数理解析研究所講究録
第2069巻 2018年 95-102

Generalized extended Lorentz cone programming の弱双対定理

小崎 敏寛 (Toshihiro Kosaki)*
ステラリンク株式会社 (Stera Link, Co., Ltd.)

概要

二次錐 [1, 3] を一般化した extended Lorentz cone[4, 5, 6] とさらに一般化した錐を 3 つ考える．その錐を制約に使った最適化問題の弱双対定理を証明する．さらに目的関数が凸二次関数の時も考える．

1 はじめに

最適化問題に対して，双対問題を考えることがある．最小化問題である主問題に対して，最大化問題として双対問題を考え，主問題と双対問題の（実行可能解における）目的関数の差を双対ギャップという．双対ギャップを最適性の基準として使うアルゴリズムとして，主双対内点法 [2, 7] がある．アルゴリズムが上手く動くためには，弱双対定理が重要である．そこで，弱双対定理を示す．

二次錐計画問題 [1, 3] は多くの応用を持つ問題のクラスである．そこで，本稿では二次錐計画問題の一般化を考える．

2 節では目的関数が線形の時，3 節では目的関数が凸二次の時を考える．4 節で，まとめと今後の課題を述べる．

記法として，ベクトル x と y に対して，内積を $\langle x,y\rangle := x^Ty$ とする．

2 目的関数が線形の時

この節では目的関数が線形の時を考える．

2.1 2 ノルムの時

2.1.1 定式化

考える問題は次の extended Lorentz cone programming :

$$\begin{aligned} &\min\ \langle c,\tilde{x}\rangle \\ &\text{s.t. } A\tilde{x}=b \\ &\quad\ \tilde{x}\in L_2 := \{(x,u)\in\Re^p\times\Re^q : x\geq\|u\|e_p\} \end{aligned} \tag{P-2}$$

*toshihirokosaki@gmail.com

ただし，e_p は全ての要素が 1 の p 次の列ベクトル．変数は $\tilde{x}$．双対問題は次のようになる．

$$\begin{aligned}&\max\ \langle b, \tilde{y}\rangle\\&\text{s.t. } A^T\tilde{y} + \tilde{z} = c\\&\quad \tilde{z} \in M_2 := \{(z,t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p\rangle \geq \|t\|,\ z \geq 0\}\end{aligned} \tag{D-2}$$

ただし，変数は $(\tilde{y}, \tilde{z})$.

2.1.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる．

$$\begin{aligned}\langle c, \tilde{x}\rangle - \langle b, \tilde{y}\rangle &= \langle A^T\tilde{y} + \tilde{z}, \tilde{x}\rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{y}\rangle\\&= \langle \tilde{x}, \tilde{z}\rangle\\&= \langle x, z\rangle + \langle u, t\rangle\\&\geq \langle \|u\|e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle\\&= \|u\|\langle e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle\\&\geq \|u\|\|t\| + \langle u, t\rangle\\&\geq 0\end{aligned}$$

したがって，弱双対定理がなりたつ．

2.2 p ノルムの時

2.2.1 定式化

考える問題は次の p ノルム extended Lorentz cone programming :

$$\begin{aligned}&\min\ \langle c, \tilde{x}\rangle\\&\text{s.t. } A\tilde{x} = b\\&\quad \tilde{x} \in L_p := \{(x,u) \in \Re^p \times \Re^q : x \geq \|u\|_p e_p\}\end{aligned} \tag{P-p}$$

ただし，変数は $\tilde{x}$．ノルムの下付き添え字の $p \geq 1$ と $q \geq 1$ は，$1/p + 1/q = 1$ をみたす定数．双対問題は次のようになる．

$$\begin{aligned}&\max\ \langle b, \tilde{y}\rangle\\&\text{s.t. } A^T\tilde{y} + \tilde{z} = c\\&\quad \tilde{z} \in M_q := \{(z,t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p\rangle \geq \|t\|_q,\ z \geq 0\}\end{aligned} \tag{D-p}$$

ただし，変数は $(\tilde{y}, \tilde{z})$.

2.2.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\langle c, \tilde{x}\rangle - \langle b, \tilde{y}\rangle &= \langle A^T\tilde{y} + \tilde{z}, \tilde{x}\rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{y}\rangle \\
&= \langle \tilde{x}, \tilde{z}\rangle \\
&= \langle x, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&\geq \langle \|u\|_p e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&= \|u\|_p \langle e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&\geq \|u\|_p \|t\|_q + \langle u, t\rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

したがって，弱双対定理がなりたつ.

2.3 一般のノルムの時

2.3.1 定式化

考える問題は次のノルム extended Lorentz cone programming :

$$
\begin{aligned}
&\min\ \langle c, \tilde{x}\rangle \\
&\text{s.t. } A\tilde{x} = b \\
&\qquad \tilde{x} \in L_n := \{(x, u) \in \Re^p \times \Re^q : x \geq f(u)e_p\}
\end{aligned}
\tag{P-n}
$$

ただし，f をノルムとする．変数は $\tilde{x}$．双対問題は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\max\ \langle b, \tilde{y}\rangle \\
&\text{s.t. } A^T\tilde{y} + \tilde{z} = c \\
&\qquad \tilde{z} \in M_n := \{(z, t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p\rangle \geq f^\circ(t),\ z \geq 0\}
\end{aligned}
\tag{D-n}
$$

ただし，f° は f の双対ノルム．変数は $(\tilde{y}, \tilde{z})$.

2.3.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\langle c, \tilde{x}\rangle - \langle b, \tilde{y}\rangle &= \langle A^T\tilde{y} + \tilde{z}, \tilde{x}\rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{y}\rangle \\
&= \langle \tilde{x}, \tilde{z}\rangle \\
&= \langle x, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&\geq \langle f(u)e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&= f(u)\ \langle e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&\geq f(u)f^\circ(t) + \langle u, t\rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

したがって，弱双対定理がなりたつ.

2.4 ゲージの時

2.4.1 定式化

考える問題は次のゲージ extended Lorentz cone programming :

$$\begin{aligned} &\min\ \langle c, \tilde{x}\rangle \\ &\text{s.t. } A\tilde{x} = b \\ &\quad \tilde{x} \in L_g := \{(x,u) \in \Re^p \times \Re^q : x \geq \rho(u)e_p\} \end{aligned} \tag{P-g}$$

ただし，ρ をゲージとする．変数は $\tilde{x}$．双対問題は次のようになる．

$$\begin{aligned} &\max\ \langle b, \tilde{y}\rangle \\ &\text{s.t. } A^T\tilde{y} + \tilde{z} = c \\ &\quad \tilde{z} \in M_g := \{(z,t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p\rangle \geq \rho^\circ(t),\ z \geq 0\} \end{aligned} \tag{D-g}$$

ただし，ρ° は ρ の双対ゲージ．変数は $(\tilde{y}, \tilde{z})$.

2.4.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる．

$$\begin{aligned} \langle c, \tilde{x}\rangle - \langle b, \tilde{y}\rangle &= \langle A^T\tilde{y} + \tilde{z}, \tilde{x}\rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{y}\rangle \\ &= \langle \tilde{x}, \tilde{z}\rangle \\ &= \langle x, z\rangle + \langle u, t\rangle \\ &\geq \langle \rho(u)e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle \\ &= \rho(u)\ \langle e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle \\ &\geq \rho(u)\rho^\circ(t) + \langle u, t\rangle \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

したがって，弱双対定理がなりたつ．

3 目的関数が凸二次の時

この節では目的関数が凸二次の時を考える．

3.1 2ノルムの時

3.1.1 定式化

考える問題は次の凸二次 extended Lorentz cone programming :

$$\begin{aligned} &\min\ \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x}\rangle + \langle c, \tilde{x}\rangle \\ &\text{s.t. } A\tilde{x} = b \\ &\quad \tilde{x} \in L_2 := \{(x,u) \in \Re^p \times \Re^q : x \geq \|u\|e_p\} \end{aligned} \tag{P-2-2}$$

ただし，Q は対称半正定値行列, e_p は全ての要素が 1 のベクトル．変数は $\tilde{x}$．双対問題は次のようになる．

$$\begin{aligned} &\max\ \langle b, \tilde{y}\rangle - \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}'\rangle \\ &\text{s.t. } A^T\tilde{y} - Q\tilde{x}' + \tilde{z} = c \\ &\qquad \tilde{z} \in M_2 := \{(z,t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p\rangle \geq \|t\|,\ z \geq 0\} \end{aligned} \tag{D-2-2}$$

ただし，変数は $(\tilde{x}', \tilde{y}, \tilde{z})$．

3.1.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x}\rangle + \langle c, \tilde{x}\rangle - \langle b, \tilde{y}\rangle + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}'\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}'\rangle + \langle A^T\tilde{y} - Q\tilde{x}' + \tilde{z}, \tilde{x}\rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{y}\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \langle \tilde{x}, \tilde{z}\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \langle x, z\rangle + \langle u, t\rangle \\ &\geq \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \langle \|u\| e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \|u\|\langle e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle \\ &\geq \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \|u\|\|t\| + \langle u, t\rangle \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

したがって，弱双対定理がなりたつ．

3.2 p ノルムの時

3.2.1 定式化

考える問題は次の凸二次 p ノルム extended Lorentz cone programming :

$$\begin{aligned} &\min\ \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x}\rangle + \langle c, \tilde{x}\rangle \\ &\text{s.t. } A\tilde{x} = b \\ &\qquad \tilde{x} \in L_p := \{(x,u) \in \Re^p \times \Re^q : x \geq \|u\|_p e_p\} \end{aligned} \tag{P-p-2}$$

ただし，Q は対称半正定値行列, e_p は全ての要素が 1 のベクトル．変数は $\tilde{x}$．双対問題は次のようになる．

$$\begin{aligned} &\max\ \langle b, \tilde{y}\rangle - \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}'\rangle \\ &\text{s.t. } A^T\tilde{y} - Q\tilde{x}' + \tilde{z} = c \\ &\qquad \tilde{z} \in M_q := \{(z,t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p\rangle \geq \|t\|_q,\ z \geq 0\} \end{aligned} \tag{D-p-2}$$

ただし，変数は $(\tilde{x}', \tilde{y}, \tilde{z})$．

3.2.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x}\rangle + \langle c, \tilde{x}\rangle - \langle b, \tilde{y}\rangle + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}'\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}'\rangle + \langle A^T\tilde{y} - Q\tilde{x}' + \tilde{z}, \tilde{x}\rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{y}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \langle \tilde{x}, \tilde{z}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \langle x, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \langle \|u\|_p e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \|u\|_p \langle e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \|u\|_p \|t\|_q + \langle u, t\rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

したがって，弱双対定理がなりたつ.

3.3 一般のノルムの時

3.3.1 定式化

考える問題は次の凸二次ノルム extended Lorentz cone programming :

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x}\rangle + \langle c, \tilde{x}\rangle \\
\text{s.t. } & A\tilde{x} = b \\
& \tilde{x} \in L_n := \{(x, u) \in \Re^p \times \Re^q : x \geq f(u)e_p\}
\end{aligned}
\tag{P-n-2}
$$

ただし，Q は対称半正定値行列, e_p は全ての要素が 1 のベクトル．変数は $\tilde{x}$．双対問題は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\max\ & \langle b, \tilde{y}\rangle - \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}'\rangle \\
\text{s.t. } & A^T\tilde{y} - Q\tilde{x}' + \tilde{z} = c \\
& \tilde{z} \in M_n := \{(z, t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p\rangle \geq f^\circ(t),\ z \geq 0\}
\end{aligned}
\tag{D-n-2}
$$

ただし，f° は f の双対ノルム．変数は $(\tilde{x}', \tilde{y}, \tilde{z})$.

3.3.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\langle\tilde{x}, Q\tilde{x}\rangle + \langle c, \tilde{x}\rangle - \langle b, \tilde{y}\rangle + \frac{1}{2}\langle\tilde{x}', Q\tilde{x}'\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle\tilde{x}, Q\tilde{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle\tilde{x}', Q\tilde{x}'\rangle + \langle A^T\tilde{y} - Q\tilde{x}' + \tilde{z}, \tilde{x}\rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{y}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle\tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \langle\tilde{x}, \tilde{z}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle\tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \langle x, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\langle\tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \langle f(u)e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle\tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + f(u)\langle e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\langle\tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + f(u)f^\circ(t) + \langle u, t\rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

したがって，弱双対定理がなりたつ.

3.4 ゲージの時

3.4.1 定式化

考える問題は次の凸二次ゲージ extended Lorentz cone programming :

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{2}\langle\tilde{x}, Q\tilde{x}\rangle + \langle c, \tilde{x}\rangle \\
\text{s.t. } & A\tilde{x} = b \\
& \tilde{x} \in L_g := \{(x, u) \in \Re^p \times \Re^q : x \geq \rho(u)e_p\}
\end{aligned}
\tag{P-g-2}
$$

ただし，Q は対称半正定値行列，e_p は全ての要素が 1 のベクトル．変数は $\tilde{x}$．双対問題は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\max\ & \langle b, \tilde{y}\rangle - \frac{1}{2}\langle\tilde{x}', Q\tilde{x}'\rangle \\
\text{s.t. } & A^T\tilde{y} - Q\tilde{x}' + \tilde{z} = c \\
& \tilde{z} \in M_g := \{(z, t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p\rangle \geq \rho^\circ(t),\ z \geq 0\}
\end{aligned}
\tag{D-g-2}
$$

ただし，ρ° は ρ の双対ゲージ．変数は $(\tilde{x}', \tilde{y}, \tilde{z})$.

3.4.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\langle\tilde{x}, Q\tilde{x}\rangle + \langle c, \tilde{x}\rangle - \langle b, \tilde{y}\rangle + \frac{1}{2}\langle\tilde{x}', Q\tilde{x}'\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle\tilde{x}, Q\tilde{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle\tilde{x}', Q\tilde{x}'\rangle + \langle A^T\tilde{y} - Q\tilde{x}' + \tilde{z}, \tilde{x}\rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{y}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle\tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \langle\tilde{x}, \tilde{z}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle\tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \langle x, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\langle\tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \langle\rho(u)e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle\tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \rho(u)\langle e_p, z\rangle + \langle u, t\rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\langle\tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}')\rangle + \rho(u)\rho^\circ(t) + \langle u, t\rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

したがって，弱双対定理がなりたつ.

4 まとめと今後の課題

本稿では，二次錐計画問題を拡張した：extended Lorentz cone 計画問題をさらに一般化した問題を考えた．目的関数が線形と二次の時を考え，弱双対定理を証明した．証明の過程の不等号が，全て等号で成りたてば，最適解が得られていることがわかる．このことから制約想定のようなものを考えることができる.

今後の課題としては，応用を考えることやアルゴリズムを考えることがある.

参考文献

[1] F. Alizadeh and D. Goldfarb, Second-order cone programming, Mathematical Programming, 95, 3-51, 2003.

[2] 小島政和，土谷隆，水野眞治，矢部博,「内点法」，朝倉書店，2004.

[3] M. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd, and H. Lebret, Applications of second-order cone programming, Linear Algebra and its Applications, 284, 193-228, 1998.

[4] S. Z. Németh and L. Xiao, Linear complementarity problems on extended second order cones, arXiv, 2017.

[5] S. Z. Németh and G. Zhang, Extended Lorentz cones and mixed complementarity problems, Journal of Global Optimization, 62, 443-457, 2015.

[6] S. Z. Németh and G. Zhang, Extended Lorentz cones and variational inequalities on cylinders, Journal of Optimization Theory and Applications, 168, 756-768, 2016.

[7] S. J. Wright, Primal-dual interior-point method, SIAM Publications, 1997.