理 6 と定理 12 により、カスプ辺以外の非退化特異点の性質が、その近傍に現れ得る全てのカスプ辺の特異曲率の符号を統制していることもわかる.

ここで、次の命題により、定理 12 は極小面に対しては事実 9 の逆も成立することを主張していることがわかる.

**命題 13.** 式 (2.2) の表示を持つ  $\mathbb{L}^3$  内の極小面  $f$  に対して、 $\mathbb{E}^3$  からの誘導計量に関する

ガウス曲率  $K_E$  と  $\mathbb{L}^3$  からの誘導計量に関するガウス曲率  $K$  は次のように書かれる.

$$K = \frac{4g'_1g'_2}{\hat{\omega}_1\hat{\omega}_2(1-g_1g_2)^4}, \quad K_E = -\frac{4g'_1g'_2}{\hat{\omega}_1\hat{\omega}_2B^4}.$$

ここで,  $B = \sqrt{(1-g_1g_2)^2 + 2(g_1+g_2)^2}$  は零にならない関数. 特に符号については,

$$\operatorname{sgn}(K) = -\operatorname{sgn}(K_E) \quad (3.1)$$

が成り立つ. さらに式 (2.3) より, 極小面上の任意の特異点上で  $K_E$  は常に有界であることもわかる.

符号の関係式 (3.1) は Weinstein [14, Section 7.2] によっても指摘されている.

**注意 14.** ここで, 極小面を考えることで, ガウス曲率  $K_E$  が正かつ有界な曲面でツバメの尾を持つものの例が容易に構成できるようになったことに注意しておく.

以上の定理 6 と定理 12 によって, 極小面上に現れる任意の非退化特異点の近傍におけるガウス曲率の符号, すなわち実数の主曲率の有無, が完全に決定できたことになる.

### 3.3 特異点付きの全擬臍的な時間的極小曲面

2.1 節において, 時間的極小曲面の平坦点 ( $K = 0$  となる点) は型作用素が零となる臍点と型作用素が対角化可能でなくなる擬臍点からなることを見た. 一方で, そのような平坦点の特異点の近傍での現れ方については, 定理 6 と定理 12 により極小面の任意の非退化特異点の近傍に臍点は存在せず, 特異曲率が零になるカスプ辺の近くのみ擬臍点が存在することがわかった. 本節では, 特異点の近傍で全擬臍的な状況, すなわち, すべての正則点が擬臍点になっているような極小面を考えよう.

まず,  $\mathbb{L}^3$  内の正則曲面の場合は, 全臍的な時間的曲面は平面 ( $H = 0$ ), または 2 次元 de-Sitter 空間  $S_1^2 = \{(t, x, y) \in \mathbb{L}^3 \mid -t^2 + x^2 + y^2 = r^2\}$ ,  $r > 0$  ( $H = 1/r$ ) の一部に合同となることが知られている (例えば, [7, Theorem 3.2] を参照). さらに, Clelland [2] は  $\mathbb{L}^3$  内の全擬臍的な時間的曲面を次のように決定した.

**事実 15** ([2]).  $\mathbb{L}^3$  内の全擬臍的な時間的はめ込みは, ナル曲線を導線に持ち, 光的な直線を母線に持つ線織面になる.

ここで, **線織面 (ruled surface)** とは, 局所的に  $f(s, t) = \gamma(s) + t\delta(s)$  と書けるような曲面のことで,  $\gamma$  を **導線 (base curve)**, 各  $s$  を止めてできる直線を **母線 (ruling)** と呼

ぶ。線織面のうち、特に  $\delta$  が定ベクトルとなるものを**柱面 (cylinder)**と呼ぶ。また、任意の  $s$  に対して、 $\langle \delta(s), \delta(s) \rangle = 0$  かつ  $\delta(s) \neq 0$  を満たすとき、 $f$  を光的な直線を母線を持つ線織面という。

本節では、これまでの議論の応用として、時間的極小曲面に対する事実 15 の別証明を与えるとともに、現れ得る特異点の形を考察した次の主張を証明する。

**系 16.** 正則点集合が擬臍点からなる極小面は、ナル曲線を導線に持ち、光的な直線を母線を持つ柱面に限る。また、そのような曲面上に現れる非退化特異点は、柱面の母線として現れるカスパ辺に限り、特にカスパ辺の特異曲率は零になる (図 5 参照)。

**証明.** 極小面の定義から、ナル座標近傍  $(U; u, v)$  上で (2.2) 式で表示され、実ワイエルシュトラス・データ  $(g_1, g_2, \hat{\omega}_1 du, \hat{\omega}_2 dv)$  を持つ極小面  $f$  を考えれば良い。  $U$  上の正則点  $p = (u_0, v_0)$  の近傍で (ローレンツ計量に関する) 単位法ベクトル場  $\nu$  を取り、ホップ微分を  $Q = \langle f_{uu}, \nu \rangle$  および  $R = \langle f_{vv}, \nu \rangle$  とする。時間的極小曲面を考えているので、 $Q$  および  $R$  が、それぞれ変数  $u$  と  $v$  にのみ依存することに留意すると、命題 1 により、 $Q(u_0) = 0$  または  $R(v_0) = 0$  のいずれか一方のみが成り立つことがわかる。従って、一般性を失わずに  $R(v_0) = 0$  としてよい。このとき、 $Q$  および  $R$  が一変数の連続関数であることと  $U$  の正則点集合が擬臍点からなることから、 $R$  は恒等的に零になることがわかる。他方で  $R$  は  $U$  上で、 $R = g'_2 \hat{\omega}_2$  と書かれるので、特異点上においても定義される。いま、 $R \equiv 0$  から  $g'_2 \equiv 0$  が従うため、任意の  $v$  に対して、 $\psi''(v) \parallel \psi'(v)$  であることがわかる。 $\psi$  はナル曲線なので、適当なパラメータ  $\tilde{v}$  を用いると、

$$\psi(\tilde{v}) = \tilde{v}\psi_0 + C, \quad \psi_0 \in \mathbb{L}^3 \setminus \{0\}, C \in \mathbb{L}^3$$

の形の直線になる。従って、極小面  $f$  は

$$f(u, \tilde{v}) = \frac{\varphi(u) + \tilde{v}\psi_0}{2} \quad (3.2)$$

の形の柱面になることがわかった。

次に  $f$  の特異点集合を考える。点  $p = (u_0, \tilde{v}_0)$  が  $f$  の特異点であることと、 $\varphi'(u_0) \parallel \psi_0$  が同値であることから、特異点集合は必ず  $\{(u, \tilde{v}) \mid u = u_0\}$  の形をしており、その  $f$  による像は柱面 (3.2) の母線である直線となる。また、 $\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = 0$  より母線となる直線は光的な方向を向くことがわかる。特異点  $p = (u_0, \tilde{v}_0)$  を非退化特異点とすると、事実 5 の (1) および  $g'_2 \equiv 0$  より、 $g'_1(u_0) \neq 0$  となる。従って、

$$\left( \frac{g'_1}{g_1^2 \hat{\omega}_1} \pm \frac{g'_2}{g_2^2 \hat{\omega}_2} \right) (p) = \frac{g'_1}{g_1^2 \hat{\omega}_1} (u_0) \neq 0$$

となり，事実 5 の (3) より  $p$  はカスプ辺になることがわかる．特異曲率が零になることは，定理 12 から従う．

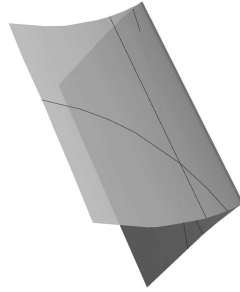


図 5 カスプ辺を光的な直線として持ち，正則点集合が擬臍点からなる極小面.

**注意 17.** 命題 13 より，正則点集合が擬臍点からなる極小面は，特異点付きの  $\mathbb{E}^3$  内の平坦曲面にもなっている．

## 謝辞

研究集会における講演の機会，および本稿の執筆の機会を与えてくださった金沢大学の川上裕准教授に心より御礼申し上げます．

## 参考文献

- [1] S. Akamine, *Behavior of the Gaussian curvature of timelike minimal surfaces with singularities*, preprint, arXiv:1701.00238.
- [2] J.N. Clelland, *Totally quasi-umbilic timelike surfaces in  $\mathbb{R}^{1,2}$* , Asian J. Math. **16** (2012), 189–208.
- [3] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.
- [4] C. Gu, *The extremal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space*, Acta. Math. Sinica., **1** (1985), 173–180.

- [5] J. Inoguchi and M. Toda, *Timelike minimal surfaces via loop groups*, Acta Appl. Math. **63** (2004), 313–355.
- [6] J. Konderak, *A Weierstrass representation theorem for Lorentz surfaces*, Complex Var. Theory Appl. **50** (5), 319–332 (2005).
- [7] R. López, *Differential Geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space*, International Electronic Journal of Geometry. **7** (2014) 44–107.
- [8] M.A. Magid, *Timelike surfaces in Lorentz 3-space with prescribed mean curvature and Gauss map*, Hokkaido Math. J. **20**, 447–464 (1991).
- [9] L. McNertney, *One-parameter families of surfaces with constant curvature in Lorentz 3-space*, Ph.D. thesis, Brown University, 1980.
- [10] L.F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifolds, Springer Proc. Math. Stat. **154** (2016) 247–281.
- [11] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009) 491–529.
- [12] 高橋英伸, 特異点を許す 3次元時空内の時間的極小曲面について, 2012年修士論文, 大阪大学.
- [13] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.
- [14] T. Weinstein, *An Introduction to Lorentz Surfaces*, de Gruyter Exposition in Math. **22**, Walter de Gruyter, Berlin, (1996).