数理解析研究所講究録
第2072巻 2018年 152-166

－数学教師養成のための数学専門科目－

重視すべき６つの視点に基づく標準モデルの修正

－代数学分野・確率統計分野－

滋賀大学名誉教授　丹羽　雅彦　(Masahiko NIWA)
Shiga University

１.重視すべき６つの視点とは

数学教師としての資質・能力[注]の育成を図るために，数学専門科目の内容項目の選択と授業の構成において，以下の６つの視点 **a～f** を重視すること。

a　**数学の体系的理解**

数学という学問は，数学的事実の単なる寄せ集めではなく，全体が大きな体系をなしていること，すなわち，この体系の中で諸概念が相互に深くつながっていることや，数学概念をさらに抽象化することにより様々な対象が同じ構造をもつものとして統一的に理解できること.

b　**学校数学との繋がり**

小学校算数や中学・高校数学との繋がり(発展的内容というだけでなく，高い立場から見るという視点も重要)があること.

c　**現実世界との繋がり**

我々を取りまく世界の至る所に数学が現れ，数学によって世界の一面を理解できること.

d　**数学の実用性**

数学が実生活や社会で応用されている(役立っている)こと.

e　**数学の文化的価値**

数学の歴史および美的価値(面白さ，美しさ).

f　**探究的活動**

自らの数学的発想力を伸ばすとともに，子どもたちに算数・数学の面白さ・奥深さを伝え，興味・学習意欲を喚起し，授業が活発な創造の場となるよう工夫できる能力を育てること.

注 … 数学教師として育成すべき資質・能力とは［３］で提起した次のものである。

数学専門科目によって育成すべき資質・能力とは、

(1) 算数・数学を学校教育において教えることの意義を理解し、数学の本質を正しく認識して自信をもって数学を指導できる能力。

(2) 抽象的思考に慣れ、論理的に正しい思考を展開し表現できる能力。

であり、そのために具体的には、次のような能力の育成をめざすことが求められる。

① 学校教育における算数・数学科の内容の背景にある数学の理論の本質を理解し、教科内容において重点をおくポイントおよび必要性の低さを的確に見抜く能力。

② 学校数学の内容における重要なポイントに対して独自の工夫を加え、内容を明確で分かりやすく説明できる能力。

③ 子どもの発言やつぶやき、またつまずきに含まれる発想の芽や本質的な点を見逃さず拾い上げ発展させる授業が展開できる能力。

④ 知的好奇心を呼び起こす教材や数学的活動を創意工夫して作りだし、子どもの興味・関心をひき出す授業を展開できる能力。

⑤ 数学の面白さや美しさを伝えて、子どもの興味・関心を育てる能力。

⑥ 子供が数学を創造するような知的探求の場とする授業を実践できる能力。

⑦ 教科内容がどのように変更されようと、主体的な教材研究を行い的確な対応ができる能力。

これらの目的を達成できる教員を育成するためには、養成段階である大学教育において充実した数学専門科目の教育が絶対に必要である。

2.標準モデルとは

標準モデルとは、数理解析研究所講究録 1711 号「数学教師に必要な数学能力に関する研究」[3]に掲載されている丹羽・松岡・川崎・大竹・伊藤著「中学校・高等学校の数学教師の養成における数学専門科目の標準的なモデルの構想」の標準的モデルを指す。
標準的モデルは、全国国立大学法人の教員養成系大学・学部の数学専門科目担当者の多数が必要だと考えていることが(私たちの調査により)明確になった内容項目に基づいて、私たちのグループが構成したものである。

3.修正のために留意する全体的な観点

(1) 内容項目の選択は, 重視すべき **6つの視点 a～f**

a 数学の体系的理解　**b 学校数学との繋がり**　**c 現実世界との繋がり**
d 数学の実用性　**e 数学の文化的価値**　**f 探究的活動**

に基づき構成(修正)しようというのが私たちの提案である。特に, 授業では要素 **a** に偏らず, **b, c, d, e, f** 5要素も必ず入るように意識することが重要である。また **a** における学問的な内容についても, 専門性の高いものではなく, 包括的であって数学の体系性に配慮した内容が望ましい。

(2) 必修単位が少なく時間的な制約によって数学の学問としての分野である代数学・幾何学・解析学・確率論・統計学などの導入部分程度しか講義できないという現実があるが, それでは目的を達成できないと考える。数学教師になる学生が高校までに学んだ内容より進

んだ数学専門の内容を学ぶべきであるということは大半の方々が認めることだが，表面的な知識だけを学ぶのでは（例えば，群の定義と簡単な例だけ学んでも，意味や役割－どのように応用するかーということまで理解できていないと）教師の力量として役立てることはできないであろう。学んだ内容を様々な分野に応用する力を育てる授業内容を目指して工夫すべきである。

(3) 教員養成系の授業では、(理学部数学科などの)数学研究者の養成を目的とする学科の授業とは違い、ある定理について長く厳密な証明を行う授業や、定理・命題と証明が次々に連なる形式の授業は避けるべきである。数学教師を目指す学生の大多数が自らの数学の専門能力を伸ばしたいという強い意欲をもっていることは事実であるが，抽象的な話題や推論ばかり続く授業ではほとんどの学生が挫折して思考停止に陥るであろう。証明の扱いにおいては過度に厳密性に拘ることは避け，内容が直観的に納得できることや仕組みや発想が分かることを重視したい。また，証明は省略しても、様々な観点から「何故そのようなことが成りたっているのか」という理由を説明できるようにすることは求められる。「なぜ」は数学の本質であり、「なぜ」なくしては理解と応用に繋がらないからである。

(4) 授業で扱う話題には 必ず動機または意味づけを扱いたい。また，現代数学を創造する研究を目標とする数学科等とは異なり，教員養成系では古代からの数学の発展の全体像について触れることが求められる。つまり歴史的視点(時系列発展)と文化的視点(さまざまな文化を理解)が必要である。

(5) 応用分野を（例題程度のものから新しい話題まで種々ありうるが）必ず扱うべきである。実例や応用は，学ぶ動機を与え，学ぶ内容を深めるのに役立つので授業のあらゆる場面で積極的にとり入れたい。

(6) 教員養成系では教科専門に割く時間が限られているので授業の密度を上げる必要がある。従って，各回の授業では，その時間内に内容が理解できかつ計算や証明ができるような話題があり，受講者にとって目標が明確に見えるような授業を組み立てることが望まれる。さらに，小テストまたは宿題を毎回課すなどの工夫が必要である。なお，上で包括的・体系的な視点が必要であると述べたが，それは数学について浅く広く講義するという意味ではなく，各回はポイントが絞られた授業をするが積み上げてみると包括性・系統性が担保されているという意味である。

(7) 教員養成系では（要素 b，f に関連して）学校数学への橋渡しと数学化プロセスのための「事例演習」を，数学専門科目のほかに例えば教科教育科目として，設けることが望まれる。これらを実施することで，学生がすべての授業で自主的かつ積極的に取り組むようになることが期待される。

(8) 全般的には，<u>内容項目は減らし</u>，<u>理論的側面より応用指向重視</u>で進める。

[Ⅰ．代数学分野]

4．代数学分野における修正

(1) 6つの視点から代数学分野の授業内容を検討

代数学分野の内容は、線型代数学、集合と論理の基礎、初等整数論、群・環・体など代数構造の基礎からなる。

[a 体系的理解]と**[b 学校数学との関連]**の観点からは、①学校数学における四則演算を統一的な視点から見直すこと、②代数的構造を問題解決の道具とすること、という２つの面が最も重要である。「集合と論理の基礎」においては、数学的理論（または数学という学問）の特徴である「述語論理」とは何かを理解させたい。さらに，代数学の授業で、易しい場合には自分で証明を行うことができることを目標にして，証明の訓練を少しだけすることが望ましい（典型的な証明をまるごと記憶するなど)。

[c 現実世界との繋がり]，**[d 数学の実用性]**，**[e 数学の文化的価値]**の観点からは，①歴史的視点から考えること，②数学以外の学問・科学技術・社会との繋がりを考えることが重要である。

[f 探究的活動]については、講義形式の授業の他にいくつかの演習(セミナー)を設け、その中で探究的活動を行うことが望ましい。さらに、講義形式の授業であっても、課題（または問題）を軸とした授業構成が効果的である。学生は授業中に常に頭を働かせ考え、発表したり議論をしたりする。こうした形式では各回の授業で理解すべき内容が明確になり学生の資質能力の向上が図れることが知られている。

(2) 個々の単元からの考察

「線型代数学」

２コマの授業ならば、講義の内容項目については標準モデル案くらいの量でちょうどよいと考えられるが、教員養成系では理論的側面を縮小して線型代数の応用的内容をもっと増やしたい。特に、量と数の理論など学校数学との関連にも注目したいし、点とベクトル（アフィン空間とベクトル空間)、座標空間における直線・平面のベクトル方程式と方程式の違いと相互関係（外延的定義と内包的定義）などの線型代数の幾何学的応用を大幅にとりいれたい。

「集合と論理の基礎」

半コマ程度で最低限の内容を行うことが可能であると考える。長時間にわたり深い内容を行うのは逆効果でコンパクトさも重要である。いずれかの授業の中で必ず扱う必要があるが、やはり代数学で行うのが適切か。

「初等整数論」

応用に繋がる項目が多く、教員養成系では是非とも採り挙げたい内容である。

「代数構造ー群・環・体ーの基礎」

ガロア理論まで扱うことは不必要であると考える。(理由：種々の授業構成が考えられるが、どのように展開しても複雑かつ長すぎる証明が必要になり、教員養成系では授業効果を挙げることが難しい。）しかし、体の基礎に入っている内容は、BHC 符号や QR コード等の面白い応用もあるので扱うべきだろう。群の基礎、可換環の基礎の部分は、上に述べた論理的訓練に適した内容や学校数学との関連を重視して内容を絞り込みたい。

上記の視点により修正した新標準モデルは以下の通りである。

数学専門科目の標準モデルの修正案：代数学関連の部分

分野	単元	講義内容の項目
線型代数	線型代数	1. 行列の定義, 行列の演算, 正則行列, 逆行列の計算法. 2. 行列式の置換を用いた定義, 行列式の展開と計算法. 3. 数ベクトル空間, 線型写像とその行列表示. 4. 連立1次方程式の解法（クラメルの公式, 掃き出し法）. 5. アフィン部分空間, 内積・外積, 面積・体積等の幾何学的性質. 6. ベクトル空間, 一次独立・一次従属, 部分空間, 基底・次元. 7. 線型写像と行列の階数の概念. 核・像の次元公式. 8. 一般の連立1次方程式の解法. 9. 固有値, 固有ベクトル, 行列の三角化(Jordan 標準形入門). 10. 内積, 計量ベクトル空間, 直交直和分解. 11. 対称行列の直交行列による対角化. 12. 2次曲線・2次曲面の分類.
集合と論理の基礎	集合・写像・論理の基礎	1. 集合の基本的記号. 簡単な論理入門(特に∀∃を含む述語論理). 2. 写像, 全射・単射・全単射. 逆写像の定義と性質. 3. 同値関係・類別・商集合の定義. 例(分数, ベクトル等). 4. 順序関係. 例(数の大小関係, 集合の包含関係, 整数の整除関係等) 5. 有限集合の基数. 集合の濃度. 有限集合と無限集合の違い. 6. 可附番濃度(自然数, 整数, 有理数, 代数的数の集合). 7. 連続濃度(実数の集合), Cantor の対角線論法.
代数学	初等整数論	1. ユークリッドの互除法の応用. 1次不定方程式の解法. 2. 合同式の定義と性質. 1次合同方程式の解法. 3. nを法とする整数. 乗法構造と Fermat の小定理. 4. Fermat の小定理の応用（無限循環小数. RSA 暗号系の紹介.) 5. 中国式剰余定理(連立1次合同方程式). 環同型定理との関係. 6. 連分数. 無理数の近似.
	群の基礎	1. 群の定義と簡単な性質. 2. 可換群の例：整数の剰余類, 巡回群. 3. 非可換群の例：置換群, 行列群, 多面体群. 4. 部分群. 準同型写像, 正規部分群, 剰余群. 5. 準同型定理. 同型定理. 6. 対称性と群：さまざまな事象の裏に隠れている群構造.
	可換環の基礎	1. 環, 可換環, 整域の定義と簡単な性質. 2. 可換環のイデアルの定義と例：Z のイデアル等. 3. 素イデアル・極大イデアル. 剰余環, 環準同型定理(概要). 4. 対称式と交代式（対称式の基本定理. ニュートンの公式.) 5. 多項式の既約性(アイゼンシュタイン判定法, ガウスの補題)

	体の基礎	1. 体の定義と簡単な性質. 2. 体の代数拡大・超越拡大. 拡大次数. 最小多項式. 3. 体の代数単拡大の基本定理（有理化の原理）. 4. 有限体. 冪構造と応用：BCH 符号と QR コードの紹介. 5. 定木とコンパスによる作図問題. 6. ３次・４次方程式の解法. 方程式の可解性とガロア理論の紹介.

[授業コマ数の想定]　線型代数：２コマ、集合と論理の基礎＋代数学：３コマ

[修正案による項目の減少]　　旧　48 項目　→　新　42 項目

[注意]　各項目の内容は数学科のように証明を積み上げる形式ではなく、各回の授業ではテーマをしぼりこんで、学生が主体的に取り組めるような講義を構成することを想定しているので各項目における内容はコンパクトなものにできる。

5.新しいモデルによる代数学分野のシラバスの例

新モデルの線型代数分野は，２コマの授業を構成することにして，線形代数Ｉ，Ⅱと名付ける。代数学分野については，「集合と論理の基礎＋初等整数論」「群の基礎＋可換環の基礎 1~3」「可換環の基礎 4~5＋体の基礎」に分けて，３コマの授業を構成することにして，代数学Ｉ，Ⅱ，Ⅲと名付ける。以下に，5 科目「線型代数Ｉ，Ⅱ」「代数学Ｉ，Ⅱ,Ⅲ」の各々のシラバスの一例を挙げる。

[注意]　下記の表において，符号 **a～f**　は,

a 数学の体系的理解　　b 学校数学との繋がり　c 現実世界との繋がり

d 数学の実用性　　e 数学の文化的価値　　f 探究的活動　である。

授業科目名	**線型代数Ｉ**
科目分類	中学校・高等学校「数学」教員免許上の「教科に関する科目」 または，教養教育科目
単位数	２単位
授業の目的及び主旨	大学で出会う最初の数学の科目として，高校から大学への繋ぎとしての役割 **b** も意識する。集合・写像の紹介から初め，置換を扱うので群構造など数学の理論的側面 **a** も扱うが，主たる話題は，行列，行列式，連立１次方程式，直線・平面のベクトル方程式と方程式，直線・平面を境界とする図形の面積・体積等の計算法 **ad** など“線型性の数学”を展開するための手段と手法の習得にある。これらの話題は中学校・高等学校で学んだ１次方程式・連立１次方程式・１次関数・座標平面・空間の幾何学等の発展として密接に関係 **b** している。さらに，線型代数Ｉ,Ⅱで学ぶ内容の理解は，現実世界の理解に種々の線型構造が使用されることから，多くの数学分野や応用分野の中で生きてくる **cdf**。さらに，論理的に正しい思考を展開し表現できる **a** 能力の育成にも留意するとともに，論理的な証明と概念への直感的イメージとを総合し活用できる **aef** ことも目指す。

授業の到達目標	・行列の演算，行列式の計算，逆行列の計算ができる。 ・行列と線型写像の関係が分かり，説明できる。 ・置換を互換の積に書け、置換の符号の意味が理解でき，説明できる。 ・連立一次方程式の解と解き方の意味が理解でき説明できる。 ・空間の直線・平面のベクトル方程式と方程式の関係が理解でき，説明でき双方向に計算できる。 ・平面・空間における平面図形の長さ・面積・体積の計算ができる。 ・ベクトル積の２つの定義の関係を説明でき計算できる。面積・体積の計算への応用を理解し，計算できる。 ・中学・高校で学ぶ座標平面・空間，ベクトルなどを俯瞰し説明できる。
授業の内容 (15回)	1. 一般の写像．写像による順像・逆像．全射・単射・全単射. 2. 行列に関する諸定義・用語．行列の演算：加法・実数倍・乗法. 3. 行列の積(続き)．正則行列・逆行列. 4. 数ベクトル空間と線型写像．線型写像の行列表現. 5. 置換．群としての構造．互換．置換の符号. 6. 行列式の定義と諸性質. 7. 行列式の計算．さまざまな方法. 8. 中間まとめ．中間試験 9. 中間試験の解説．行列式の計算の応用. 10. 一意解をもつ連立１次方程式の理論と解法. 11. 線型代数の幾何学への応用１：直線・平面のベクトル方程式と方程式 12. 線型代数の幾何学への応用２：長さ・面積・体積. 13. 線型代数の幾何学への応用３：ベクトル積とその応用. 14. 線型代数の幾何学への応用４：３の続き，学校数学との関係 15. 期末まとめ・全体的な補足 16. 期末試験

授業科目名	**線型代数Ⅱ**
科目分類	中学校・高等学校「数学」教員免許上の「教科に関する科目」 または，教養教育科目
単位数	２単位
授業の目的及び主旨	線型代数Ｉで学んだ線型代数の概念と計算法を基礎にしながら，Ⅱでは，線型代数の応用にも対応する **cd** ために一般化・抽象化して，ベクトル空間・線型写像に関する理論的側面 **a** へと進めていく。転換となるのは一次独立・一次従属の概念である。線型代数に関する主題は数学でも最も古い分野であるが，この一次独立・従属の概念(さらに，それから得られる次元の正確な定義)が明確になるのは意外にも新しく 19 世紀であった **ae**(集合と述語論理を使う議論でない

	と分かりにくいものだったからである)。 授業内容は，前半が線型性のみに関する理論で，後半が計量に関係する理論が主となる **acf**。いずれも数学的内容は非常に豊富で，毎回テーマが変わるので，各回の目標を確実に理解していきたい。これらの内容は，大学で学ぶ数学の基礎的な知識として必要である **ab** し，他の学問（自然科学・社会科学）に多くの応用をもつ **cd**。さらに，論理的に正しい思考を展開し表現できる **a** 能力の育成に留意するとともに，論理的な証明と概念への直感的イメージとを総合し活用できる **aef** ようになることも目指す.
授業の到達目標	・一次独立・一次従属の概念が幾何学イメージとともに理解でき，実用的に利用できる. ・ベクトル空間の基底と次元の定義が理解でき，種々の次元を２つの次元公式を利用して計算できる。 ・行列のランクの概念を種々のランクの定義の相互関係とともに理解でき説明できる. ・像と核に関する次元公式と連立一次方程式の理論との関係を理解し説明できる．さらに関連してその方程式の解法を説明できる. ・線型代数学に現れる‘外延的定義’と‘内包的定義’の関係が理解でき,説明し計算できる. ・数について高校までに学んだ内容を量との関係で新しい視点から見直すことができる. ・固有値・固有ベクトル・固有空間等の概念とその意味と役割が理解でき，種々の計算に利用できる. ・実および複素ベクトル空間における計量の定義と意味が理解でき，シュミット直交化の計算ができる. ・実対称行列(エルミット行列)の直交行列(ユニタリ行列)による対角化の意味と方法が理解でき，対角化の計算ができる. ・平面２次曲線・空間２次曲面の(合同関係による)分類の意味と方法を理解でき，標準形を求める計算ができる.
授業の内容 (15回)	1. 「線形代数学Ⅱ」の展望：ベクトル・行列・行列式の計算から線型性の理論化と応用へ. 用語：１次関係，１次結合，１次独立・１次従属の導入 2. 数ベクトルと幾何ベクトルの一般化としての(抽象)ベクトル空間, １次独立・１次従属の定義と(数または幾何ベクトルにおける)意味. 3. 部分ベクトル空間の定義と例. ベクトル空間の基底と次元の定義.部分空間の和と交わりの次元公式. 4. 線型写像の行列表現. 線型写像・行列のランクの定義. 線型写像の像と核の定義と次元公式. 5. 行列のランクの小行列式を用いた定義. 行列の行および列基本変形. 基本変形を用いたランクの計算. 基本変形を用いた連立一次方程式の解法.

	6.「量と数の理論」の解説. 7. 一般の連立一次方程式の理論(まとめ). 部分空間の外延的定義と内包的定義の関係. 空間平面のベクトル方程式と方程式の関係.　逆行列の種々の計算法(まとめ) 8. 中間まとめ. 中間試験 9. 固有値・固有ベクトルの意味. 固有値,固有ベクトル,固有空間, 固有多項式, 固有方程式の定義. 固有値・固有ベクトルの計算. 10. 行列の対角化可能条件. 行列の三角化(ジョルダン標準形入門と例). 11. 内積（計量）空間. ベクトルのノルム, ベクトルのなす角度の定義. シュミットの直交化・直交直和分解. 12. 実対称行列（エルミット行列）の直交行列（ユニタリ行列）による対角化の理論と計算. 13. 実二次形式（エルミット形式）の標準形の理論. 正定値, 負定値, 不定値二次形式. 標準形式への計算. 14. 二次曲線・二次曲面の標準形と分類理論および標準形への計算. 15. 全体まとめ・補足 16. 期末試験

授業科目名	**代数学 I**
科目分類	中学校・高等学校「数学」教員免許上の「教科に関する科目」
単位数	２単位
授業の目的及び主旨	数学教師として求められる数学の専門的能力を育成するために大学で数学専門科目を学ぶためには，まず、論理的に正しい思考を展開し表現できるae能力が必要である。また，算数・数学の初等・中等教育における教材を深く理解し研究・開発するbためには，代数的な考え方が重要である。これまで小学校・中学校・高校で学んだ数学的な内容と対比しbfながら，数学を新たな視点から考察するceことによって，数学教師としての指導能力を育成に資することがこの科目の目的である。その第１歩として，抽象的な数学を学ぶ上で基盤となる集合・写像・論理などに関する基礎aから出発し，主として論理的に議論を進めることの意味acを学ぶ．次に，初等整数論からの話題を扱う。ここでは，整数の剰余類を考察することによって，整数についてより深い考察ができるbことを学ぶ．新しい抽象的な数学概念や数学的構造を，具体的な例を通じて自ら具体的に体験しつつf，抽象的な概念に対するイメージ作りの準備をするとともに，論理的な推論や証明にも一定の習熟を果たすaことを目標とする。さらに，学んだ内容が学校数学や他の学問，社会でどのように応用され，役立っているかも専門数学の視点から確実に観察するbcd.
授業の到達目標	・証明とは，仮定と結論を正しく理解し，演繹的推論により正しく導くということを理解している．さらに，具体例で説明ができる．

	・集合と写像に関する∀∃を含んだ易しい命題を証明できる. ・商集合など新しい集合を作る構成を理解でき，説明できる. ・集合数(基数)と順序数(序数)の本質的な区別を理解し説明できる. ・濃度の定義，可附番濃度と連続濃度との違いを理解し説明できる. ・ユークリッドの互除法を用いて，1次不定方程式・１次合同方程式が解け説明できる. ・整数の剰余類を使える．フェルマーの小定理の様々な証明を理解できそれらの間の関連を説明できる. ・学校数学から発展した話題：無限循環小数，中国剰余定理の応用，連分数の応用などを理解し応用できる. ・公開鍵暗号系の考え方が理解できる．RSA暗号系を理解し，具体例を作り，仕組みを説明できる.
授業の内容 (15回)	1. 集合の基本的記号．簡単な論理（特に∀∃を含む述語論理とは）. 2. 写像，全射・単射・全単射．逆写像の定義と性質. 3. 同値関係・類別・商集合の定義．例(分数，ベクトル等). 4. 順序関係．例(数の大小関係，集合の包含関係，整数の整除関係等) 5. 有限集合の基数．集合の濃度．有限集合と無限集合の違い. 6. 可附番濃度（自然数，整数，有理数，代数的数の集合）. 7. 連続濃度（実数の集合）. Cantor の対角線論法. 8. 中間まとめ．中間試験 9. ユークリッドの互除法．１次不定方程式の解法. 10. 合同式の定義と性質．１次合同方程式の解法. 11. 整数の剰余類．剰余類のベキ構造．フェルマーの小定理. 12. フェルマーの小定理の応用：無限循環小数，RSA 暗号系. 13. 中国式剰余定理(連立一次合同方程式)．整数問題への応用. 14. 連分数とその応用（無理数の近似等). 15. ガロア体とその応用：代数学Ⅲへの繋がりとして. 16. 期末試験

授業科目名	**代数学Ⅱ**
科目分類	中学校・高等学校「数学」教員免許上の「教科に関する科目」
単位数	２単位
授業の目的及び主旨	代数学Ⅰに続き，代数的考え方と方法に習熟する ae ために，応用範囲が広く抽象的かつ論理的な思考の訓練にも適した「群論」a を主として学ぶ。ここで学ぶ考え方は，現代的な数学を理解する基盤になる（20 世紀初頭以降に数学の抽象化・代数化が進展した）とともに，初等・中等の算数・数学を深く理解し，研究・開発する b うえでも重要である。そのために，数学的な概念を正しく理解し a，論証ができる基礎的能力 a をつけることを目標とする。群やその他の代

	数構造がどのような背景と目的で生まれてきた ce のか、群が数学の他分野や諸科学へどのように応用されているか cd を知るとともに，論理的に正しい思考を展開し表現できる a 能力の育成に重点をおく．特に，論理的な証明と概念への直感的イメージとを総合し活用できる aef ようになることを目指して構成する．
授業の到達目標	・代数学 I で学んだ整数の剰余類の役割に関して（下記5の内容も含めて）このケースの群の重要性を理解できる． ・巡回群，置換群など具体的な群の構造が理解でき説明できる． ・下記3〜7で学ぶ群に関する基本的性質の証明を理解し，記憶し再現できる さらに，易しい証明問題が解ける． ・下記9〜11の環の基本性質の証明や易しい証明問題についても同様にできる． ・さまざまな事象に現れる対称性と群の関係について，調べ理解し説明できる． ・代数学が現代社会でどのように役立っているか理解し，具体的に説明できる．
授業の内容 （15回）	1. 導入１：群とは何か．半群，モノイド，群． 2. 導入２：群の例：代数学 I の教材から，整数の剰余類．巡回群 3. 巡回群の性質．非可換な群１：置換群． 4. 置換群の性質．非可換な群２：多面体群． 5. 部分群．ラグランジュの定理．Fermat 小定理との関係． 6. 準同型写像．正規部分群．剰余群．群準同型定理． 7. 群準同型定理の応用：同型定理．種々の同型な群． 8. 中間まとめ．中間試験． 9. 環，可換環，整域の定義と簡単な性質． 10. 可換環のイデアルの定義と例：Z のイデアル等． 11. 素イデアル・極大イデアル．剰余環，環準同型定理(概要)． 12. 群の直積，部分群の直積．環の直積，イデアルの直和． 13. 対称性と群：さまざまな事象の裏に隠れている群構造１． 14. 対称性と群：さまざまな事象の裏に隠れている群構造２． 15. 全体まとめ・補足 16. 期末試験

授業科目名	**代数学Ⅲ**
科目分類	中学校・高等学校「数学」教員免許上の「教科に関する科目」
単位数	２単位
授業の目的及び主旨	代数的構造に関して、代数学Ⅲでは「環とイデアル」および「体の代数拡大」の理論aを，それらの概念が発生した背景ceおよび現代的な応用cdとともに学習する。イデアルは、素数の研究に重要な役割をもつzeta関数の拡張された概念のために，素因数分解の概念を拡張する試みからDedekindにより導入された。体論と群論は、代数方程式の解法や作図問題に関するGaloisの研究から発

	生した。これら現代数学の基本的な概念は，20世紀以降，代数学のみでなく数学のあらゆる分野で重要な役割を果たすようになった。現代的な代数学がどのように生まれたceか、代数的構造がどのように役立つcdのかを調べ学ぶfことにより，数学的な視野を広め、理解を深めて、学校数学でこれまでに学んだ内容をより深く広い視野から見直しbc、授業を自ら構成することができる能力を養うことを目標とする。代数学Ⅰ，Ⅱに引き続き，論理的に正しい思考を展開し表現できるa能力の育成にも配慮する。
授業の到達目標	・多項式と代数方程式に関する既約性・対称性・冪根による解法など、学校数学の発展部分である概念を理解し計算でき説明できる。 ・方程式の冪根を用いた解法の意味と歴史的役割を理解し説明できる。さらに，ガロアの理論とそこでの群の役割を理解し説明できる。 ・環におけるイデアルの意味と役割を理解し説明できる。 ・体の拡大の構造を代数的単拡大の場合に,具体例とともに理解し計算でき説明できる。 ・方程式の解法や作図問題がどのように群に関係するかを理解し計算でき説明できる。 ・代数学が現代社会でどのように役立っているか理解し具体的に説明できる。
授業の内容 (15回)	1. 導入１：３次・４次方程式の解法. 2. 導入２：対称式と交代式（対称式の基本定理．ニュートンの公式) 3. 方程式の冪根による解法とガロアの理論の歴史的紹介. 4. 可換環・整域・体の定義の復習．体の簡単な性質. 5. 体の代数拡大・超越拡大．拡大次数. 6. 多項式の既約性(アイゼンシュタイン判定法，ガウスの補題) 7. 最小多項式．体の代数単拡大の基本定理（有理化の原理)１：環論的証明（ユークリッド整域、単項イデアル整域、一意分解整域) 8. 体の代数単拡大の基本定理（有理化の原理)２：線形代数的証明 9. 体の代数単拡大の基本定理（有理化の原理)３：共役の利用．応用 10. 定木とコンパスによる作図問題１ 11. 定木とコンパスによる作図問題２ 12. 有限体の性質．有限体の乗法群の多項式表示と冪表示. 13. 有限体の冪構造と応用１： QR コード. 14. 有限体の冪構造と応用２： BCH 符号. 15. 全体まとめ・補足 16. 期末試験

[Ⅳ. 確率・統計分野]

6. 学校教育で近年に重要視されはじめた統計教育を踏まえて，確率・統計分野ではどんな話題に注目するべきか

(1) 西内啓「統計学が最強の学問である」ダイヤモンド社がベストセラーになったように，この十数年間に発展したビッグデータを活用する新しい統計学に対する世間一般の関心が高まっている。
(2) 新しい統計手法を身につけ，理論的にもきちんと理解し今後の進展にも対応できるような（情報処理のプロを超えた）統計学的データ解析の専門家育成への要求が種々の分野の企業および公的機関で高まっている。従って，大学での養成も求められている。
(3) 従来の頻度主義統計学（フィッシャー・ネイマン・ピアソン理論または標本理論と呼ばれる）だけでなく，ベイズ統計学の学習にも比重を移す必要がある。
(4) 巨大な情報空間から統計的モデリングによって，情報抽出，知識発見，予測，シミュレーション，管理，制御などの統計的推論を実現する方法については概要だけでも知っておきたい。
(5) 複雑になった統計的手法により“統計にダマされない”眼をもつことがますます困難になっているが，どのような視点が必要だろうか？（統計学のカラクリを知るなど）

7．標準モデルー確率・統計分野

現時点では，旧モデル案を修正しなくてもよいのではと考える。

確率論と統計学	確率論	1. 順列・組合せ．重複組合せ．包除原理等. 2. 標本空間，事象．確率の概念(経験的確率，先験的確率，公理論的確率). 3. 確率変数の概念．確率関数・確率密度関数，確率分布. 4. 離散型確率分布の例（二項分布，幾何分布，ポアソン分布等）. 5. 連続型確率分布の例（正規分布，一様分布，指数分布等）. 6. 条件付き確率の定義，ベイズの定理，確率変数の独立性. 7. 期待値，分散（標準偏差），確率母関数（モメント母関数）. 8. 結合分布，相関係数，共分散，条件付き期待値. 9. 極限法則：大数の法則．中心極限定理. 10.確率過程モデル（マルコフ連鎖．ランダムウォーク）.
	統計学	1. データの特性値（平均値，中央値，分散，標準偏差，偏差値）. 2. 資料の整理（度数分布表，度数分布図）. 3. ２次元のデータ（共分散，相関係数，相関図，回帰曲線等）. 4. データの処理（t分布，F分布等） 5. 点推定（母集団と標本，不偏推定，最尤推定，種々の推定）. 6. 区間推定（正規分布の母平均，母分散の推定等）. 7. 仮説検定（母平均の検定，等分散の検定等）. 8. 適合度検定：カイ２乗分布.

8．新しいモデル案によるシラバスの例（確率統計分野）

教員養成系の大学・学部のほとんどで，確率論/統計学の分野で必修とされている単位は 1 コマ 2 単位である。数学教師を目指す学生が大学で是非とも学ぶべきだと考えられる内容は，確率論と統計学のどちらにも含まれている。そこで，ここでは数学教師を目指す者に求められる確率論と統計学の内容を合わせた内容の１コマの授業を構想してみることにする。

授業科目名	**確率と統計**
科目分類	中学校・高等学校「数学」教員免許上の「教科に関する科目」
単位数	２単位
授業の目的及び主旨	確率論と統計学の基本的概念を確実に理解し，計算できる **ae** ようにすること，および，統計学の種々の分析方法を具体的実例とともに理解し，その結果の意味を正しく説明できる **acdf** ようにすることが目的である。（統計学の種々の手法は現在では複雑なものになり，アプリケーションソフトを使うブラックボックスでの計算が多いから，何をどのように計算しているかを理解することが重要である。）確率論と統計学の学習は数学の中でも最も現実世界との繋がりが深く，様々な学問分野や社会経済活動に役立つ内容が多い **cdf** ので，どのように応用されるのか理解することが必須である。こうした学習により学校教育の統計教材に対して正しい判断を下すことが可能でなる **bf**。さらに，高校までの統計の学習では不十分であった推測統計学およびベイズ統計学の考え方と方法を歴史的背景とともに理解する **ade** ことも目指す。
授業の到達目標	・確率論の基本的概念を理解し説明できる。 ・統計学の基本的概念を理解し説明できる。 ・種々の確率分布とその意味を理解し，説明できる。さらに，それらのパラメータを計算できる。 ・共分散・相関係数の計算と意味を理解し，説明できる。さらに，回帰分析の意味と手法の概要を理解できる。 ・ベイズの定理を理解し，また使って条件つき確率を計算できる。 ・推定・検定の方法と意味を理解し，説明でき計算できる。 ・ベイズ統計学の基本的方法を理解できる。 ・ベイズ統計を用いた推定・意志決定等の易しい実例を計算できる。
授業の内容 (15回)	1. 標本空間，事象. 確率の概念(経験的確率，先験的確率，公理論的確率). 2. データの特性値(パラメータ)：平均値，中央値，分散，標準偏差，偏差値. 3. 確率変数の概念. 確率関数・確率密度関数，確率分布. 4. 離散型確率分布の例（二項分布，幾何分布，ポアソン分布等）. 5. 連続型確率分布の例（正規分布，一様分布，指数分布等）. 6. 多変数確率分布，相関係数，共分散，条件付き期待値. 7. ２次元のデータの共分散，相関係数. 回帰分析とは. 8. 中間まとめ. 中間試験 9. 条件つき確率の定義，ベイズの定理，事前確率・事後確率，確率変数の独立性. 種々の例. 10. 結合分布，相関係数，共分散，条件付き期待値. 回帰分析入門. 11. 極限法則：大数の法則. 中心極限定理. その意味と応用. 12. 点推定（母集団と標本，不偏推定，最尤推定，種々の推定）と区間推定（正

	規分布の母平均，母分散の推定等）． 13. 仮説検定（母平均の検定，等分散の検定等）と適合度検定：（カイ２乗分布）入門 14. ベイズ統計学と非ベイズ統計学(=古典的記述統計学)の違い．ベイズ統計学の基本公式． 15. ベイズ推定の考えと例． 16. 期末試験

[文献]

[1] 丹羽雅彦、松岡隆「教員養成学部の「数学」教科専門科目カリキュラムの現状把握と理想的モデル案に向けた調査検討の構想」，数理解析研究所講究録 1657 (2009年7月) pp.74-82

[2] 丹羽雅彦、松岡隆、川﨑謙一郎、伊藤仁一「「教員養成大学・学部の数学専門科目の講義内容についての調査」の結果とその考察」，数理解析研究所講究録 1711 (2010年9月) pp.89-105

[3] 丹羽雅彦、松岡隆、川﨑謙一郎、大竹博巳、伊藤仁一「中学校・高等学校の数学教師の養成における数学専門科目の標準的なモデルの構想」，数理解析研究所講究録 1711 (2010年9月) pp.106-129

[4] 丹羽雅彦、松岡隆、川﨑謙一郎、大竹博巳、伊藤仁一 「小学校算数科・教科専門科目の講義内容に関する現況調査の結果と標準モデルの提案」，数理解析研究所講究録 ，数理解析研究所講究録 1828 (2013年3月) pp.50-60

[5] 松岡隆「教員養成系における幾何学内容の構成について」，数学リテラシー概念に基づく教員養成系 数学カリキュラムの開発（研究代表者：浪川幸彦）南九州大学都城キャンパス研究集会(2012年2月)報告集　pp.52-59

[6] 丹羽雅彦「数学教師養成のための数学専門科目・松岡提案に基づく標準モデル案の修正（代数学分野）」数学リテラシー概念に基づく教員養成系 数学カリキュラムの開発（研究代表者:浪川幸彦）南九州大学都城キャンパス研究集会(2013年2月)報告集　pp.40-45