数理解析研究所講究録
第2069巻 2018年 145-152

非拡大写像の不動点集合を制約とする準凸関数最小化アルゴリズムの提案

明治大学大学院 理工学研究科 情報科学専攻　菱沼 和弘 *
明治大学 理工学部 情報科学科　飯塚 秀明

Computer Science Program, Graduate School of Science and Technology, Meiji University　Kazuhiro HISHINUMA
Department of Computer Science, School of Science and Technology, Meiji University　Hideaki IIDUKA

概要

本稿では、制約付き準凸関数最小化問題を解くアルゴリズムについて議論する。制約付き準凸関数最小化問題を解く既存のアルゴリズムとしては、準劣勾配法が提案されている。準劣勾配法は、その計算に制約集合への距離射影を用いるアルゴリズムである。しかしながら、その効率的な実行のためには、この距離射影が容易に計算可能である必要がある。一方、制約集合への距離射影が容易に計算可能でないとしても、これらの集合を非拡大写像の不動点集合として表現することができる例は多く存在する。そこで本稿では、準凸関数最小化アルゴリズムである準劣勾配法に対し、非拡大写像の不動点を見つける Krasnosel'skiĭ-Mann 不動点アルゴリズムを組み込むことで、非拡大写像の不動点集合を制約とする準凸関数最小化アルゴリズムを構築する。また、このアルゴリズムを実際に適用することのできる準凸関数最小化問題として、Cobb-Douglas 生産効率問題を取り上げ、その得失について議論する。

1　はじめに

本稿は、制約付き準凸関数最小化問題を解くアルゴリズムについて扱う。制約付き準凸関数最小化問題は、ある与えられた凸集合上で、準凸関数を最小とする解を見つける問題である。ここで準凸関数とは、凸関数の拡張であり、凸関数以外に図 1 に示すような形状の関数も含まれる。準凸関数は凸関数を含むので、制約付き準凸関数最小化問題は、よく研究されている制約付き凸関数最小化問題を含む、より広い問題である。例として、凸関数を正の値をとる Affine 関数で除した関数は、準凸関数となる [14, Proposition 2.9]。この性質より、ある制約下において、凸関数として表される利益と、Affine 関数として表されるコストの関係を、分数関数として表現し定式化する、Cobb-Douglas

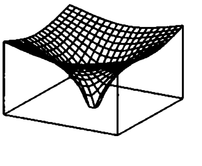
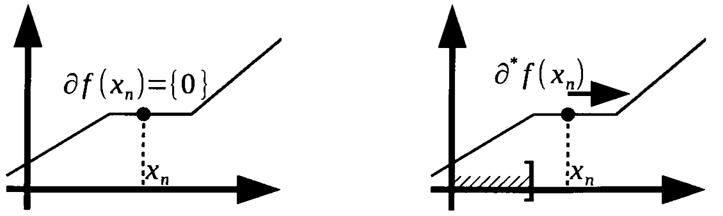


図 1: 準凸関数の例

* 独立行政法人日本学術振興会 特別研究員 DC.

生産効率問題は、制約付き準凸関数最小化問題に帰着される [3, Section 6]。

既存の制約付き準凸関数最小化問題を解くアルゴリズムとしては、準劣勾配法 [4, 9] が知られている。準劣勾配法は、任意に与えた初期点に対し、制約集合への距離射影と目的関数の準劣勾配を用いて構成される反復式を繰り返し適用することにより、最小解へ収束する点列を構成する手法である。ここで準劣勾配とは、関数の準位集合に対する (単位) 法線ベクトルをいう。一般に、制約付き凸関数最小化問題の局所的最小解は大域的最小解と一致するが、図 2 に示す通り、制約付き準凸関数最小化問題においてはこの性質は必ずしも成り立たない。この場合において、凸最適化における (劣) 勾配法のように、関数の (劣) 勾配を用いた解の更新を行うと、図 2(a) に示す通り (劣) 微分が 0 となり、実際には大域的最小解に到達していないにも関わらず、解の更新が停止してしまう。一方、関数の準位集合に対する法線ベクトルとして定義される準劣勾配を用いた解の更新においては、このような大域的最小解でない局所的最小解においても、図 2(b) に示す通り非零の準劣勾配を得ることが可能であり、解の更新を継続することができる。



(a) 局所的最小解と (劣) 勾配　　(b) 局所的最小解と準劣勾配

図 2: 準凸関数の局所的最小解

準劣勾配法を含む、制約集合への距離射影を用いた最適化アルゴリズムは、その効率的な実行のために、この距離射影が容易に計算可能である必要がある。しかしながら、有限個の閉凸集合の共通部分や、凸関数の最小解集合、もしくは変分不等式の解集合のような、距離射影を計算することが一般に困難な、複雑な制約集合も存在する [16]。このような複雑な制約集合をもつ最小化問題に対し、これらの集合を非拡大写像の不動点集合として表現することで、不動点理論の知見を応用した最適化アルゴリズムを構成することが、近年凸最適化分野において研究されている [6, 8, 15]。

閉凸集合に対する距離射影は、その集合を不動点集合として持つ非拡大写像であることが知られている [13, Theorem 5.2.3]。したがって、制約集合への距離射影を用いた既存の最適化アルゴリズムにおいて取り扱うことのできる問題の制約集合は、非拡大写像の不動点集合としても表現することができる。さらに、勾配が Lipschitz 連続な Fréchet 微分可能凸関数の最小解集合も、非拡大写像の不動点集合として表すことができる [5, Example 3.1]。加えて、与えられた有限個の非拡大写像に対し、それらの不動点集合の共通部分を不動点集合として持つ非拡大写像も構築することができる [2, Proposition 4.34]。したがって、非拡大写像の不動点集合は、距離射影を容易に計算できる集合と比較して、非常に強力な表現能力を持つ。

非拡大写像の不動点を見つける有用な手法として、Krasnosel'skiĭ-Mann 不動点アルゴリズム

[11, 12] がある。このアルゴリズムは、任意に与えた初期点に対し、非拡大写像を適用する前後の点についての凸結合を繰り返し求めることにより、解へ弱収束する点列を構成する手法である。本稿では、準凸関数最小化アルゴリズムである準劣勾配法に対し、非拡大写像の不動点を見つける Krasnosel'skiĭ-Mann 不動点アルゴリズムを組み込むことで、非拡大写像の不動点集合を制約とする準凸関数最小化アルゴリズムを構築する。

以降の構成は次の通りである。2 章においては、以降の議論で必要な定義および命題を紹介し、本稿で扱う最小化問題を定義する。3 章においては、準劣勾配法と Krasnosel'skiĭ-Mann 不動点アルゴリズムに基づく準凸関数最小化アルゴリズムを提案し、その収束解析について述べる。4 章においては、提案アルゴリズムの応用例として、Cobb-Douglas 生産効率問題への適用について述べる。5 章においては、本稿での議論を総括する。

2 数学的準備

本稿において、H を実 Hilbert 空間とし、$\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ をその内積、また $\|\cdot\| : H \to [0,\infty)$ をその内積より導かれるノルムとする。$\mathbb{R}$ を実数全体の集合とし、$\mathbb{N}$ を (0 を含まない) 自然数全体の集合とする。H 上の単位球面を $\mathbf{S} := \{x \in H : \|x\| = 1\}$ により表す。また、$\mathrm{Id} : H \to H$ は恒等写像を表すものとする。

以下、必要な数学的準備を行い、本稿において議論の対象とする不動点制約付き準凸関数最小化問題を定義する。

定義 1 (非拡大写像とその不動点集合 [2, Definition 4.1]) C を H の空でない部分集合とし、T を C から H への写像とする。このとき、

(i) T が**非拡大写像**であるとは、任意の点 $x, y \in C$ に対し、

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$$

が常に成り立つことをいう。

(ii) T が**堅非拡大写像**であるとは、任意の点 $x, y \in C$ に対し、

$$\|T(x) - T(y)\|^2 + \|(\mathrm{Id} - T)(x) - (\mathrm{Id} - T)(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2$$

が常に成り立つことをいう。

写像 T の**不動点集合**を $\mathrm{Fix}(T)$ により表し、次式で定義する。

$$\mathrm{Fix}(T) := \{x \in C : T(x) = x\}.$$

本稿においては、加えて以下の定義を議論に用いる。

定義 2 (準凸関数 [1, Definition 5.1]) C を H の空でない閉凸集合とし、f を C 上で定義された実数値関数とする。このとき、

(i) f が**準凸関数**であるとは、任意の点 $x, y \in C$ と、任意の実数 $\lambda \in [0,1]$ に対し、

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

が常に成り立つことをいう。

(ii) f が**狭義準凸関数**であるとは、任意の異なる 2 点 $x, y \in C$ と、任意の実数 $\lambda \in (0,1)$ に対し、

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

が常に成り立つことをいう。

問題 1 (不動点制約付き準凸関数最小化問題) C を H の空でない閉凸部分集合とし、f を C 上で定義された準凸連続実数値関数とする。T を C から C への堅非拡大写像とし、その不動点集合 $\mathrm{Fix}(T)$ が空でないものとする。このとき、次式で定義される最小化問題を**不動点制約付き準凸関数最小化問題**という。

$$\text{Minimize } f(x) \text{ subject to } x \in \mathrm{Fix}(T). \tag{1}$$

加えて、最小化問題 (1) の**最小値** $f_\star := \inf_{x \in \mathrm{Fix}(T)} f(x)$ と**解集合** $X^\star := \{x \in \mathrm{Fix}(T) : f(x) = f_\star\}$ を、それぞれ定義する。

定義 3 (Hölder 条件 [10, Definition 1]) C を H の空でない部分集合とし、f を C 上で定義された実数値関数とする。このとき、f が **Hölder 条件**を満たすとは、ある正の実数 p と、ある正の実数 L が存在し、任意の $x \in C$ に対し、

$$f(x) - f_\star \leq L(\mathrm{dist}(x, X^\star))^p$$

が常に成り立つことをいう。

定義 4 (準位集合と準劣微分 [9, Subsection 2.2]) C を H の空でない閉凸集合とし、f を C 上で定義された準凸関数とする。また、$x \in C$ とする。このとき、関数 f の点 x における**準位集合** を

$$\mathrm{lev}_{<f(x)} f := \{y \in C : f(y) < f(x)\}$$

により定義する。また、関数 f の点 x における**準劣微分** を

$$\partial^\star f(x) := \{g \in H : \langle g, y - x \rangle \leq 0 \ (y \in \mathrm{lev}_{<f(x)} f)\}$$

により定義する。

定義 5 (弱収束と弱下半連続性 [13, Chapter 5]) $\{x_n\}$ を H の点列とし、x を H の点とする。このとき、点列 $\{x_n\}$ が点 x に**弱収束** するとは、任意の $y \in H$ に対して、$\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ となるときをいい、またこれを $x_n \rightharpoonup x$ と書く。いま、f を H 上で定義された実数値関数とする。このとき、関数 f が**弱下半連続**であるとは、H の任意の弱収束する点列 $\{u_n\}, u_n \rightharpoonup u$ に対して、$f(u) \leq \liminf_{n \to \infty} f(u_n)$ が常に成り立つことをいう。

3 アルゴリズムと収束解析

問題 1 に対するアルゴリズムとして、Algorithm 1 を与える。このアルゴリズムは、準劣勾配法

Algorithm 1 Krasnosel'skiĭ-Mann 型不動点近似法に基づく準劣勾配法

1: $x_1 \in C$, $\{\alpha_k\} \subset (0,1)$, $\{v_k\} \subset (0,\infty)$.
2: **for** $k = 1, 2, \ldots$ **do**
3: $\quad g_k \in \partial^\star f(x_k) \cap \mathbf{S}$.
4: $\quad x_{k+1} := \alpha_k x_k + (1-\alpha_k) T(x_k - v_k g_k)$.
5: **end for**

に対し、Krasnosel'skiĭ-Mann 不動点アルゴリズムを組み込むことで構成されている。まず Step. 1 においては、Krasnosel'skiĭ-Mann 不動点アルゴリズムに対するパラメータ $\{\alpha_k\}$ と、準劣勾配法に対するステップ幅 $\{v_k\}$ を与え、関数 f の定義域から初期点を任意に選ぶ。続いて、Step. 3 において、現在の暫定解 x_k における準劣勾配 g_k を選択する。この準劣勾配は、暫定解 x_k における準劣微分 $\partial^\star f(x_k)$ のうち、非零ベクトルかつノルムが 1 のものを 1 つ選択する。Step. 4 では、先に選択した準劣勾配 g_k を用いて、準劣勾配法の反復式を適用した後、Krasnosel'skiĭ-Mann 不動点アルゴリズムの反復式を適用する。以後、Step. 3-4 を、充分な回数反復する。

以降では、この Algorithm 1 の収束解析を与えるが、そのために必要な仮定を仮定 1 として与える。

仮定 1 以下に掲げる命題の成立を仮定する。

(i) 関数 f は、Hölder 条件を満たす。[4, Section 2]
(ii) 解集合 $X^\star$ は、空でない。
(iii) Algorithm 1 において用いられる数列 $\{\alpha_k\}$ は、

$$0 < \liminf_{k\to\infty} \alpha_k \leq \limsup_{k\to\infty} \alpha_k < 1$$

を満たす。[8, Assumption 4.1]
(iv) Algorithm 1 により生成される点列 $\{x_k\}$ は、有界である。[6, Assumption 3.1]

次の定理 1 は、ステップ幅 $\{v_k\}$ をある定数に固定した際の、Algorithm 1 の近似性能を与える。

定理 1 (定数ステップ幅選択時の収束性) 仮定 1 が成り立つとする。v を正の実数とし、$v_k := v\ (k \in \mathbb{N})$ とする。このステップ幅 $\{v_k\}$ を用い Algorithm 1 により生成される点列を $\{x_k\}$ とする。このとき、ある数 $M \in [0,\infty)$ が存在し、

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \leq f_\star + L\left(\frac{v}{2}\right)^p, \quad \liminf_{k\to\infty} \|x_k - T(x_k)\|^2 \leq Mv$$

となる。

次の定理 2 は、Algorithm 1 が最小化問題の解へ弱収束する部分列を生成するために必要なステップ幅 $\{v_k\}$ の設定を与える。

定理 2 (漸減ステップ幅選択時の収束性) 仮定 1 が成り立つとし、関数 f が弱下半連続関数であるとする。ステップ幅 $\{v_k\} \subset (0, \infty)$ が、

$$\lim_{k\to\infty} v_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k = \infty$$

を満たすとし、これを用い Algorithm 1 により生成される点列を $\{x_k\}$ とする。この点列 $\{x_k\}$ について、$X^\star$ の点に弱収束する部分列が存在する。

いま、もし関数 f が狭義準凸関数であれば、最小化問題 (1) の解はただ 1 つに定まる。そこで、定理 [7, Theorem 3.2] より、下記の系 1 が導かれる。

系 1 (最適解への収束定理 [7, Theorem 3.2]) 定理 2 の仮定が成り立つとし、Algorithm 1 により生成される点列を $\{x_k\}$ とする。いま、関数 f が狭義準凸関数であり、なおかつ考察する空間が N 次元 Euclid 空間 $H = \mathbb{R}^N$ であるとする。このとき、点列 $\{x_k\}$ は最小化問題 (1) の唯一の解 $x^\star \in X^\star$ へ収束する。

4 応用例

Algorithm 1 の応用例として、Cobb-Douglas 生産効率問題 [3, Section 6] への適用を考える。

問題 2 (Cobb-Douglas 生産効率問題 [3, Problem (6.1)]) $a_j, b_{ij}, c_j, p_i \in [0, \infty)$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ とし、$\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$ であるとする。また、$a_0, c_0 \in (0, \infty)$ とする。関数 f_{profit} と f_{cost} をそれぞれ、

$$f_{\mathrm{profit}} := a_0 \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_j}, \quad f_{\mathrm{cost}} := \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0$$

と定める。このとき、次式で定義される最小化問題を **Cobb-Douglas 生産効率問題** という。

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } f(x) := -\frac{f_{\mathrm{profit}}(x)}{f_{\mathrm{cost}}(x)} \\ &\text{subject to } \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \geq p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \\ &\qquad\qquad\quad x \geq 0. \end{aligned}$$

この問題において、x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ は生産要素を表し、与えられた生産要素 x に対して、$f_{\mathrm{profit}}(x)$ は総利益を、$f_{\mathrm{cost}}(x)$ は生産への投資に必要な総コストをそれぞれ表す。この問題の目的は、上記の設定において、コスト対利益を最大化する生産要素 x を求めることである。ただし、事業

計画 $i=1,2,\ldots,m$ ごとに最低生産量 p_i が与えられており、これは生産要素 x に関する線形関数で表現されるものとする。

いま、問題 2 においては、最低生産量に関する m 個の制約と、生産要素の非負条件、併せて $m+1$ 個の制約が与えられている。最低生産量 p_i $(i=1,2,\ldots,m)$ に関する制約は、すべて n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 上の半空間として表されているので、それぞれについては距離射影 P_i を計算することができる [2, Example 28.15]。また、非負のベクトル全体の集合 $[0,\infty)^n$ への距離射影は、$P_0(x) := (\max\{x_j, 0\})_{j=1}^m$ として計算することができる。したがって、定理 [2, Propositions 4.8, 4.25, 4.34, and 4.35] より、

$$T := \frac{1}{2}\left(\mathrm{Id} + P_0\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P_i\right)\right)$$

と定めると、この写像 $T : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)^n$ は堅非拡大写像となり、その不動点集合 $\mathrm{Fix}(T)$ は問題 2 の制約集合と一致する。いま、関数 f は準凸関数であるので、問題 2 は Algorithm 1 に適用し解くことができる。

5 まとめ

本稿においては、制約付き準凸関数最小化問題を解くアルゴリズムについて議論した。準劣勾配法を含む、制約集合への距離射影を用いた最適化アルゴリズムは、その効率的な実行のために、この距離射影が容易に計算可能である必要があった。一方、制約集合への距離射影が容易に計算可能でないとしても、これらの集合を非拡大写像の不動点集合として表現することができる例は多く存在した。そこで本稿では、準凸関数最小化アルゴリズムである準劣勾配法に対し、非拡大写像の不動点を見つける Krasnosel'skiĭ-Mann 不動点アルゴリズムを組み込むことで、非拡大写像の不動点集合を制約とする準凸関数最小化アルゴリズムを構築し、またその収束解析を与えた。最後に、提案アルゴリズムの応用例として、Cobb-Douglas 生産効率問題への適用について述べた。以上より提案アルゴリズムが、既存手法と比較してより広範な制約付き準凸関数最小化問題に対する解法となり得ることが示された。

謝辞

本研究の遂行におきましては、研究発表および議論の機会を与えて下さりました横浜国立大学経営学部経営システム科学科の成島康史先生に、心より感謝申し上げます。

なお本研究は、JSPS 科研費 JP17J09220, JP15K04763 の助成を受けたものです。

参考文献

[1] Didier Aussel. New developments in quasiconvex optimization. In Saleh Abdullah R. Al-Mezel, Falleh Rajallah M. Al-Solamy, and Qamrul Hasan Ansari, editors, *Fixed Point*

Theory, Variational Analysis, and Optimization, chapter 5, pages 171–206. Chapman and Hall/CRC, 2014.

[2] Heinz H Bauschke and Patrick L Combettes. *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, volume 408. Springer, 2011.

[3] Yaohua Hu, Xiaoqi Yang, and Chee-Khian Sim. Inexact subgradient methods for quasi-convex optimization problems. *European Journal of Operational Research*, 240(2):315 – 327, 2015.

[4] Yaohua Hu, Carisa Kwok Wai Yu, Chong Li, and Xiaoqi Yang. Conditional subgradient methods for constrained quasi-convex optimization problems. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 17(10):2143–2158, 2016.

[5] Hideaki Iiduka. Iterative algorithm for solving triple-hierarchical constrained optimization problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 148(3):580–592, Mar 2011.

[6] Hideaki Iiduka. Parallel computing subgradient method for nonsmooth convex optimization over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings. *Fixed Point Theory and Applications*, 2015(1):72, 2015.

[7] Hideaki Iiduka. Convergence analysis of iterative methods for nonsmooth convex optimization over fixed point sets of quasi-nonexpansive mappings. *Mathematical Programming*, 159(1):509–538, Sep 2016.

[8] Hideaki Iiduka. Proximal point algorithms for nonsmooth convex optimization with fixed point constraints. *European Journal of Operational Research*, 253(2):503 – 513, 2016.

[9] Krzysztof C. Kiwiel. Convergence and efficiency of subgradient methods for quasiconvex minimization. *Mathematical Programming*, 90(1):1–25, Mar 2001.

[10] Igor V. Konnov. On convergence properties of a subgradient method. *Optimization Methods and Software*, 18(1):53–62, 2003.

[11] Mark Aleksandrovich Krasnosel'skii. Two remarks on the method of successive approximations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 10(1):123–127, 1955.

[12] W. Robert Mann. Mean value methods in iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4(3):506–510, 1953.

[13] Wataru Takahashi. *Introduction to Nonlinear and Convex Analysis*. Yokohama Publishers, 2009.

[14] Alessio Zappone and Eduard Jorswieck. Energy efficiency in wireless networks via fractional programming theory. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 11(3-4):185–396, 2015.

[15] 櫻井魁人. 非平滑で凸な目的関数に対する不動点制約付き最適化の並列計算. 明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻修士学位請求論文, 2017.

[16] 飯塚秀明. 不動点制約付き非平滑凸最適化とその応用. 日本オペレーションズ・リサーチ学会数理計画研究部会 第 *29* 回 *RAMP* シンポジウム論文集, pages 125–142, 2017.