

q-ガルニエ系の種々のラックス形式について

山田泰彦 (神戸大学大学院・理学研究科)
Yasuhiko Yamada (Kobe Univ.)

1 はじめに

微分ガルニエ系の q-差分類似として q-ガルニエ系が知られている [19]. この系は方程式がかなり複雑なため扱いが困難と思われていた. 最近になって, q-ガルニエ系の簡単な表示や他の高階/多変数的拡張との関係が分かってきたので, それらについて報告する.

2 q-ガルニエ系

2.1 2 × 2 ラックス形式

Sakai[19] による q-ガルニエ系は, 未知関数 $Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}$ に対する次のような 2 × 2 行列のラックス形式で与えられる

$$Y(qx) = \mathcal{A}(x)Y(x), \quad \bar{Y}(x) = \mathcal{B}(x)Y(x). \tag{1}$$

ここで, $\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)$ は x (および他のパラメータ) に依存する 2 × 2 行列であり, これらの両立条件

$$\bar{\mathcal{A}}(x)\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(qx)\mathcal{A}(x), \tag{2}$$

が q-ガルニエ系を与える. 記号 $\bar{}$ は, パラメータ達の適当な q 冪のずらしを表し, 行列 $\mathcal{A}(x)$ が $Y(x)$ に対する線形方程式を, 行列 $\mathcal{B}(x)$ がその変形を与える. q-ガルニエ系を与える行列 $\mathcal{A}(x)$ は次の性質により特徴づけられる¹.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \mathcal{A}(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_{N+1}x^{N+1}, \\ \text{(ii)} \quad & A_0 = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix}, \quad A_{N+1} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix}, \\ \text{(iii)} \quad & |\mathcal{A}(x)| = \kappa_1\kappa_2 \prod_{i=1}^{2N+2} (x - \alpha_i). \quad (\kappa_1\kappa_2 \prod_{i=1}^{2N+2} \alpha_i = \theta_1\theta_2) \end{aligned} \tag{3}$$

¹もう一方の行列 $\mathcal{B}(x)$ は変形の方によって色々に取り得る. 微分系では, 特異点の位置を変化させるか特性指数を変化させるかにより, ガルニエ系およびそのシュレジンガー変換の区別があるが, 差分系ではどちらも対等に扱えるので, 以下ではそれらまとめてガルニエ系と呼ぶ.

これらの条件を満たす行列 $A(x)$ は、パラメータ $\{\alpha_i, \kappa_i, \theta_i\}$ の他に、 $2N + 1$ 個の任意定数 (アクセサリ変数) を含む。そのうち 1 個はガルニエ系としては意味のないゲージ変換の自由度であり、残りの $2N$ 個が q -ガルニエ系の未知変数となる。 $2N$ 個の変数の選び方には様々の可能性があり、実際 [19] においてもいくつかの座標が与えられている。目的に応じて良い座標を見出すことが重要である。そのような座標と、それによる方程式の表示のいくつかを紹介する。

2.2 スカラー・ラックス形式

方程式 (1) の第 1 式 $Y(qx) = A(x)Y(x)$ すなわち

$$\begin{aligned} y_1(qx) &= a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x), \\ y_2(qx) &= a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x), \end{aligned}$$

から第 2 成分 y_2 を消去すると、 $y = y_1$ に対する次の方程式が得られる

$$L_1: \quad F\left(\frac{x}{q}\right)y(qx) - \left\{ F\left(\frac{x}{q}\right)a_{11}(x) + F(x)a_{22}\left(\frac{x}{q}\right) \right\} y(x) + F(x)|A\left(\frac{x}{q}\right)|y\left(\frac{x}{q}\right) = 0. \quad (4)$$

ここで、 $F(x) = a_{12}(x)$ は N 次多項式である。その零点は特異点のように見えるが、これは y_2 の消去によって現れた見かけの特異点であり、解 $y(x)$ はその点で正則である。

スカラー・ラックス形式では、 $L_1(x)$ が基本となる線形方程式である。行列 $A(x)$ を忘れて、スカラー方程式から議論を始める場合には、 $F(x) = 0$ の根を見かけの特異点とする条件として、 L_1 の係数について、

- $y(qx)$ と $y(x)$ の係数に共通の因子 $F(qx), F(x)$ が現れる
- $F(x) = 0$ として得られる $y(qx), y(x)$ の関係式と、 $F\left(\frac{x}{q}\right) = 0$ から得られる $y(x), y\left(\frac{x}{q}\right)$ の関係式とが整合的である

という制限が課す。これらは、“特性指数の差が 2 で解が非対数的” という微分系の場合の条件に (ラプラス変換を通して) 対応する。

方程式 L_1 の変形を与える方程式は、式 (1) の各第 1 成分を組み合わせ

$$L_2: \quad G(x)y(x) - b(x)y(qx) + F(x)\bar{y}(x) = 0, \quad (5)$$

となる。ここで、 $G(x) = a_{11}(x)b_{12}(x) - a_{12}(x)b_{11}(x)$ 、 $b(x) = b_{12}(x)$ とおいた。一方、(1) を $\bar{Y}(qx) = \bar{A}(x)\bar{Y}(x)$ 、 $\bar{Y}(qx) = \mathcal{B}(qx)Y(qx)$ と書き換え、これから $y_2(qx), \bar{y}_2(x), \bar{y}_2(qx)$ を消去すれば

$$\bar{a}_{12}(x)|\mathcal{B}(qx)|y(qx) - b(qx)|\bar{A}(x)|\bar{y}(x) - \{\bar{a}_{12}(x)b_{22}(qx) - \bar{a}_{22}(x)b_{12}(qx)\}\bar{y}(qx) = 0, \quad (6)$$

を得る. さらに, 両立条件 (2) を用いて係数を書き直せば

$$L_3 : \overline{F}(x)|\mathcal{B}(x)|y(qx) - b(qx)|\mathcal{A}(x)|\overline{y}(x) + G(x)\overline{y}(qx) = 0, \quad (7)$$

が得られる. 対 $\{L_2, L_3\}$ は対 $\{L_1, L_2\}$ と等価であり, 前者を**近接関係型スカラー・ラックス対**と呼ぶ. その両立条件から, 多項式 $F(x), G(x)$ に対する次の式が導かれる

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(x)|F(x)\overline{F}(x) &= b(x)b(qx)|\mathcal{A}(x)| \quad \text{for } G(x) = 0, \\ G(x)\underline{G}(x) &= b(x)b(qx)|\mathcal{A}(x)| \quad \text{for } F(x) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

関係式 (8) はそれぞれ $\deg G(x), \deg F(x)$ 個の条件式である. $\overline{F}(x), \underline{G}(x)$ の係数を全て決定するには少し足りないが, これらに適当な条件を付加すれば両立性の十分条件となり, q -ガルニエ系の1つの表示を与える [14]². この表示では多項式 $F(x), G(x)$ (の係数あるいは根) が未知変数となる. 次の章で, 多項式 $F(x), G(x)$ の幾何学的意味を考える.

3 自動化

楕円曲線 (種数 $g = 1$) 上の点の加法 $P_1 + P_2 = P_3$ は, 種数 g の代数曲線に対して $D_1 + D_2 = D_3$ と拡張される. ここに, $D = \{P_1, \dots, P_g\}$ は曲線上の g 個の点の組 (因子) である. 一般に, $g > 1$ のときの加法は, 点 P_i の座標 (λ_i, μ_i) についての有理変換ではない. しかし, 曲線が超楕円曲線の場合には, λ_i を根とする多項式 $a(x)$, および $\mu_i = b(\lambda_i)$ となる多項式 $b(x)$ を用いて, 加法を有理的に表すアルゴリズムが知られている [13, 11]. 前節の q -ガルニエ系の表示 (8) に現れた多項式 $F(x), G(x)$ は, 因子を表す多項式 $a(x), b(x)$ (Mumford 表現) に対応している. q -ガルニエ系の自動化を考えると, そのことがより明白になる.

T_x を x の q -ずらし作用素 $T_x x = qxT_x$ として, L_1 方程式を次のように表す

$$\left[F\left(\frac{x}{q}\right)T_x - \left\{ F\left(\frac{x}{q}\right)a_{11}(x) + F(x)a_{22}\left(\frac{x}{q}\right) \right\}y + F(x)|\mathcal{A}\left(\frac{x}{q}\right)|T_x^{-1} \right] y(x) = 0. \quad (9)$$

そこで $q \rightarrow 1$ とすると, $v := T_x$ は x と可換な変数となり, 差分方程式 (9) は次の代数方程式 $\mathcal{A}(x)$ の特性方程式) になる

$$L_1 : v - U(x) + \frac{|\mathcal{A}(x)|}{v} = 0. \quad (10)$$

ここで $U(x) = \text{Tr}\mathcal{A}(x)$, $|\mathcal{A}(x)|$ は次数 $N+1, 2N+2$ の多項式であり, (10) は種数 $g = N$ の超楕円曲線を表す. 同様に L_2, L_3 の $q \rightarrow 1$ 極限は

$$\begin{aligned} L_2 : G(x) - b(x)v + F(x)T &= 0, \\ L_3 : \overline{F}(x)|\mathcal{B}(x)|v - b(x)|\mathcal{A}(x)|T + G(x)vT &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

²多項式 $G(x)$ は次数も含めて $\mathcal{B}(x)$ の選び方に依存する. このため付加条件の取り方も変形方向に依る. 後で具体例について述べる.

となる. ただし T は時間発展作用素 $T(f) = \bar{f}$. これらの両立条件として

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(x)|F(x)\overline{F(x)} &= b(x)^2|\mathcal{A}(x)| \quad \text{for } G(x) = 0, \\ G(x)\underline{G(x)} &= \underline{b(x)}b(x)|\underline{\mathcal{A}(x)}| \quad \text{for } F(x) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

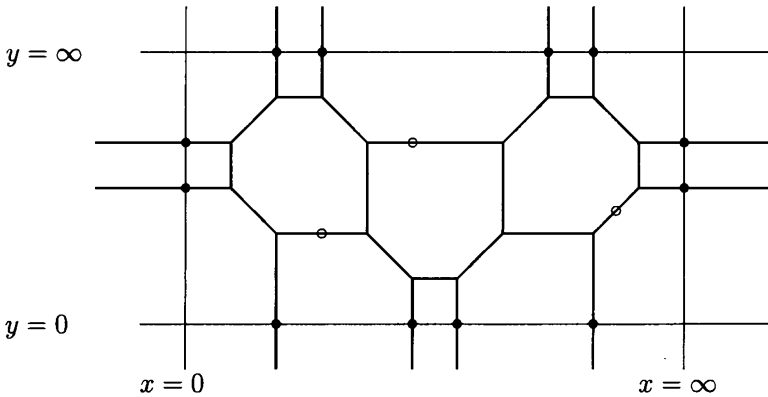
が得られる. $q = 1$ なので, パラメータは時間発展で変化しないが $F(x), G(x)$ の時間発展は非自明であることに注意しよう. この時間発展は超楕円曲線 (10) 上の加法定理に他ならない. 実際, $F(x) = 0$ の根 $x = \lambda_i$ とその点での $v_i = \frac{G(\lambda_i)}{b(\lambda_i)}$ が曲線 (10) 上の N 個の点を与えており, 多項式 $F(x), G(x)$ はこれらの点の Mumford 表現に対応している.

双次数 $(2, 2)$ の楕円曲線 (の 1 次元族) を保存曲線とするような離散力学系として QRT 系がある [17]. これは x 方向および y 方向の自然な involution の交互の合成で与えられる [22]. 方程式 (12) は, 種数 $N = 1$ の場合には QRT 系であり, 一般の N では, その超楕円曲線への拡張とみなせる. 以上の考察の副産物として, QRT 系のラックス形式は微分方程式や差分方程式ではなく, 代数方程式の変形方程式として考えるべきであったことがわかる.

例として $N = 3$ の場合の曲線

$$\prod_{i=1}^4 (x - a_i)y - U(x) + \prod_{i=5}^8 (x - a_i) \frac{1}{y} = 0,$$

を超離散極限で示しておこう. y と y^{-1} のバランスが良いグラフにするため, 行列式 $|\mathcal{A}(x)| = \prod_{i=1}^8 (x - a_i)$ の因子の半分を用いて $v = y \prod_{i=1}^4 (x - a_i)$ と座標変換した. 白丸で示した 3 点が従属変数に対応する.



一般に, (x, y) 平面上の $(2, 2)$ 次曲線と $(N + 1, 2)$ 次曲線は $2N + 6$ 点で交わる. これらのうち $2N + 5$ 点を通る $(N + 1, 2)$ 次曲線は N 次元族をなし, それらはすべて $2N + 6$

番目の点を共通零点に持つ。超楕円曲線上の QRT 系は、このような配置にある $2N + 6$ に対して一般的に構成でき、上述の場合は、 $2N + 6$ 点として直線 $x = 0, \infty$ 上の 4 点、および直線 $y = 0, \infty$ 上の $2N + 2$ 点をとった場合に相当する。配置が generic で N 次元族の基点とならない場合にも、 $N = 1$ の場合 [9] と同様に、点配置を適当に動かしながら加法定理を適用することで非自励化が可能で、楕円差分ガルニエ系と呼ぶべきものが得られる。これは、Ormerod-Rains [16] により最近構成された楕円差分ガルニエ系と等価であると予想される。

4 q -KP からの構成

4.1 q -KP の相似簡約の双対性

論文 [8] において、 q -KP 階層の相似簡約のラックス形式として次のような線形方程式が考察された

$$\Psi(qz) = \mathcal{A}(z)\Psi(z), \quad \mathcal{A} = dX_m(z) \cdots X_2(z)X_1(z), \quad (13)$$

ここに

$$X_i(z) = \begin{bmatrix} x_{i,1} & 1 & & & \\ & x_{i,2} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x_{i,n-1} & 1 \\ r_i z & & & & x_{i,n} \end{bmatrix}, \quad d = \text{diag}(t_1, \dots, t_n),$$

である³。この線形差分方程式を以下では簡単のため mn 系という。この系は、 $W(A_{m-1}^{(1)}) \times W(A_{n-1}^{(1)})$ 型 affine Weyl 群対称性を持ち [7]、その平行移動は、 $(m, n) = (2, 3), (2, 4)$ の場合に q -パンルヴェ方程式を与える [8, 12, 21]。また、 $W(A_{m-1}^{(1)}) \times W(A_{n-1}^{(1)})$ の作用は、(A 型のトロピカル R 、幾何学的 R などと呼ばれる) 双有理 Yang-Baxter 写像で表される [24, 10]。 q -UC 階層への拡張 [23] や量子化 [1, 5] など考えられている。

次は、自励系な場合 [7] には知られていた。

Theorem 4.1 ($m \leftrightarrow n$ 双対性) mn 系と nm 系は等価である。

(証明) m 個の n 次行列 X_i 行列から作られる mn 系の線形方程式 $\Psi(qz) = \mathcal{A}(z)\Psi(z)$ において、 $\Psi_1(z) = \Psi(z)$, $\Psi_{i+1}(z) = X_i(z)\Psi_i(z)$ ($1 \leq i \leq m$) とおき、 $\Psi_i(z)$ の第 j 成分を

³便宜上、冗長ではあるが、より一般的なパラメータ t_i, r_i を導入した。

$\Psi_{i,j}$ とすれば

$$\Psi_{i+1,j} = x_{i,j} \Psi_{i,j} + \Psi_{i,j+1},$$

$$\Psi_{m+1,j} = t_j^{-1} T_z \Psi_{1,j},$$

$$\Psi_{i,n+1} = r_i z \Psi_{i,1},$$

を得る. これは, 次の読み替え

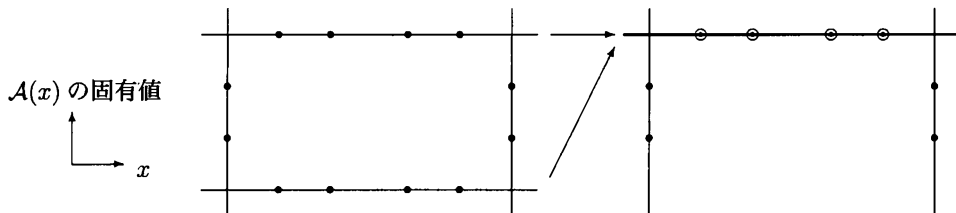
$$m \leftrightarrow n, \quad \Psi_{i,j} \leftrightarrow \Psi_{j,i}, \quad x_{i,j} \leftrightarrow -x_{j,i}, \quad r_k \leftrightarrow t_k^{-1}, \quad z \leftrightarrow T_z,$$

により nm 系の線形方程式に変換される.

(証明終わり)

注意. $z \leftrightarrow T_z$ は一種の q -ラプラス変換であり $T_z z = qzT_z$ を $zT_z = qT_z z$ に移す. 交換関係を保つには同時に $T \rightarrow T^{-1}$ (または $z \rightarrow z^{-1}$) とすれば良い.

この双対性は, 以下の図の縦方向 n (行列サイズ) と横方向 m (特異点の個数) が, 微分系(図右)では異質であるが q -差分系(図左)では入れ替え可能であることを意味している⁴. 弦理論における fiber-base duality[2] に関係していると思われる.



4.2 q -ガルニエ系の構成

mn 系の変形として q -ガルニエ系を構成する. これは q -KP の簡約として以前構成された離散 Painlevé 型方程式 [8] を変形したものである. 前節の双対性により 2 通りの等価な構成が考えられる.

その 1. $(m, n) = (2, \nu)$, $\nu = 2N + 2$ の場合.

$$A(z) = X_2(z)X_1(z) = \begin{bmatrix} y_1 & 1 & & & \\ & y_2 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & y_{\nu-1} & 1 \\ r_2 z & & & & & y_\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 & & & \\ & x_2 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x_{\nu-1} & 1 \\ r_1 z & & & & & x_\nu \end{bmatrix}.$$

因数分解した形で書かれてはいないが, この $A(z)$ と同じ型の行列を係数とする q -差分方程式のモノドロミー保存変形が q -Drinfeld-Sokolov 階層の相似簡約の観点から Suzuki

⁴楕円差分系ではそれらの区別もなくなる.

によって調べられた。それらは q - P_{VI} のある多変数化であり、 q 一般超幾何関数で表される特殊解をもつ [20]。簡単のため、変形方向を $\mathcal{B}(z) = X_1(z)$ とした場合を考える。⁵ この場合の両立条件 $\overline{\mathcal{A}}(z)\mathcal{B}(z) = \mathcal{B}(qz)\mathcal{A}(z)$ すなわち $\overline{X}_2(z)\overline{X}_1(z) = X_1(qz)X_2(z)$ は、次のように表される (本質的には幾何学的 R -写像)

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= x_j \frac{P_{j+1}}{P_j}, \quad \bar{y}_j = y_j \frac{P_j}{P_{j+1}}, \quad \bar{r}_1 = r_2, \quad \bar{r}_2 = qr_1, \\ P_1 &= \sum_{k=1}^{\nu} \left(\prod_{j=1}^{k-1} x_j \right) \left(\prod_{j=k+1}^{\nu} y_j \right), \quad P_{j+1} = \mu \pi(P_j), \quad \mu = \frac{r_2}{qr_1}. \end{aligned} \quad (14)$$

ただし $\pi(x_j) = \mu^{-\delta_{j,\nu}} x_{j+1}$, $\pi(y_j) = \mu^{-\delta_{j,\nu}} y_{j+1}$, $\pi(r_i) = r_i$.

この時間発展で、 $a_i := x_i y_i$ は不変であり、 $c := \prod_{j=1}^{\nu} x_j$ は $\bar{c} = c\mu$, $\bar{\mu} = \frac{1}{\mu q}$ と変換する。また、変換 $x_{2i+1} \rightarrow wx_{2i+1}$, $x_{2i} \rightarrow w^{-1}x_{2i}$ に対する不変性もある。これらのことから、この力学系の自由度は $2N$ となる。

mn 双対性によって、この系は次のように 2×2 行列で表すこともできる。

その 2. $(m, n) = (\nu, 2)$, $\nu = 2N + 2$ の場合

$$\mathcal{A}(z) = \begin{bmatrix} r_1^{-1} & \\ & r_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\nu} & 1 \\ z & y_{\nu} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ z & y_1 \end{bmatrix}.$$

とすれば、

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathcal{A}(z) &= A_0 + A_1 z + \cdots + A_N z^N + A_{N+1} z^{N+1}, \\ \text{(ii)} \quad A_0 &= \begin{bmatrix} \theta_1 & * \\ & \theta_2 \end{bmatrix}, \quad A_{N+1} = \begin{bmatrix} r_1^{-1} & \\ * & r_2^{-1} \end{bmatrix}, \\ \text{(iii)} \quad |\mathcal{A}(z)| &= (r_1 r_2)^{-1} \prod_{i=1}^{\nu} (z - a_i), \quad (\theta_1 \theta_2 = (r_1 r_2)^{-1} \prod_{i=1}^{\nu} a_i) \end{aligned} \quad (15)$$

ここに $\theta_1 = r_1^{-1} \prod_{i=1}^{\nu} x_i$, $\theta_2 = r_2^{-1} \prod_{i=1}^{\nu} y_i$, となる。この $\mathcal{A}(z)$ は、下三角行列によるゲージ変換で (3) の $\mathcal{A}(z)$ に変換できる。**その 1** で考察した方向の変形は、この表示では $\mathcal{B}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & \bar{y}_1 - x_1 \end{bmatrix}$ で与えられる。対応する時間発展方程式の QRT 型表示 (8) は次のようになる

$$\begin{aligned} zF(z)\overline{F}(z) &= - \prod_{i=1}^{\nu} (z - a_i) \quad \text{for } G(z) = 0, \\ G(z)\overline{G}(z) &= \prod_{i=1}^{\nu} (z - a_i) \quad \text{for } \overline{F}(z) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

⁵Suzuki が用いた $\mathcal{B}(z)$ 行列も以下の議論を少し変更すれば類似の扱いが可能である。

ここに, $F(z) = \sum_{i=0}^N f_i z^i$, $G(z) = z^{N+1} + \sum_{i=1}^{N-1} g_i z^i + c$ である. $F(z)$ の規格化因子はゲージの自由度である. 一方, 多項式 $G(x)$ の定数項は上のように指定される (これが, この場合の付加的な条件となっている).

上記の方程式 (16) を $N = 1$ の場合に見ておこう. $F(z) = 0$ の根を f , $G(z) = r_1^{-1}(z^2 - gz + c)$ とすれば, この (f, g) を変数として次の方程式を得る

$$\begin{aligned} \frac{(\bar{f} - z)(f - z)z}{(\bar{f} - \frac{c}{z})(f - \frac{c}{z})\frac{c}{z}} &= \prod_{i=1}^4 \frac{z - a_i}{z - \bar{a}_i}, \quad (\text{for } z^2 - gz + c = 0) \\ (f^2 - \underline{g}f + \underline{c})(f^2 - gf + c) &= \prod_{i=1}^4 (f - a_i), \\ \bar{c} = c\mu, \quad \bar{\mu} &= \frac{1}{\mu q}. \end{aligned} \quad (17)$$

この方程式の特異点は, (f, g) 座標で

$$\begin{aligned} P_i &= (a_i, a_i + \frac{c}{a_i}) \quad (1 \leq i \leq 4), \quad P_5 = (\infty, \infty), \quad P_6 = (\frac{\mu}{\epsilon}, \frac{\mu-1}{\epsilon})_{\epsilon \rightarrow 0}, \\ P_7 &= (0, \infty), \quad P_8 = (\epsilon, (c - \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{q c \mu}) \frac{1}{\epsilon})_{\epsilon \rightarrow 0}, \end{aligned} \quad (18)$$

である. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ をこれらの 8 点で $P_i \leftarrow E_i$ と blow up した曲面 X は, 標準因子 \mathcal{K}_X が

$$\begin{aligned} -\mathcal{K}_X &= \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3, \\ \mathcal{D}_0 &= 2H_1 + H_2 - E_1 - \cdots - E_6, \\ \mathcal{D}_1 &= E_5 - E_7, \quad \mathcal{D}_2 = H_2 - E_5 - E_7, \quad \mathcal{D}_3 = E_7 - E_8, \end{aligned} \quad (19)$$

であり, 標準的なもの [18] とは異なるが $A_3^{(1)}$ 型曲面 (すなわち q - P_{VI} の初期値空間) である. ただし, 式 (17) の時間発展 T は q - P_{VI} とは異なる [21]. 実際, 方程式の特異点を追跡して T の Picard 格子への作用を求めると

$$\begin{aligned} H_1 &\rightarrow H_1 + 2H_2 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4, \\ H_2 &\rightarrow 3H_1 + 3H_2 - 2E_1 - 2E_2 - 2E_3 - 2E_4 - E_5 - E_6, \\ E_i &\rightarrow H_1 + H_2 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 + E_i, \quad (1 \leq i \leq 4) \\ E_5 &\rightarrow E_7, \\ E_6 &\rightarrow E_8, \\ E_7 &\rightarrow H_1 + 2H_2 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_6, \\ E_8 &\rightarrow H_1 + 2H_2 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5, \end{aligned} \quad (20)$$

となり, T の合成 $T^2 = T \circ T$ がルート $\alpha = H - E_7 - E_8$ に対する平行移動 T_α となる. 関係式

$$f = \frac{a_1 a_2 y - c}{x(y-1)}, \quad y = \frac{f^2 - fg + c}{(f - a_1)(f - a_2)}, \quad (21)$$

によって (f, g) から (x, y) に変換すれば, x, y 変数の時間発展は

$$x\bar{x} = c \frac{a_1 a_2 \bar{y} - c\mu}{c\bar{y} - a_3 a_4}, \quad y\bar{y} = \frac{(a_3 x - c)(a_4 x - c)}{c(x - a_1)(x - a_2)}, \quad (22)$$

となる. この方程式の特異点は

$$(x, y) = (a_1, \infty), (a_2, \infty), \left(\frac{c}{a_3}, 0\right), \left(\frac{c}{a_4}, 0\right), \left(0, \frac{c}{a_1 a_2}\right), \left(0, \frac{1}{\mu}\right), (\infty, 1), \left(\infty, \frac{a_3 a_4}{qc\mu}\right), \quad (23)$$

であり, 標準的な $A_3^{(1)}$ 型の点配置である.

2×2 の \mathcal{A} 行列 $\mathcal{A}(z) = dX_4(z)X_3(z)X_2(z)X_1(z)$ に対して q - P_{VI} の時間発展 [4] を得るには, 変形行列として $\mathcal{B}(z) = X_2(z)X_1(z)$ を取れば良い. この場合の時間発展は, 4 個の行列の積において⁶, 2 個づつを対にした入れ替えにより表される

$$\begin{array}{cccc} X_2(qz) & X_1(qz) & dX_4(z) & X_3(z) \\ & \searrow & \nearrow & \nearrow \\ & & \searrow & \nearrow \\ \overline{dX_4(z)} & \overline{X_3(z)} & \overline{X_2(z)} & \overline{X_1(z)} \end{array}$$

この表示は Hasegawa による量子 q - P_{VI} の Lax 形式との類似が見られる [3]. 双対な 4×4 の表示では, そこに自然に作用する affine Weyl 群 $\tilde{W}(A_3^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, s_3, \pi \rangle$ の元 $s_2 s_1 s_3 s_2 \pi^2$ の作用として実現され, 対応する B 行列は

$$\mathcal{B}(z) = (1 + u_1 E_{3,2})(1 + u_2 E_{2,1})(1 + u_3 E_{4,3})(1 + u_4 E_{3,2}) \Lambda_{r_2 z} \Lambda_{r_1 z}, \quad (24)$$

で与えられる. ここで, $E_{i,j}$ は行列単位, Λ_z は次の巡回ずらし行列である

$$\Lambda_z = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \\ z & & & & \end{bmatrix}. \quad (25)$$

注意. 方程式 (17) は q - P_{VI} とは異なる方向の時間発展であったが, ほとんど同じ式で q - P_{VI} と同値な方程式もある. 紛らわしいが⁶, 比較のため敢えて示しておこう.

$$\begin{aligned} \frac{(\bar{f} - z)(f - z)z}{(\bar{f} - \frac{k}{z})(f - \frac{k}{z})\frac{k}{z}} &= \prod_{i=1}^4 \frac{z - a_i}{\frac{k}{z} - a_i}, \quad (\text{for } z^2 - gz + k = 0) \\ \frac{b_2 a_1 a_2}{k b_1} (f^2 - \underline{g}f + qk)(f^2 - gf + k) &= \prod_{i=1}^4 (f - a_i), \\ \bar{a}_i &= a_i, \quad \bar{b}_i = b_i, \quad \bar{k} = \frac{k}{q}. \end{aligned} \quad (26)$$

⁶積をとる行列の半分を逆行列にしておくと T_z, T_z^{-1} のバランスが良くなる.

これは, (21) と同様の変換

$$f = \frac{y - \frac{b_1 a_3 a_4}{qk}}{x(y - b_1)}, \quad y = \frac{b_2 a_1 a_2}{k} \frac{f^2 - fg + k}{(f - a_1)(f - a_2)}, \quad (27)$$

によって, 標準的な q - P_{VI}

$$x\bar{x} = \frac{(y - \frac{b_2 a_1 a_2}{k})(y - \frac{b_1 a_3 a_4}{k})}{a_1 a_2 (y - b_1)(y - b_2)}, \quad y\bar{y} = \frac{b_1 b_2 (x - \frac{a_3}{qk})(x - \frac{a_4}{qk})}{(x - \frac{1}{a_1})(x - \frac{1}{a_2})}, \quad (28)$$

に変換される.

5 まとめと今後の課題

本稿では以下のことを述べた.

- q -ガルニエ系のスカラー・ラックス形式
- 自動化としての超楕円 QRT 系
- q -ガルニエ系と q -KP, KNY 系, Suzuki の系との関係
- $m \leftrightarrow n$ の双対性

これらの結果が示しているように, q -ガルニエ系は意外に簡単で, かつ様々な話に関係がある. Padé 近似/補間の方法を用いた特殊解の構成を [14] で与えたが, これ以外にも今後色々な展開があると期待される.

謝辞

講演の機会を与えていただいた津田照久さん, 有益なご議論をいただいた研究会の参加者の皆さん, 共同研究者の長尾秀人さんに感謝します. 本研究には科学研究費 (基盤研究 B, 26287018) の補助を得ています.

References

- [1] Doliwa A., *Non-commutative rational Yang-Baxter maps*, Lett. Math. Phys. **104** (2014), 299–309.
- [2] Mitev V., Pomoni E., Taki M., and Yagi F., *Fiber-Base Duality and Global Symmetry Enhancement*, arXiv:1411.2450.

- [3] Hasegawa, K., *Quantizing the discrete Painlevé VI equation: the Lax formalism*, Lett. Math. Phys., **103**, (2013) 865–879.
- [4] Jimbo M., and Sakai H., *A q -analog of the sixth Painlevé equation*, Lett. Math. Phys., **38** (1996), 145–154.
- [5] Kuroki G., *Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems*, in "Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics", Adv. Stud. Pure Math., **61** (2011), 289–325.
- [6] Kajiwara K., Noumi M., and Yamada Y., *Geometric aspects of Painlevé equations*, J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017), 073001 (164pp) (Topical Review). arXiv 1509.08186 [nlin.SI].
- [7] Kajiwara K., Noumi M., and Yamada Y., *Discrete dynamical systems with $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$ symmetry*, Lett. Math. Phys. **60** (2002), 211–219.
- [8] Kajiwara K., Noumi M., and Yamada Y., *q -Painlevé systems arising from q -KP hierarchy*, Lett. Math. Phys. **62** (2002), 259–268.
- [9] Kajiwara K., Masuda T. Noumi M., Ohta Y., and Yamada, *${}_{10}E_9$ solution to the elliptic Painlevé equation*, J. Phys. **A36** (2003), L263–L272.
- [10] Kuniba A., Okado M., Takagi T., and Yamada Y., *Geometric crystal and tropical R for $D_n^{(1)}$* , Int. Math. Res. Not. (2003), 2565–2620.
- [11] コブリッツ N., (林 彬 訳) 「暗号の代数理論」(1999) シュプリンガー・ジャパン.
- [12] Masuda T., *On the rational solutions of q -Painlevé V equation*, Nagoya Math. J. **169** (2003), 119–143.
- [13] Mumford D., *Tata Lectures on Theta, II*, Birkhäuser, (1984).
- [14] Nagao H., and Yamada Y., *Study of q -Garnier system by Padé method*, Funkcialaj Ekvacioj, to appear.
- [15] Ormerod C. M., and Rains, E. M., *Commutation relations and discrete Garnier systems*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **12** (2016), Paper No. 110, 50 pp.
- [16] Ormerod C. M., and Rains, E. M., *An elliptic Garnier system*, arXiv:1607.07831.

- [17] Quispel G. R. W., Roberts J. A. G., and Thompson C. J., *Integrable mappings and soliton equations II* (1989), *Physica D* **34** 183–92.
- [18] Sakai, H., *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*. *Comm. Math. Phys.* (2001), **220**, 165–229.
- [19] Sakai H., *A q -analog of the Garnier system*, *Funkcialaj Ekvacioj* **48** (2005), 273–297.
- [20] Suzuki T., *A q -analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type A and q -Painlevé system*, *AMS Contemp. Math.* **651** (2015), 25–38.
- [21] Takenawa T., *Weyl group symmetry of type $D_5^{(1)}$ in the q -Painlevé V equation*, *Funkcial. Ekvac.* **46** (2003), 173–186.
- [22] Tsuda T., *Integrable mappings via rational elliptic surfaces*, *J. Phys. A:Math. Gen.* **37** (2004), 2721–2730.
- [23] Tsuda T., *On an integrable system of q -difference equations satisfied by the universal characters: its Lax formalism and an application to q -Painlevé equations*, *Comm. Math. Phys.* **293** (2010), 347–359.
- [24] Yamada Y., *A birational representation of Weyl group, combinatorial R -matrix and discrete Toda equation*, in "Physics and combinatorics, 2000", World Sci. Publ., (2001), 305–319.