数理解析研究所講究録
第2072巻 2018年 167-175

初等整数論の扱いについて ～ 或る参考書を材料に

島根大学・名誉教授 青山 陽一
Yoichi Aoyama
Professor Emeritus, Shimane University

はじめに

筆者は，退職の何年か前から講義において，群・環・体の基礎を講述した後，‘数の概念’と‘初等整数論’を隔年で扱うことが多くなった[†1]．また，卒業研究においても‘初等整数論’を課題にすることが殆どになっていた．偶に‘初等幾何学’を課題にし，ユークリッド原論とヒルベルトの公理化を扱っていた．講義以外に機会があるときは，‘ユークリッド原論を読む’ということも行った．この稿では，‘初等整数論’に関連することを述べることにする．‘数の概念’については別の機会に述べたいと考えているが，その内容については，ペアノの公理系から始めて複素数の構成までを扱い，余裕があれば一実変数函数の微積分,二実変数函数の微分,一複素変数函数の微分も扱うのが好ましいと考えている．

卒業研究において‘初等整数論’を課題にする場合，テクストとして選んだものは[5],[7],[4],[6],[3],[2]である．最も多かったのは[5]である．[4]を選んだときはC言語プログラミングも行い，[3]を選んだときはRSA暗号を学んだ．各々に特色があり，有用であった．しかし，[2]を選んだときは‘些か’驚いた[†2]．この本は題に“高校・大学生のための”とあるように，初歩入門から平方剰余の相互法則までを扱い，大学入試問題から選んだものを多く含む演習問題がその解法と共に与えられており[†3]，これが本を特徴付けていると言える．が，“高校・大学生のための”に見合う記述面での配慮に乏しく，更には酷い論法が見受けられる．[1, 小節0.3]にも記したが，ここでも[2, p.32 – p.33]から引用する．

≪**参考**≫ 実数の連分数展開を

$$x = q_1 + \frac{1}{q_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{q_n} + \cdots\cdots$$

とし，$x_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$（P_n, Q_n は定理3.2[†4]で定めたものとする）とすれば，$n \to \infty$ のとき，x に収束することは前に述べた通りであるが，これは，どんなに小さな正数 ε に対しても，n を十分大きくとれば，

[†1] これを基に纏めて膨らませたものが[9]である．‘数の概念’は含まない．

[†2] 事前チェックが甘いと言われればその通りであるが，まさかコンナ[2, p.32 – p.33]バカゲタコトが書かれているとは思えなかった．テクストに必要な修正等を施しながら或いは書直しながら，読んで行くのも悪くない方法であるが，学生の学力の見極めと相応の指導が必須である．

[†3] 演習編 A‘約数, 倍数に関する問題’, B‘整数解を求める問題’, C‘剰余に関する問題’, D‘関数, 図形, 数列との融合問題’, E‘補遺と発展問題’各30題

[†4] 本稿の9ページ目を参照．

$$|x-x_n| = \left|x-\frac{P_n}{Q_n}\right| < \varepsilon \qquad \cdots\cdots ①$$

のように出来ることを意味している．また，$Q_n < Q_{n+1}$ であることに注意すると，

$$\left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| \leqq \left|\frac{P_{n+1}Q_n-P_nQ_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}\right| < \frac{1}{{Q_n}^2} \qquad \cdots\cdots ②$$

のようにできる．したがって，三角不等式を利用すると①,②から，

$$\left|x-\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| \leqq \left|x-\frac{P_n}{Q_n}\right| + \left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| < \varepsilon + \frac{1}{{Q_n}^2}$$

となるが，n を十分大きくすれば，ε はいくらでも小さくなるので，

$$\left|x-\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| \leqq \frac{1}{{Q_n}^2}$$

が成り立つことがわかる．

この稿では，[2][†5]に対し苦言を呈する[†6]形になるが，初学者への配慮や ε-δ 論法に関連する事柄を述べることにより，入門部分の扱い方を少し考えてみたいと思う．

§1. 初学者への配慮に関して

この節では，初学者へ配慮したいことに関して述べる．[2] の正誤等を記すのではない．

記号 'N' 等：　記号 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ を導入し，0 を自然数に含める流儀と含めない流儀があることを述べ，どちらの流儀で行くかを明示するのは非常に良いことである．更に，各々における演算・大小関係についても言及するのが良いだろう．

講義では，理論的数概念の拡張 と 学校教育における数の拡張の仕方 を対比させながら教示するようにしていた．

何処で議論するか：　道具として種々のものを使うのは当り前であるが，初等整数論の基本的場は $\mathbb{Z}$ であることを明確に述べておくべきと考える．小学校で扱う整数は正整数と 0 であり，正整数と 0 を合わせて整数と言うようである．中学校で負の数が導入され，正整数,0, 負整数を合わせて整数と言うことになる．数の範囲が拡張されて議論がなされるのであるが，何故か約数倍数とかの話になると，小学校の段階で留まっているような感があある．このためか，0 は偶数なのかどうか と言う様な論議が起こるのではと感じられる．初等整数論の基本的場は $\mathbb{Z}$（ユークリッド整域である有理整数環）であることを明確にしておくべきである．[2, p.5 の 1 行目〜] に『上の証明で注意すべきは "$c_1q_1+c_2q_2 \in \mathbb{Z}$" の部分である．これは c_1, c_2 が整数，q_1, q_2 が整数だから，(整数)+(整数) は整数，(整

[†5] **吟味が充分に行き届けば，良い参考書になるであろう．** 理論編：第 1 章 自然数・整数の基本的性質, 第 2 章 1 次不定方程式, 第 3 章 連分数, 第 4 章 合同式の基本的性質, 第 5 章 整数論的関数, 第 6 章 合同式の解法, 第 7 章 指数・原始根・標数, 第 8 章 平方剰余, 第 9 章 ささやかな展望

[†6] 演習編の内容 (解法) については言及しない．

数)×(整数) は整数 という性質によって，$c_1q_1+c_2q_2$ もやっぱり整数だ，ということを確認している.』とある．中学校や高校での答案には必須のものとされている (これを書かないと減点される) が，$\mathbb{Z}$ が整域であることを前提とすればわざわざという感じもある．しかし，環 $\mathbb{Z}$ を扱わない中学校や高校での答案には必須であることは事実であり，それに応じる必要はある．

記号 '$\Longleftrightarrow$' 等： [2, p.4 定義 1.1] に記号 '$\Longleftrightarrow$' を『$b \mid a \Longleftrightarrow a$ は b で割り切れる』というように使っているが，記号 '$\Longleftrightarrow$' は元来同値であることを示す記号であり，定義に使うものではない．初学者にはこのことを教えるべきである．上述の場合なら「a,b について，$a=bc$ となる c が存在するとき，a は b で割り切れる と言い，$b|a$ で示す.」と言う様に記述するのが良い．全てに亘り定義に '$\Longleftrightarrow$' を使っている部分は書き直すのが良い．現実に定義に使われてはいるが，流用あるいは準用であり，好ましいことではない．

'$\Longleftrightarrow$' は '$\Longrightarrow$ かつ $\Longleftarrow$' のことである．[2, p.3] に '$\Longleftrightarrow$' は説明なしに使われているが，定義 1.1(p.4) の後の定理 1.3(p.4) で '$\Longrightarrow$' を使い，定理 1.3 直後の説明で『早速，妙ちきりんな記号が登場したが，．．．』と言っている．'妙ちきりんな' ことである．記号の導入については厳密な意味・使用法等，書き方に工夫を要するところである．

基本的定義・用語等： [2] の最初の部分 (p.5 まで)，約数倍数等の基本的定義の前に定理 1.1(p.2) が提示され証明が与えられるのであるが，基本的定義・用語等を先ず与えるのが良いと考える．[2, 定理 1.1(p.2)] は除法定理と言われるもので,『a を整数，b を正の整数とするとき $a=bq+r,\ 0 \leqq r < b$ を満たす整数 q,r が唯一組定まる.』と記述されている．そしてその後の '注' で,『なお，$r=0$ のとき「a は b で割り切れる」といい，$r \neq 0$ のとき「a は b で割り切れない」という.』と記述される．それから定理 1.2 を挟んで,

> **定義 1.1.** 以下に，整数論で用いる基本的な記号や言葉を定義しておく．
>
> ① $b \mid a \Longleftrightarrow a$ は b で割り切れる
> 注： a を b の倍数 (multiple) といい，b を a の約数 (divisor) という．
>
> ② $b \nmid a \Longleftrightarrow a$ は b で割り切れない
>
> ③ $a=bq$ のとき，b,q をそれぞれ a の因数 (factor) という．
>
> ④ $a=bq+r,\ 0<r<|b|$ のとき，r を a の剰余 (remainder) という．

定理 1.3 と定理 1.4 があって,

> **定義 1.2.**
> ① m が a と b の公約数 (common divisor または common measure)
> $\Longleftrightarrow m \mid a$ かつ $m \mid b$
>
> ② a と b の最大公約数 (greatest common divisor) を (a,b) と表す．
>
> ③ a と b が互いに素 $\Longleftrightarrow (a,b)=1$

④ M が a と b の公倍数 (common multiple) $\Longleftrightarrow a\,|\,M$ かつ $b\,|\,M$

⑤ a と b の最小公倍数 (least common multiple) を $\{a,b\}$ と表す.
但し, $\{a,b\}>0$.

釈然としない. ('約数' と '因数' はどう違う? 或いは どう使い分ける? 最大公約数, 最小公倍数の定義もない.) 最初の部分 (p.5 まで), 次の様なのはどうだろうか:

断らない限り, 数を表す文字は整数とする.

定義. (1) a,b について, $a=bc$ となる c が存在するとき, a は b の倍数である, b は a の約数である, a は b で割り切れる, b は a を割り切る と言い, $b\,|\,a$ で示す. 約数を因数と言う場合もある. (Note: $a\neq 0,\, b\,|\,a \Rightarrow |b|\leq|a|$)
$a=bc$ となる c が存在しないとき, a は b の倍数でない, b は a の約数でない, a は b で割り切れない, b は a を割り切らない と言い, $b\nmid a$ で示す.

(2) $d\,|\,a_1\,,\,\ldots,\,d\,|\,a_n$ のとき, d は $a_1,\ldots,a_n$ の公約数であると言う.

(3) $a_1,\ldots,a_n$ の中に 0 でないものがあるとき, $a_1,\ldots,a_n$ の公約数の中で最大のものを最大公約数と言い, $\mathrm{GCD}(a_1,\ldots,a_n)$ で示す.

(4) $\mathrm{GCD}(a_1,\ldots,a_n)=1$ のとき, $a_1,\ldots,a_n$ は互いに素であると言う.

(5) $a_1\,|\,m\,,\,\ldots,\,a_n\,|\,m$ のとき, m は $a_1,\ldots,a_n$ の公倍数であると言う.

(6) $a_1,\ldots,a_n$ の中に 0 のものがないとき, $a_1,\ldots,a_n$ の正の公倍数の中で最小のものを最小公倍数と言い, $\mathrm{LCM}(a_1,\ldots,a_n)$ で示す.

定理. (1) $d\,|\,a_1\,,\,\ldots,\,d\,|\,a_n \Longrightarrow d\mid a_1b_1+\cdots+a_nb_n$
(2) $c\,|\,b,\, b\,|\,a \Longrightarrow c\,|\,a$

定理 (除法定理). $a,b,\, b>0$ に対して,

$$a=bq+r,\quad 0\leq r<b$$

となる q,r が唯一組存在する.

定義. 上の定理の状況で, a を被除数, b を除数, q を a を b で割ったときの商または整商, r を余りまたは剰余と言う.

除法定理: [2, 定理 1.1] は除法定理と呼ばれるもので, 非常に重要な命題である. 小学校以来お馴染みの, 割って商と余りを求めるものである. 馴染み過ぎてその重要性に気付き難いが, 初等整数論の殆どはこれに拠っている. その重要性は是非強調すべきものである. これが成立することから 'ユークリッド整域' と名付けられる訳である.

'任意' なる語について: '任意の' という形容句は必要な場合にのみ使う様にした方が良いと思う. 例えば [2, 定理 1.5(p.6)] 『m は a と b の任意の公倍数, . . .』とあるが, '任意の' は不要である. 単に '公倍数' と記せば, 公倍数ということだけで, 他に条件は付かないのだから. (多くの著作でよく見かける. 学生の国語力低下を嘆くと共に自らの国語力を磨こう.)

ユークリッドの互除法： [2, 定理 1.9, 定理 1.10] でユークリッドの互除法が提示される.

[2, 定理 1.9] において，大小関係の条件が付いているが，ない方が良い：$a = bz \pm c$ なる関係があるとき，a と b の公約数全体と b と c の公約数全体は一致する．特に，$\mathrm{GCD}(a,b) = \mathrm{GCD}(b,c)$ である.

[2, 定理 1.10(ユークリッドの互除法)] は，一連の等式が成立すれば最大公約数は最後の割り切れた段階で求まるという部分と，余りについての付随条件があれば何回かで割り切れるという部分の二つからなる訳であるが，ここの処配慮が必要である.

'標数' なる語： [2, 定義 7.1(p.67)] において『p を素数，$p \nmid a$ とするとき，$a^x \equiv 1 \pmod p$ なる正整数 x の中で最小のものを 法 p に関する a の**指数 (index)** という.』，[2, 定義 7.3(p.72-p.73)] において『p を素数，g を法 p の原始根の一つ，$p \nmid a$ とするとき，$g^e \equiv a \pmod p$ なる整数 e with $0 \le e < p-1$ を 原始根 g を底とする a の**標数**といい，$\mathrm{Ind}_g a$ と表す．Ind は index の頭文字 3 つから取ったもの.』と言う風に定めている．[5] では,『p を素数，$p \nmid a$ とするとき，$a^x \equiv 1 \pmod p$ なる正整数 x の中で最小のものを 法 p に関する a **に対応する指数**という．(p.54)』,『p を素数，g を法 p の原始根の一つ，$p \nmid a$ とするとき，$g^e \equiv a \pmod p$ なる整数 e with $0 \le e < p-1$ を 原始根 g を**底としての** a **の指数 (index)** といい，$\mathrm{Ind}_g a$ と表す．(p.64)』と言う風になっている．どちらにも '指数' なる語を使い，紛らわしいかも知れない．[2] では，'指数', '標数' と異なる語を充てて混乱を避けていると思われる．**しかし，'標数' なる語はどうだろうか**．筆者は,『p を素数，$p \nmid a$ とするとき，$a^x \equiv 1 \pmod p$ なる正整数 x の中で最小のものを a **の法** p **に関する位数 (order)** と言い，$\mathrm{ord}_p a$ と記す．([9, (p.72) 環 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の単数群における a の剰余類の位数であることから])』,『p を素数，g を法 p の原始根，$p \nmid a$ とするとき，$g^e \equiv a \pmod p$ なる整数 e with $0 \le e < p-1$ [†7] を a **の法** p **の原始根** g **を底とする指数 (index)** と言い，$\mathrm{Ind}_g a$ または $\mathrm{Ind}_g^{(p)} a$ と記す．([9, (p.79) 定義 6.58])』が一法だと考えている．また，**法** p **の原始根** g **を底とする離散対数**と言われることもある.

'題意は示された' なる表現の類について： 最近，講義でのレポートや試験において，また入試の答案においても，'題意は示された' と言う様な表現に出くわすことが多い．筆者は不適切な場合，減点対象とはしないが，朱でバツを付けることにしている．[2] から一つ引用する：定理 1.15 の証明の最後 (p.14) に '以上により題意は示された' とある．奇妙な感じを受ける．他にも，'題意は示されたことになる', '題意は証明された', '題意は証明されたことになる', '題意の等式は示された', '題意の等式は示されたことになる', '題意の不等式が成り立つことが示された' 等々がある．とくに演習編はオンパレードと言っても良い様な感じである．答案の書き方の定型の様である．だから，学生や受験生が使う訳か．元々'題意' なる語は，文章題を解く場合，方程式や不等式を使って求めた解が元の文章題の条件に合致しているか否かを検討して，題意に適す (合う) または適さない (合わない) と表現したものと思うが，派生して答案の最後や区切の定型句となって来たのであろうと推測出来る．が，奇妙な感じを受ける場合が殆どである．上の引用した部分なら，書く必要はない．もう一つ引用 [2, p.44]：

[†7] or $p-1$ を法として唯一つ存在する

≪参考≫ 定理 5.4 を素因数分解を利用して証明してみよう.

⋮

以上により，題意の等式は示されたことになる.

'題意' とは何で，'題意の等式' とは何なのだろうか. 'ことになる' と言うのも頂けない.

「点数の取れる答案の書き方は？」とはよく聞かれることであるが，正しければ点数がある訳で，筋が辿り易い・妙な文がない と言うのも重要である. '題意は示された' の類は頂けない. '証明できたと言える' の類もお薦めしない.

§2. ε-δ 論法をめぐって

節 'はじめに' に引用した [2, p.32 – p.33] を提示して「この論法のオカシイ処を指摘して下さい」との課題を，学生及び或る会で現職教員に出した[†8]. 反応は,「判らない」が結構居て,「最後の所，ε は極限 0 に行くのに，n が有限のままであるのはおかしい[†9]」が少々減って,「'数学A ② 整数の性質' は選択である」というのが 1 名であった. $\sharp$(全体) $-$ $\sharp$(判らない派) $-$ $\sharp$(n が有限派) $-$ 1 ($\geqq 0$) が正しく指摘したということになるのですが，期待外れと言うか予想通りと言うか，かなり少ない. なお，ε-δ 論法或いは ε-N 論法を知っているかについては訊ねる余裕がなかった.

[2, p.32 – p.33] の論法を別の状況で使ってみよう：

$x_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ （$P_n = n, Q_n = n+1$）（$n = 1, 2, \ldots$）とすれば，$n \to \infty$ のとき 1 に収束することは良く知られているが，これは，どんなに小さな正数 ε に対しても，n を十分大きくとれば，

$$|1 - x_n| = \left|1 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \varepsilon \qquad \cdots\cdots ①$$

のように出来ることを意味している. また，$Q_n < Q_{n+1}$ であることに注意すると，

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| = \left|\frac{P_nQ_{n+1} - P_{n+1}Q_n}{Q_nQ_{n+1}}\right| = \left|\frac{-1}{Q_nQ_{n+1}}\right| < \frac{1}{{Q_n}^2} \qquad \cdots\cdots ②$$

である. したがって，三角不等式を利用すると ①,② から，

$$\left|1 - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| \leqq \left|1 - \frac{P_n}{Q_n}\right| + \left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| < \varepsilon + \frac{1}{{Q_n}^2}$$

となるが，n を十分大きくすれば，ε はいくらでも小さくなるので，

$$\left|1 - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| \leqq \frac{1}{{Q_n}^2} \quad 即ち \quad \frac{1}{n+2} \leqq \frac{1}{(n+1)^2}$$

が成り立つことがわかる.

これを資料に記しておいたらどうだったか興味がある. 残念！

[†8] 資料の該当部分を本稿の最後に記す.

[†9]『例え ε-δ 論法式定義を把握していなくとも，おかしいと気付かないといけない部分もある.』(cf. 本稿最後の資料)

ε-δ 論法を講義でどう扱うかは，教示しない場合も含め，講義担当者に任されているのが実情であろう[†10]．また，ε-δ 論法は，扱われるとすれば，微積分関係の講義でなされることが期待されているようであるが，筆者は'数の概念'についての講義の中で扱うのも一法であると思っている．有理数から実数を構成するところで，ε-δ 論法を結構詳しく扱うのが良いと考えている．そして，一実変数函数の微積分, 二実変数函数の微分, 一複素変数函数の微分について ε-δ 論法を駆使して扱うのが．ここではその方法について議論することは行わないが[†11]，[2, p.32 – p.33] の様なものが書かれた書物があることを良い機会に，現職教員の反応が既に述べた様であったことを良い機会に，教員養成においても ε-δ 論法は是非何らかの形で扱うべきであると主張したい．少なくとも,『これは，どんなに小さな正数 ε に対しても，n を十分大きくとれば，．．．のように出来ることを意味している.』が，高校までの遣り方と違い，ε-δ 論法による極限・収束の扱い方であると判り,『n を十分大きくすれば，ε はいくらでも小さくなる．．．.』がトンデモナイ論法であると見抜けるようになる為に.（最初の正しくない処でオシマイ.）

読者に対して問題を一つ： ε-δ 論法'任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が存在して，．．．'を習った学生に対し，"ε が $\frac{1}{2}$ のときに，条件をみたす δ の一つを δ_0 とすると，．．．"と証明を示していると，或る学生が「どうして δ_0 が取れるのですか．任意の ε に対しては取れるが，$\frac{1}{2}$ は確定した値で任意でないから駄目ではないのですか.」と質問した．
さて，この学生に対しどの様に対処すれば良いだろうか.

最後に，ε-δ 論法について，[8, おわりに (p.147–p.149)] から引用する：

> 偉大な数学者たちの試行錯誤の上に作られたものなのだから，そこで出てくる概念は難しくて当然である．コーシーだって，一様連続・一様収束・二変数関数の連続性の把握にことごとく失敗していた．リーマンもまた ε-δ 論法を煩わしいと思っていたようだ．１９世紀前半の，偉大な数学者の一群がことごとく微分可能性と連続性の関係を正確に捉えられなかった．かれこれ２０年以上，科学史・数学史といった分野を研究していると，あの大数学者がなぜこんな誤りに気がつかなかったのかという場面には過去に何度も出会っている．しかし，これだけまとめて出てくることはこれまではなく，さすがに冷静ではいられない．彼らがそれだけ難しい課題に取り組んでいたということであろう．数学史上の巨匠たちが悩んだ概念なのだから，今日の学生がなかなか理解できないほうが当然だし，教員がわかりやすい教え方を追求しても限界がある．わからなかったり，混乱したりするのは，学生の頭が悪いわけでも，教え方が悪いからでもない．のんびりとあきらめずに時間をかけて勉強していこう，教えていこう．その間にいろいろな数学の知識が蓄積され，それらが結びついて，自然と理解できるようになっていくのを学生も教員も待とう．ε-δ 論法の歴史は，このようなメッセージを私たちに与えているかのように思える.

[†10] 最近は，理学系学部の数学系学科でも扱わないところがあるようである.
[†11] '数の概念' については別の機会に述べたいと考えている．しかし，実現性は乏しい.

参照文献

[1] 教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導方法III,
2010年度RIMS共同研究「数学教師に必要な数学能力に関連する諸問題」報告集,
数理解析研究所講究録1828(2013.3), 61 – 85.

[2] 河田直樹: 高校・大学生のための 整数の理論と演習，現代数学社，2008.6.

[3] 楫元: 工科系のための初等整数論入門 〜公開鍵暗号をめざして〜，培風館 情報数理シリーズA-5，2000.7.

[4] 木田祐司: 初等整数論，朝倉書店 講座数学の考え方16，2001.11.

[5] 高木貞治: 初等整数論講義 第2版，共立出版，1971.10.

[6] 遠山啓: 初等整数論，日本評論社 日評数学選書，1972.

[7] アンドレ・ヴェイユ 著 – 片山孝次・丹羽敏雄・田中茂・長岡一昭 訳: 初学者のための整数論，現代数学社，1995.03.

[8] 中根美知代: ε-δ 論法とその形成，共立出版，2010.7.

[9] 青山陽一:（講義）代数学　Part I 基礎概念，2014.3.

資料より引用：

高等学校数学科 指導要領 (平成21年3月9日) において,「数学A ②整数の性質」が入れられた．この指導要領に依る大学入試は2016年度[†12]から実施される．そのとき，河田直樹 著「高校・大学生のための 整数の理論と演習」(現代数学社, 2008 June)（かその後継書）が参考書として有力候補の一つになるかも知れない．　　　　　　　　　　そこで：
この本のp.32 – p.33に次のような記述がある．数学の先生[†13]ならば，対応出来なければならないだろう．(この本は‘カナリ’のもので，下記の部分はその代表として最有力候補だろう．)

—〈ここに[2, p.32 – p.33]の記述を引用〉—

これを読んだとき，先ずおかしいと気付いてくれないと困る．間違いを指摘するためには，数列の収束についての ε-δ 論法式定義を確りと把握しておく必要がある．例え ε-δ 論法式定義を把握していなくとも，おかしいと気付かないといけない部分もある．さらに，何故このような間違いを書いてしまうのかを推測する (教師としての重要な能力の一つ) ためには，この部分の書物

[†12]筆者の勘違い．2015年度から実施される．

[†13]‘数学教師’と‘数学科の教員免許状を所持する者’とは別の概念である．後者が前者の部分集合であることが理想であるが，．．．
ここでは‘数学の先生’は‘数学科の教員免許状を所持し，学校で数学を教えている者’と言う様な感じか．

における位置付けなども考慮しなければならないだろう．また，上記の本をその趣旨に沿って良教科書に仕立て直すのは，非常に良い勉強になるだろう．

上記引用の最初の部分について説明をしておこう．(cf. 上記書物の p.22 – p.30.)

実数 x に対して，

$$x = q_1 + \alpha_1 \quad (q_1 \in \mathbb{Z},\ 0 \leq \alpha_1 < 1)$$

と一通りに表すことが出来る．

$\alpha_1 \neq 0$ ならば，

$$\frac{1}{\alpha_1} = q_2 + \alpha_2 \quad (q_2 \in \mathbb{Z},\ 0 \leq \alpha_2 < 1)$$

と表す．$x = q_1 + \dfrac{1}{q_2 + \alpha_2}$

$\alpha_2 \neq 0$ ならば，

$$\frac{1}{\alpha_2} = q_3 + \alpha_3 \quad (q_3 \in \mathbb{Z},\ 0 \leq \alpha_3 < 1)$$

と表す．$x = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \alpha_3}}$

以下同様にして行くと，x が有理数ならば有限回で終わり，x が無理数ならば無限に続く．これを

$$q_1 + \frac{1}{q_2} {}_{+\cdots\cdots+} \frac{1}{q_n}$$

或いは

$$q_1 + \frac{1}{q_2} {}_{+\cdots\cdots+} \frac{1}{q_n} {}_{+\cdots\cdots}$$

と記し，x の連分数展開と言う事にする．

定理 3.2. ([2, 定理 3.2] を少し変更)　無理数 x の連分数展開

$$q_1 + \frac{1}{q_2} {}_{+\cdots\cdots+} \frac{1}{q_n} {}_{+\cdots\cdots}$$

に対して，第 n 項 $(n \geq 1)$ までとって，

$$x_n = q_1 + \frac{1}{q_2} {}_{+\cdots\cdots+} \frac{1}{q_n}$$

とおき，これを既約分数(分母が正の)に直したものを $\dfrac{P_n}{Q_n}$ とおくと，

$$P_1 = q_1,\ Q_1 = 1\ ; \quad \begin{cases} P_n = q_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = q_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases} \quad \text{for } n \geq 2\ \ (P_0 = 1,\ Q_0 = 0)$$

である．そして，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = x$ が成り立つ．

参考：連分数について手っ取り早く知るには次の本がある．

芹沢 正三：数論入門，講談社ブルーバックス B1595，2008 April.