数理解析研究所講究録
第2073巻 2018年 114-124

不等式と私 (INEQUALITIES AND I)

高橋眞映 (SIN-EI TAKAHASI)

(山形大学工学部) (FAC. ENGI., YAMAGATA UNIV.)

ABSTRACT. Since I encountered the Kantorovich inequality 22 years ago, I have been somehow fascinated by inequalities. I shall discuss the inequalities I have been involved with so far, and then would like to address the fundamental questions of what an inequality is, what the self is, and so on.

1. 始めに

本研究集会の主催者の冨永雅さんに講演を依頼されたとき、何を話そうか迷いました。僕は 2010 年山形大学を retire した後、東邦大の塚田真さんに呼ばれ、そこの非常勤講師をしました。彼は情報数理セミナーを主催していて、ある時彼にセミナーで何か話して欲しいと言われ、不等式に関する話しをしました。それで、依頼された講演はこれを土台に話そうと言う考えに至り上述の迷いが消えました。

所で、齋藤三郎先生は「数学は関係の学問である」と喝破され、藤井正俊さんは「数学は人間関係の学問である」と言われました。上述の 4 人の先生方は僕の論文の共著者であり、今その関係の重さを噛み締めております。

最近塚田さんが、「小澤の不等式」でときの人となった小澤正直さんを東邦大に呼んで講演会を催しました。小澤の不等式は一言で言えばハイゼンベルグの不等式では存在しない現象を保証するものです。彼は懇親会の場で僕に「ハイゼンベルグの不等式は Schwarz の不等式であるが、自分の不等式は Schwarz の不等式を 3 回使って導き出されたものである」と言いましたが、その時 僕は Schwarz の不等式の偉大さを改めて想いました。また彼は「直ぐ reject されるような論文でなければならない」と息巻いていましたが、これも印象深い話でした。因みに彼は僕の将棋の師匠です。

2. プロローグ

1988 年 11 月神保敏弥先生の主催する関数環研究集会が奈良教育大学で開催されました。この研究集会で何を話したかは全く記憶にありませんが、研究集会が終わって、羽鳥理さんと二人で帰る途中 JR 奈良駅の階段あたりで、突然僕は「不等式より、等式の方が本質的ではないかなー?」と言う質問を彼に投げかけました。そのとき何故そう思ったのかはこれまた全く記憶にありませんが、しかし後になって知ったのですが、関数解析学の基本不等式の一つである Schwarz の不等式 (梅垣壽春先生の言) が Lagrange の等式から直接導かれる事を思いますと、この質問があながち的を得ていないとは言えません。しかし羽鳥さんのそのときの答えは否定的なものでした。何故かはこれまた全く記憶にありません。

1988 年と言えば、その前々年藪田公三先生のご尽力と和田淳藏先生のご指導で早稲田大学から学位を頂いた関係もあり、その翌年、足掛け 18 年と言う長かった助手時代に幕を下ろし、渡利千波先生のお招きで新しい任地米沢に赴いて、新たに数学の教育・研究に燃えてい

た頃でした。当時僕は測度環における Bochner-Schoenberg-Eberlein の定理を可換 Banach 環 A 及び A 上の Banach module X に焼き直すため、BSE と呼ばれる次のような不等式が常に頭にありました (cf. [3, 4, 5, 27, 46, 57, 66])：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_i\sigma(\varphi_i)\right| \leq \|\sigma\|_{BSE}\|\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\|_{A^*}$$

and

$$|\sum_{k=1}^{n} < \sigma(\varphi_i), f_i > | \leq \|\sigma\|_{BSE}\|\sum_{i=1}^{n} f_i \circ \pi_{\varphi_i}\|_{X^*}.$$

ここで A は可換 Banach 環を表し、X は A 上の Banach module を表します。特に第 2 式は $A = \mathbf{C}$ の場合、上述の Schwarz の不等式を含む基本不等式 $|f(x)| \leq \|x\|_X\|f\|_{X^*}$ を表します。これらの BSE 不等式は僕にとっては生涯の研究テーマである可換 Banach 環及び Banach modules の分類問題を考察する上で大切な不等式だったのであります。その後ずっと井上純治先生のご協力を得て今日までこの分類問題に携われる幸福を感じています。

所で 1985 年頃だったか、作用素論・作用素環研究集会で上の第 1 不等式を話した所、長田尚先生から、「これは Helly の定理である」と言うご指摘を受け、その後の BSE 理論を大きく発展させました。Helly の定理はある種の不等式と等式が結ばれることを主張するもので、上述の問題に深く関連した定理と考えられます。

3. 目覚め

さて時は流れ、1995 年 4 月のある日、東北大学で吉野崇先生の主催する作用素論・作用素環論セミナーが始まる前、このゼミ仲間である岡安隆照先生とトイレで会話をしていて、この世に Kantorovich 不等式なるものがあることを知りました。岡安先生はその数ヶ月前、RIMS で開催されたある研究集会に出席されていたので、そこではどんな話がありましたかとお聞きしたところ、何でも藤井正俊さんが Kantorovich の不等式について話していたと言う事でした。それで、それはどんな不等式ですかと尋ねたところ、岡安先生そのときはうろ覚えのせいか、良く分かりませんでした。ところが、その 2 ヶ月後、青梅の明星大学で梅垣先生の主催する研究集会に出席したところ、藤井正俊さんも出席されていました。それで Kantorovich 不等式を思い出し、早速彼に聞いたところ、

$$0 < m \leq T \leq M, \|\xi\| = 1 \Rightarrow (T\xi,\xi)\,(T^{-1}\xi,\xi) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}$$

と紙に書いて頂きました。そこで、「これはどんな意味を持ち，どうして $\frac{(M+m)^2}{4Mm}$ で押さえられるのですか？」と問うた所、藤井さん微笑するだけであまり真剣に答えて頂けませんでした。

その後 Kantorovich の不等式はすっかり忘れてしまい、そのまま時を過ごしたその年の秋のある日、いつものように東北大学でのセミナーの始まる前、豊富にある数学雑誌に目を通していましたら、V. Pták, The Kantorovich inequality という文字が目に飛び込んで来ました。そこで初めて、Kantorovich の元式が

$$\begin{gathered} 0 < m \leq x_1, ..., x_n \leq M, p_1, ..., p_n \geq 0 : p_1 + ... + p_n = 1 \\ \Rightarrow (p_1x_1 + ... + p_nx_n)\left(\frac{p_1}{x1} + ... + \frac{p_n}{x_n}\right) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} \end{gathered}$$

である事を知り、早速読んで見ますと、彼はこの不等式の持つある種の同次性を見抜きそれによって簡潔な証明を与えており、感動してしまいました。それでこの不等式に興味を持つようになり、その後この不等式を含んだもっと一般の不等式を考察し、塚田真さん、棚橋浩太郎さん、中村(荻原)俊子さんの協力を得て、その等号条件を調べて見ました (cf. [7, 10])。そのとき現れた関数が、

$$\sigma_p(m,M) = \begin{cases} \frac{p}{p-1}\frac{mM^p - Mm^p}{M^p - m^p} & \text{if } 0 < m < M, p \neq 0,1 \\ \frac{M-m}{\log M - \log m} & \text{if } 0 < m < M, p = 0 \\ \frac{Mm(\log M - \log m)}{M-m} & \text{if } 0 < m < M, p = 1 \end{cases}$$

でした。この関数は相加平均 ($p=-1$)、相乗平均 ($p=\frac{1}{2}$)、調和平均 ($p=2$) を補間する新しい関数で、しかも p に関して狭義の単調減少関数となっています。この平均に関する新しい関数はこのようにして偶然発見されたものですが、それが何故ある種の不等式の等号条件と関わっているのかは謎であります。全く不思議としか言いようがありません。

まあこの謎はともかくとして、嬉しい事がありました。中村正弘先生の僕への手紙の一節を引用することで、その嬉しさが分かるでしょう。

「このご研究によって、われわれは新しい operator means の family に出合いました。全くご研究の副産物です。この family によって Kubo がかなり以前に導入していた log mean が singular なものでないことがわかったのに、永い間—まさか 20 年もこの道を歩けるとは思っていませんでしたが—つづけて来た operator means の研究が活性を取り戻せました。そして，多分、まだまだやることがあるのだという思いを新たにしました。」(原文のまま)

もう一つ嬉しい事がありました。それは、瀬尾祐貴さんと冨永雅さんが上の理論に端を発し，Hilbert 空間上の作用素不等式の分野で大きな成果を上げておられる事です。その後も両氏はこの分野で一流をなし，現在も頑張っておられるご様子を見ると、感動するものがあります。上述のように Kantorovich 不等式は、現在も作用素不等式の分野で大きな発展を遂げております。その中心人物の一人であられた古田孝之先生から、Kantorovich は経済学部門でノーベル賞を取った人である事を教えて頂きました。

4. その後

(I) 高橋泰嗣さんとは 1994 年の春、神戸大での学会で知り合いました。学会の間に、泰嗣さんと柳研二郎さんと三人で六甲に登ったときの事です。途中二人共碁好きである事が分かり、早速六甲から引き返し、碁盤と碁石を梅田駅のデパートで買って宿に帰りました。そして泰嗣さんとはそれ以来のおつき合いとなりました。あるとき研究集会の宿で、彼からこの世に Hlawka 不等式なるものが存在することを教えられました。それは次のような不等式です：

$$\|x+y\| + \|y+z\| + \|z+x\| \leq \|x\| + \|y\| + \|z\| + \|x+y+z\|$$
$$(x,y,z \in \mathbf{R}^n).$$

これは平行六面体の 3 面の対角線の和は 3 辺及び対角線の和より小さい事を謳っています。その後和田州平さんの協力を得て、3 人で Hlawka 不等式に関する面白い論文を書きました (cf. [15, 18])。特に [15] で得られた不等式はある種の等式から導かれたものです。

所で、Hlawka 不等式を満たす Banach 空間を Hlawka 空間と言いますが、L^1–空間は勿論 Hlawka 空間であり、従って埋め込み定理により L^p–空間 $(1 \leq p \leq 2)$ もまた Hlawka 空間です。ここに面白い問題があります。今 3 次元実 ℓ^p–空間 $\ell^p(3)$ を考えますと、$1 \leq p \leq 2$ のとき、$\ell^p(3)$ は Hlawka 空間となりますが、$p=3$ に対しては Hlawka 空間とならない事が簡単な計算から分かります。しかしながら $2 < p < 3$ のとき、$\ell^p(3)$ が Hlawka 空間なの

高橋眞映 (SIN-EI TAKAHASI) (山形大学工学部) (FAC. ENGI., YAMAGATA UNIV.)

かあるいはそうでないのか、こんな簡単そうに見える問題でも未だに分かっていません。以前、小宮英敏さんに呼ばれてこの事を慶応大で話した時、八尾政行さんからコンピュータで $p = e$: Napier number が境目であるらしいことを突き止めたと言う知らせを頂きました。しかしながら、もしそうだとしても、これを数学的に証明する事は至難の業と考えています。

次に泰嗣さんから Djokovic の不等式と言うものを教えて頂きました。これは Hlawka 不等式の拡張で、任意の Hlawka 空間 H 上で、

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \|x_{i_1} + \ldots + x_{i_k}\| \leq \binom{n-2}{k-1} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| + \binom{n-2}{k-2} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|$$

$$(2 \leq k \leq n-1, x_1, \ldots, x_n \in H)$$

が成り立つと言うものです。そこで泰嗣さんと本田あおいさんの協力を得て、この不等式に新解釈を与えました。それはこの不等式がある種の閉凸集合の唯一の端点に対応していると言うもので、この不等式に一つの正当性を与えました (cf. [16])。

その後宮島静雄さん、泰嗣さん、高木啓行さんの協力を得て上の新解釈を抽象化し、「Convex sets and inequalities」と題する論文をものにしました (cf. [24])。この論文の最後に出て来る不等式を紹介しましょう。それは以下のものです：

$$\mu(\Omega)^{-\frac{1}{q}} \|f\|_q \leq \left(1 - \frac{p}{q}\right) \|f\|_\infty + \frac{p}{q} \mu(\Omega)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p$$

$$(f \in L^\infty(\Omega, \mu), 1 \leq p < q < \infty).$$

これは見慣れない不等式ですが、実はある種の閉凸集合群の端点に対応する不等式群の極限になっているもので、それなりの正当性があります。

(II) 中国に L. Keng Hua という偉い数学者がいました。東大で講演中に亡くなったそうですが、1965 年彼は所謂 Hua の不等式と呼ばれる次のような不等式を発見しました：

$$\left(\delta - \sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 + \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq \frac{\alpha \delta^2}{n + \alpha}. \tag{1}$$

これは Number Theory の中で重要な不等式の一つと言われていますが、この不等式とは 2002 年の秋，例の東北大学の数学図書室で出合いました。しかしその後何度考えてもこの不等式の意味する所が見えませんでした。そこで、三浦毅さん、高木啓行さん、神藏正さんの協力を得て、この不等式を拡張する幾つかの不等式 (Dragmir-Yang, Pečarić, Wang 等による Hua 型不等式) を徹底的に調べ、最後にそれら全てを抽象化し、次のような結果を得ました (cf. [23]) ：

Theorem. Let $(G, +)$ be a semigroup, and let φ and ψ be two nonnegative functions on G. Suppose that φ is subadditive on G and that there is a positive constant λ such that $\varphi(x) \leq \lambda\psi(x)$ for all $x \in G$. If f is a nondecreasing convex function on $[0, \infty)$, then

$$f(\varphi(a_0)) + \lambda \sum_{i=1}^{n} f(\psi(a_i)) \geq (1 + n\lambda) f\left(\frac{1}{1+n\lambda} \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\right)$$

for all $a_0, \ldots, a_n \in G$.

ここに流れる思想は *conjugate relation* であり、僕の最も好む思想の 1 つであります。この場合は、φ と ψ という異質なものを "$\leq \lambda$" で結びつけると何が生まれるかという事です。

さて上述の定理は次の系を生みます。

Corollary. Let X be a real or complex normed space with dual X^* and $p > 1$. Then

$$|\delta - f(x)|^p + \lambda^{p-1}\|x\|^p \geq \lambda^{p-1}\left(\lambda + \|f\|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-p}\delta^p \tag{2}$$

holds for all $\delta, \lambda > 0, x \in X$ and $f \in X^*$.

特に $X = \mathbf{R}^n, p = 2, x = (x_1, ..., x_n), f(x_1, ..., x_n) = x_1 + ... + x_n$ と置きますと、不等式 (2) は元々の Hua 不等式 (1) そのものになっていることが分かります。

さて不等式 (2) に現れる係数 λ^{p-1} 及び $\lambda^{p-1}\left(\lambda + \|f\|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-p}$ は最良であろうかと言う素朴な疑問が生じます。

所で話は変わりますが、ある族の全てに共通するものを発見することは重要であり且つ嬉しいものであります。あるとき、新刑事コロンボをテレビで見ていて妙に納得してしまいました。話の内容は以下のようでした。

「ある日金回りの悪い甥っ子が叔父に相談に来ました。甥っ子は 3 千万ドルの宝くじに当たったのですが、離婚寸前の妻に半分持って行かれるのが悔しかったからです。結局その甥っ子は叔父に殺され、3 千万ドルは叔父のものになるのですが。ある日仮装パーティから抜け出した叔父は甥っ子のアパートに行き，事故を装い彼を殺すのですが、担当のコロンボ警部は叔父に不信感を持ちます。彼は殺された甥っ子がかわいがっていたチンパンジーに目をつけ、チンパンジーを写した何枚かの写真はみな指輪、腕時計、イヤリング等に触っている事を発見します。共通項が「光るもの」と知った彼は、結局貴族の仮装をしていた叔父の首飾りのペンダントにチンパンジーの指紋が残っていたことを突き止め、叔父を逮捕するのです。」

これを見ていたとき、上述の問題は、ある種の領域に関する「共通項の原理」を実現することによって解決し、同時にこの不等式の意味する所も分かるのではないかと思いました。実際 (2) を

$$\alpha A_x^p + \beta B_x^p \geq 1 \quad (\alpha, \beta > 0, x \in X)$$

のような一般式に変形し、これらが定義する領域群の全ての共通部分をある種の数学的技法 (包絡線論法) で決定する事によって、疑問を解決する事が出来ました。最近、瀬尾祐貴さんの講演でこの論法が使われているのが印象的でした。

また「Hua 型不等式は累乗関数に関する Jensen の不等式が変身したものである」事も分かりました。そして上の議論を更に一般化してみると、次のようなシンプルな定理が生まれます。

Theorem. For $x = (x_1, ..., x_n), u = (u_1, ..., u_n) \in \mathbf{R}^+ \times ... \times \mathbf{R}^+$ with $u_1 + ... + u_n = 1$ and $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbf{R}^n$, put

$$E(x;p,u) = A_u\left(\log\left(\frac{x_1}{A_u(x)}, p_1\right), ..., \log\left(\frac{x_n}{A_u(x)}, p_n\right)\right),$$

where $A_u(x) = u_1x_1 + ... + u_nx_n$. Then

$$E(x;p,u) \geq 0 \ (p_1, ..., p_n \geq 1) \quad \textit{and} \quad E(x;p,u) \leq 0 \ (p_1, ..., p_n \leq 1).$$

Here $\log(x,p) = \frac{x^p - 1}{p}$ $(x > 0, p \neq 0)$.

最初あれほど複雑だった証明も、ここまで来ると至ってシンプルになるから不思議でなりません。

さて上はデジタルの話ですが、上の定理のアナログ版は以下のようになります。

高橋眞映 (SIN-EI TAKAHASI) (山形大学工学部) (FAC. ENGI., YAMAGATA UNIV.)

予想。確率空間 (Ω, P) 上の正値可測関数 f, g に対して、

$$E(f;g,P) = \int_{\Omega} \log\left(\frac{f(\omega)}{M(f)}, g(\omega)\right) dP(\omega)$$

と置く。但し $M(f) = \int f dP$ である。このとき、

$$E(f;g,P) \geq 0\,(g(\omega) \geq 1, a.e.) \quad and \quad E(f;g,P) \leq 0\,(g(\omega) \leq 1, a.e.)$$

が成り立つ。

果たして本当でしょうか？

(III) 以前やはり東北大学の数学図書室で、楕円型微分方程式の解の構造に関する論文に出合いました。その証明がなかなか面白かったので、僕と泰嗣さん、河邉淳さんの三人が齋藤三郎先生に桐生に呼ばれたおり，その論文を紹介した事がありました。その後，岡裕和さん、三浦毅さんの協力を得て上の論文を発展させ、第 3 種混合問題の解の構造を研究しました (cf. [19])。その際 Wirtinger の不等式なるものが重要であることを田中直樹さんに教えてもらいました。Wirtinger の不等式は後で知ったのですが、新数学事典（一松信・竹之内脩編）にも載っている有名な不等式で次のようなものを指します：

$$\pi = \inf\{\|f'\|_2\|f\|_2^{-1} : f(0) = f(1) = 0\}.$$

これは円周率 π が 0, 1, 微分，積分だけからなる全く抽象的な式で表現される事を述べており、強烈な美意識を感じました。そこで三浦毅さんの協力を得て、 Wirtinger の不等式と Beesack の不等式を統一する積分不等式を得ました (cf. [20])。更に塚田真さん、三浦毅さん、泰嗣さん、和田州平さんの協力を得て、

$$\int_0^1 f(t)\|x(t)\|^q d\mu(t) \leq C\int_0^1 g(t)\|x'(t)\|^q d\mu(t)$$

なる形の不等式を研究しました (cf. [22])。その中の成果は例の *conjugate relation* を巧みに導入して得られたものであります。しかしそこではどうしても最良係数を見つける事は出来ませんでした。これはかなりの難問のようであります。

(IV) それから三浦毅さん、高柳新さん、早田孝博さんの協力を得て、境界条件 $f(0) = 0$ 及び $f(0) = f(1) = 0$ に対する Wirtinger's inequality $\|f\|_q \leq C_q\|f'\|_q \quad (1 < q < \infty)$ のもう少し一般化した不等式の最良係数及び到達関数を完全に決定する事が出来ました。これも例の *conjugate relation* を利用するのですが、Arctan 型関数変換を用いて全体として本当に初等的な証明を与える事が出来ました (cf. [26])。しかし Hardy-Littlewood-Polya の有名な不等式の本には、証明の最後に「この証明は本質的に変分法によるものである。そして（傾きを与える関数 p を決定する事の困難さを考えると）これ以外の初等的な証明が見つかるとは思えない」と書いてあります。しかしながら実際には Euler の方程式、極値関数、超過関数などの概念を使うため、とても初等的とは思えません。これはその頃一番夢中になり、そして感動したものです。

(V) Wirtinger's inequality に夢中になったのを境にして、それまで続いていた Hyers-Ulam 型の安定性問題に熱を入れるようになりました。しかしこれも大きな見地に立てば不等式に属する事になります。2007 年以降の仕事は参考文献に載せましたので，興味がおありの方は僕にお知らせ頂ければ幸いです。

(VI) 山形大 retire 後、熊原啓作先生のお世話で放送大学の客員教授になりましたが、この関係でまた不等式に興味を抱くようになりました。実は熊原先生のゼミの院生で和歌山市在住の中筋康夫さんという方がおられましたが、彼は凸解析に興味を持ち、熊原ゼミで彼独自の平均の話をされました。それで興味を持った僕が彼の修論のお手伝いをする事になりました。中でも面白いのは Jensen の不等式の新解釈です。Jensen の不等式とはご存知のように次のようなものを指します。

Jensen's inequality. Let (Ω, μ) be a probability space and I an interval of $\mathbf{R}$. If δ is a continuous convex function on I and $f \in L^1(\Omega, \mu)$ with $f(\Omega) \subseteq I$, then

$$\delta\left(\int f d\mu\right) \leq \int \delta \circ f d\mu$$

holds.

これは μ を離散に取り、f を動かせば δ の凸性を直接表しています。しかしこの凸性を分解すると面白い事が見えて来ます。つまり $\delta = \psi \circ \varphi^{-1}$ と分解するのです。このとき、Jensen's inequality は

$$\sharp_\varphi \leq \sharp_\psi \Rightarrow M_\varphi(f) \leq M_\psi(f)$$

を主張しています。ここで $\sharp_\varphi$ は φ が導く相加平均で、$M_\varphi(f)$ は f の φ–mean と呼ばれる平均を表しています。従って Jensen's inequality はある種の平均関数はその順序を保存すると述べている事になります。これは最初中筋さんがある条件のもとで考えられた事で、それを僕がただ脚色しただけです。従ってこれは彼の数学的センスの良さを物語っています。この結果から φ–mean の細分に関する幾何学的性質が明らかになって行きます (cf. 44)。ここで思い出すのは、例の Furuta 不等式の創始者古田先生が正作用素の指数を分数に分解する事によって、作用素不等式に大きな発展をもたらした事です。我々の作業もその Furuta 思想の範疇であるこ事を後で悟りました。

所で Jensen's inequality と可換半群の間には深い関係があります (cf. [51, 52])。可換半群に関して、正数上の簡約的連続半群演算は通常の乗法と加法と加法+1 の何れかに同型であることが知られています (従って我々は小学生の時、何故足し算、掛け算を習うのかが分かります)。

実は 1826 年 Abel が連続条件を微分可能条件で置き換えたこの同型問題を考察し、後に Hilbert が彼の第五問題の the second part で連続条件でどうなるかを問題にしました (cf. [2])。この問題を 1949 年に初めて解決したのが Aczél [1] です。彼は指数関数的発想をもとにこれを解決しました。最近そのことを知らず中筋さんは Aczél とほぼ同じ方法で同じ結果を出しています。この一事からも、彼が如何に素晴らしい才能を持っていたかを窺い知ることが出来ます (cf. [59])。

ついでながら、Aczél の 40 年後 Craigen-Pales は対数関数的発想のもとに簡潔な証明を与えていますが、これを知らずに小林ゆう治さんはほぼ同じ方法で同じ結果を出しています (cf. [59])。僕が中筋さんと同様小林さんを尊敬する所以であります。

(VII) 最近 Young の元式：$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$ $(x, y > 0, 1/p + /q = 1)$ に興を起こし、これを中筋さんと白柳潔さんとで考察して見ました。いま Young 型不等式群 $\alpha x^p + \beta y^q \geq xy$ を考えますと、これは $\alpha\beta$ 平面上の第 1 象限内のある種の双曲線：

$$\beta = p^{\frac{1}{1-p}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\alpha^{\frac{1}{1-p}} \ (\alpha > 0)$$

で囲まれた領域の点達に対応しています。そして最良不等式群は上の双曲線上の点に対応していることが分かります。このとき点 $(1/p, 1/q)$ に対応している不等式が Young の元式なのですが、不思議な事に無数にある最良不等式群は全て Young の元式に帰する事が分かりました (cf. [68])。丁度、平面上の数で、微積分が行えるものは複素数しかなく、それ故複素数は天恵であるように、Young の元式もまた天恵であり、Young は偉かった訳であります。彼は草葉の陰で、「今頃わかったか！」と苦笑している事でしょう。しかし悲しいことに中筋さんにとってこれが最後の論文となってしまいました。

(VIII) 他に関連する論文を参考文献の欄に年代順に書きました。読者の参考になれば幸いです。

5. エピローグ

だいぶ前の事になりますが、京大で日本数学会が開催されたとき、佐藤幹夫先生が総合講演の中で、「関数が先か方程式が先か」と言う話をされました。そのとき、「実数が先か、虚数が先か ...... 虚実曰く云々......」と話され結局は分かりませんでした。やはり「不等式が先か、等式が先か」あるいは「不等式が本質的か，等式が本質的か」は無意味なことなのでしょう。2 節で述べた羽鳥理さんの答えも、多分この様な意味だったのかと後で推察しています。

藤原正彦著：日本人の誇りによりますと、ヘルマン・ワイルの次男さんが「父は常々、真、善、美は同じものの 3 つの側面にすぎない」と言っていたそうです。人はその一つでも触れることが出来れば幸福というべきでしょうか？

6. 最後に

僕を米沢に招聘して下さった渡利千波先生、僕を外弟子にして下さった中村正弘、梅垣壽春両先生、恩師本間栄一郎、和田淳藏両先生は既に他界されましたが、一昨年は僕を可愛がって下さった古田孝之先生、畏友中筋康夫さんが鬼籍に入られ、昨年は碁友高橋泰嗣さんと親友高木啓行さんが鬼籍の人となりました。この場を借りてご冥福をお祈りする事をお許し下さい。合掌

謝辞。This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

またこの原稿を作成するにあたり、東邦大教授白柳潔先生にご指導頂きました。ここに改めて白柳先生に感謝の意を表します。

追記。国際数理科学協会会報の編集委員長藤井淳一先生より本原稿を題材にしたものを寄稿して欲しいと依頼されました。それで少し変更したり、手を加えたものを寄稿しました。ご了承頂ければ幸いです。

References

[1] J. Aczél, Sur les operations defines pour nombers reels, Bull. Soc. Math. France **76** (1949), 59-64.
[2] J. Aczél, The state of the second part of Hilbert's Fifth Problem, Bull. Amer. Math. Soc., **20** (1989), 153-163.
[3] Sin-Ei Takahasi and Osamu Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Shoenberg-Eberlein-type theorem, *Proc. Math. Soc.*, **110-1** (1990), 149158

[4] Sin-Ei Takahasi and Osamu Hatori, Commutative Banach algebras and BSE–inequalities, *Math. Japonica*, **37–4** (1992), 602–614.
[5] Sin-Ei Takahasi, BSE–Banach modules and multipliers, *J. Funct. Analysis*, **125–1** (1994), 6789.
[6] Masatoshi Fujii,Takayuki Furuta, Ritsuo Nakamoto and Sin-Ei Takahasi, Operator inequalities and covariance in noncommutative probability, *Math. Japonica*, **46–2** (1997), 317–320.
[7] Makoto Tsukada and Sin-Ei Takahasi, The best possibility of the bound for the Kantorovich inequality and some remarks, *J. Inequal. Appl.*, **1** (1997), 327–334.
[8] Sin-Ei Takahasi and Yasuhide Miura, A generalization of the Alzer–Faiziev inequality, *Utilitas Mathematica*, **51** (1997), 3–8.
[9] Takuya Hara, Mitsuru Uchiyama and Sin-Ei Takahasi, A refinement of various mean inequalities, *J. Inequal. Appl.*, **2** (1998) 387–395.
[10] Sin-Ei Takahasi, Makoto Tsukada, Kotaro Tanahashi and Toshiko Ogihara, An inverse type of Jensen's inequality, *Math. Japonica*, **50-1** (1999), 85–91.
[11] Ritsuo Nakamoto and Sin-Ei Takahasi, Generalizations of an inequality of Marcus, *Math. Japonica*, **50-1** (1999), 35–39.
[12] J. Mićić, Y.Seo, S.-E. Takahasi and M. Tominaga, Inequalities of Furuta and Mond–Pecaric, *Math. Inequal. Appl.*, **2-1** (1999), 83–111.
[13] Sin-Ei Takahasi and Ritsuo Nakamoto, A necessary and sufficient condition for equality in the Marcus inequality, *Proc. Internat. Conf. Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Ed. W. Takahashi and T. Tanaka) World Scientific*, **2-1** (1999), 83–111.
[14] Yuki Seo, Sin-Ei Takahasi, Josip Pecarić and Jadranka Mićić, Inequalties of Furuta and Mond–Pecarić on the Hadamard product, *J. Inequal. Appl.*, **5-3** (2000), 263–285.
[15] Sin-Ei Takahasi,Yasuji Takahashi and Shuhei Wada, An extension of Hlawka's inequality, *Math. Inequal. Appl.*, **3-1** (2000), 63–67.
[16] Sin-Ei Takahasi,Yasuji Takahashi and Aoi Honda, A new interpretation of Djokovic's inequality, *J. Nonlinear and Convex Analysis*, **1-3** (2000), 343–350.
[17] Ritsuo Nakamoto and Sin-Ei Takahasi, Norm equality condition in triangular inequality, *Sci. Math. Japon., online*, **5** (2001), 367–370.
[18] Yasuji Takahashi, Sin-Ei Takahasi and Shuhei Wada, Some convexity constants related to Hlawka type inequalities in Banach spaces, *J. Inequal. Appl.*, **7-1** (2002), 125-141.
[19] Sin-Ei Takahasi, Hirokazu Oka and Takeshi Miura, On the structure of the solution set of a third kind boundary value problem, *Math. Nachr.*, **257** (2003), 99–107.
[20] Sin-Ei Takahasi and Takeshi Miura, A note on Wirtinger–Beesack's integral inequality, *Math. Inequal. Appl.*, **6-2** (2003), 277-282.
[21] Takuya Hara and Sin-Ei Takahasi, On weighted extensions of Carleman's inequality and Hardy's inequality, *Math. Inequal. Appl.*, **6-4** (2003), 667–674.
[22] Makoto Tsukada, Takeshi Miura, Shuhei Wada, Yasuji Takahashi and Sin-Ei Takahasi, On Wirtinger–Beesack type integral inequalities, *Nonlinear analysis and convex analysis*, 541 –549, Yokohama Publ., Yokohama, 2004.
[23] Hiroyuki Takagi, Takeshi Miura, Tadashi Kanzo and Sin-Ei Takahasi, A reconsideration of Hua's inequality, *J. Inequal. Appl.*, **2005-1** (2005), 15-23.
[24] Sin-Ei Takahasi, Yasuji Takahashi, Shizuo Miyajima and Hiroyuki Takagi, Convex sets and inequalities, *J. Inequal. Appl.*, **2005-2** (2005), 107–117.
[25] Hiroyuki Takagi , Takeshi Miura, Takahiro Hayata and Sin-Ei Takahasi, A reconsideration of Hua's inequality, II, *J. Inequal. Appl.*, (2006), Art. ID21540, 8 pp.
[26] Sin-Ei Takahasi, Takeshi Miura and Takahiro Hayata, On Wirtinger's inequality and its elementary proof, *Math. Inequal. Appl.*, **10** (2007), 311–319.
[27] Jyunji Inoue and Sin-Ei Takahasi, On characterizations of the image of the Gelfand transform of commutative Banach algebras, *Math. Nachr.*, **280-(1-2)** (2007), 105–126.
[28] Sin-Ei Takahasi, Takeshi, Miura and Hiroyuki Takagi, Exponential type functional equation and Its Hyers-Ulam stability, *J. Math. Anal. Appl.*, **329** (2007), 1191–1203.

[29] Takeshi Miura, Hirokazu Oka and Sin-Ei Takahasi and Norio Niwa, Hyers-Ulam stability of the first order linear differential equation for Banach space–valued holomorphic mappings, *J. Math. Inequal.*, **1-3** (2007), 377–385.

[30] Takeshi Miura, Hirokazu Oka, Go Hirasawa and Sin-Ei Takahasi, Superstability of multipliers and ring derivations on Banach algebras, *Banach J. Math. Anal.*, **1-1** (2007), 125–130.

[31] Takeshi Miura, Hirokazu Oka, Sin-Ei Takahasi and Norio Niwa, A generalization of Wang's inequality, *Applied functional analysis, Yokohama Publ., Yokohama*, (2007), 203–210.

[32] Takeshi Miura, Atsushi Uchiyama, Hirokazu Oka, Go Hirasawa, Sin-Ei Takahasi and Norio Niwa, A perturbation of normal operators on a Hilbert space, *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, **13** (2008), 291–297.

[33] Sin-Ei Takahasi, Hirokazu Oka, Takeshi Miura and Hiroyuki Takagi, A Cauchy-Euler type factorization of operators, *Tokyo J. Math.*, **31-2** (2008),489–493.

[34] Takeshi Miura, Sin-Ei Takahasi, Norio Niwa and Hirokazu Oka, On surjective ring homomorphisms between semi-simple commutative Banach algebras, *Publ. Math. Debrecen*, **73** (2008), 119–131.

[35] Takeshi Miura, Hirokazu Oka, Sin-Ei Takahasi and Norio Niwa, Ger type stability of the first order linear differential equation $y'(t) = h(t)y(t)$, *Tamsui Oxf. J. Math. Sci.*, **24-4** (2008), 445–456.

[36] Takeshi Miura, Sin-Ei Takahasi and Norio Niwa, Ring homomorphisms on commutative regular Banach algebras, *Nihonkai Math. J.*, **19** (2008), 61–74.

[37] Yasuji Takahashi, Shuhei Wada and Sin-Ei Takahasi, A general Hlawka inequality and its reverse inequality, *Math. Inequal. Appl.*, **12-1** (2009), 1–10.

[38] Takeshi Miura, Takahiro Hayata and Sin-Ei Takahasi, An estimate of the commutativity of C^2-functions and probability measures, *Math. Inequal. Appl.*, **13-2** (2009), 169–180.

[39] Norio Niwa, Hirokazu Oka, Takeshi Miura and Sin-Ei Takahasi, Stability of almost multiplicative functionals, *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, 6-1(2009), Art. 12, 8 pp.

[40] Takeshi Miura,Hiroyuki Takagi, Makoto Tsukada and Sin-Ei Takahasi, Superstability of generalized multiplicative functionals, *J. Inequal. Appl.* , 2009, Art. ID 486375, 7 pp.

[41] Sin-Ei Takahasi, John M. Rassias, Saburou Saitoh and Yasuji Takahashi, Refined generalization of the triangle inequality on Banach space, *Math. Inequal. Appl.* , 13-4(2010), 733–741.

[42] Sin-Ei Takahasi, Takeshi Miura and Hiroyuki Takagi, On a Hyers-Ulam-Aoki-Rassias type stability and fixed point, *J. Nonlinear and Convex Analysis*, 11-3(2010), 423–439.

[43] Sin-Ei Takahasi, Takeshi Miura and Takahiro Hayata, An equality condition for Arhippainen-Müller's estimate and its related problem, *Taiwanese J. Math.*, 15-1(2011), 165–169.

[44] Yasuo Nakasuji, Keisaku Kumahara and Sin-Ei Takahasi, A new interpretation of Jensen's inequality and geometric properties of ϕ-means, *J. Inequal. Appl.*, 2011, 2011:48, 15 pp.

[45] Osamu Hatori, Kiyotaka Kobayashi, Takeshi Miura and Sin-Ei Takahasi, Reflections and a generalization of the Mazur-Ulam theorem, *Rocky Mountain J. Math.*, 42-1(2012), 117–150.

[46] Sin-Ei Takahasi, A classification of semisimple commutative Banach algebras, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces IV Kitakyushu, Japan, 251–257, Yokohama Publ., Yokohama, 2012.

[47] Takeshi Miura, Go Hirasawa, Sin-Ei Takahasi and Takahiro Hayata, A note on the stability of an integral equation, Functional equations in mathematical analysis, 207–222, Springer Optim. Appl., 52, Springer, New York, 2012.

[48] Takeshi Miura, Sin-Ei Takahasi,Takahiro Hayata and Kotaro Tanahashi, Stability of the Banach space valued Chebyshev differential equation, Appl. Math. Lett. 25-11(2012), 1976–1979.

[49] Mamoru Todoroki, Keisaku Kumahara, Takeshi Miura and Sin-Ei Takahasi, Stability problems for generalized additive mappings and Euler-Lagrange type mappings, Aust. J. Math. Anal. Appl., 9-1(2012), Art. 19, 9 pp.

[50] Yasuo Nakasuji, Keisaku Kumahara and Sin-Ei Takahasi, A new interpretation of Chebyshev's inequality for sequences of real numbers and quasi-arithmetic means, J. Math. Inequal., 6-1(2012), 95–105.

[51] Yasuo Nakasuji and Sin-Ei Takahasi, A reconsideration of Jensen's inequality and its applications, *J. Inequal. Appl.*, 2013, 2013:408, 11 pp.

[52] S.-E. Takahasi and Y. Nakasuji, Abstract Jensen's inequality and its applications, *Proc. 8th Inter. Conf. Nonlinear Analyis and Convex Analysis*, Hirosaki, Japan, 2013, 473-481.
[53] S.-E. Takahasi and Y. Nakasuji, Abstract Jensen's inequality and its applications, Proc. 8th Inter. Conf. Nonlinear Analyis and Convex Analysis, Hirosaki, Japan, 2013, 473-481.
[54] Takeshi Miura, Go Hirasawa, Sin-Ei Takahasi and Takahiro Hayata, A characterization of a system of the Banach space valued differential equations, Math. Inequal. Appl., 16-3(2013), 717–728.
[55] Yasuo Nakasuji and Sin-Ei Takahasi, A new order-preserving average function on a quotient space of strictly monotone functions and its applications, J. Inequal. Appl., 2014, 2014:450, 7pp.
[56] Sin-Ei Takahasi, Makoto Tsukada, Takeshi Miura, Hiroyuki Takagi and Kotaro Tanahashi, Ulam type stability problems for alternative homomorphisms, J. Inequal. Appl. 2014, 2014:228, 13pp.
[57] Jyunji Inoue and Sin-Ei Takahasi, Segal algebras in commutative Banach algebras, Rocky Mountain J. Math., 44-2(2014), 539-589.
[58] Hironao Koshimizu, Takeshi Miura, Hiroyuki Takagi and Sin-Ei Takahasi, Real-linear isometries between subspaces of continuous functions, J. Math. Anal. Appl. 413 (2014) 229–241.
[59] K. Kobayashi, Y. Nakasuji, S.-E. Takahasi and M. Tsukada, Continuous semigroup structures on $\mathbb{R}$, cancellative semigroups and bands, *Semigroup Forum*, 90(2015), 518–531.
[60] Seiji Anbe, Sin-Ei Takahasi, Makoto Tsukada and Takeshi Miura, Commutative semigroup operations on $\mathbf{R}^2$ compatible with the ordinary additive operation, Linear and Nonlinear Analysis, 1-1(2015), 89-93.
[61] Sin-Ei Takahasi, Makoto Tsukada and Yuji Kobayashi, Classification of continuous fractional binary operations on the real and complex fields, Tokyo J. Math., 38-2(2015), 369-380.
[62] Sin-Ei Takahasi, Hiroyuki Takagi and Takeshi Miura, A characterization of Multipliers of a Lau algebra construted by semisimple Banach algebras, Taiwanese J. Math., 20-6(2016), 1401-1415.
[63] Y. Kobayashi, S.-E. Takahasi and M. Tsukada, Continuous Archimedean semigroups on real intervals, Semigroup Forum 95(2017), 159-178.
[64] Y. Kobayashi, K. Shirayanagi, S.-E. Takahasi and M. Tsukada, Classification of three-dimensional zeropotent algebras over an algebraically closed field, Communications in Algebra, Vol. 45, Iss. 12 (2017), 5037–5052.
[65] S.-E. Takahasi, H. Takagi, M. Miura and H. Oka, Semigroup operations distributed by the ordinary multiplication or addition on the real numbers, to appear in Publ. Math. Debrecen.
[66] J. Inoue and S.-E. Takahasi, A construction of a BSE-algebra of type I which is isomorphic to no C*-algebras, to appear in Rocky Mountain. J. Math.
[67] Y. Kobayashi, S.-E. Takahasi and M. Tsukada, A complete classification of continuous fractional operators on $\mathbb{C}$, to appear in Period. Math. Hung.
[68] Y. Nakasuji, K. Shirayanagi and S.-E. Takahasi, Young's inequality is a heaven's blessing, to appear in *Linear and Nonlinear Analysis*.

数学・ゲーム工房広報部長　高橋眞映、〒 273-0866 船橋市夏見台 3-8-16-502
E-mail address: `sin_ei1@yahoo.co.jp`