

## ヘッセンバーク多様体と超平面配置

大阪大学大学院情報科学研究科, 大阪市立大学数学研究所  
堀口 達也

TATSUYA HORIGUCHI

DEPARTMENT OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF  
INFORMATION SCIENCE AND TECHNOLOGY, OSAKA UNIVERSITY / OSAKA CITY  
UNIVERSITY ADVANCED MATHEMATICAL INSTITUTE

### 1. 序文

$n$  を正整数とする. 旗多様体  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  は  $\mathbb{C}^n$  の線形部分空間の列  $V_\bullet := (V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = \mathbb{C}^n)$  全体からなる空間である. ここで, 各  $V_i$  は  $i$  次元線形部分空間を表す. 広義単調増加関数  $h : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  で  $h(j) \geq j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) を満たすものを考える. この関数はヘッセンバーク関数と呼ばれる. 線形写像  $X : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  とヘッセンバーク関数  $h : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  に対して, ヘッセンバーク多様体は以下で定義される旗多様体の部分多様体である ([8], [9]):

$$\text{Hess}(X, h) := \{V_\bullet \in \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)} \text{ for } i = 1, 2, \dots, n\}.$$

線形写像  $X$  が零写像またはヘッセンバーク関数  $h : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  が  $h(j) = n$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) のとき,  $\text{Hess}(X, h)$  は全体の旗多様体  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  と一致することが定義より分かる. ヘッセンバーク多様体の族は対称群  $\mathfrak{S}_n$  の幾何学的表現を実現するものと知られるスプリンガー多様体 ([22], [23]) や旗多様体の量子コホモロジーと関連するピーターソン多様体 ([13], [16]) を含む.

本稿では, 線形写像  $X : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  が正則な冪零写像  $N$  (ジョルダンブロックが1つだけの冪零な線形写像), または正則な半単純写像  $S$  (対角化可能で固有値がすべて異なる線形写像) に付随するヘッセンバーク多様体  $\text{Hess}(N, h)$  と  $\text{Hess}(S, h)$  を考察する. これらをそれぞれ正則な冪零ヘッセンバーク多様体, 正則な半単純ヘッセンバーク多様体と呼ぶ. 近年の進展により, 正則な冪零ヘッセンバーク多様体  $\text{Hess}(N, h)$  は超平面配置と関連があることが分かり ([21], [4]), 一方, 正則な半単純ヘッセンバーク多様体  $\text{Hess}(S, h)$  はグラフ理論における彩色対称関数と関連があることが知られている ([20], [7], [11]). さらに,  $\text{Hess}(N, h)$  と  $\text{Hess}(S, h)$  のコホモロジー環の間に次のような環同型が成り立つ ([1]):

$$(1.1) \quad H^*(\text{Hess}(N, h)) \cong H^*(\text{Hess}(S, h))^{\mathfrak{S}_n}$$

ここで, コホモロジー  $H^*(\text{Hess}(S, h))$  上の対称群  $\mathfrak{S}_n$  表現は [26] で定義されたものであり,  $H^*(\text{Hess}(S, h))^{\mathfrak{S}_n}$  は  $\mathfrak{S}_n$  不変部分環を表す.

ヘッセンバーク多様体は任意の Lie 型の旗多様体の部分多様体として定義できる. 本稿では, 超平面配置と関連づけることで環同型 (1.1) が任意の Lie 型でも成立する結果を紹介する. さらに, 超平面配置との関連を用いることでヘッセンバーク多様体における問題 (予想) が解決されることについても述べる. 本研究は, 阿部拓郎氏 (九州大学), 柘田幹也氏 (大阪市立大学), 村井聡氏 (大阪大学), 佐藤敬志氏 (大阪市立大学数学研究所) との共同研究 ([4]) である.

## 2. A型ヘッセンバーク多様体

$n$  を正整数とする.  $(A_{n-1}$  型) 旗多様体  $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$  は以下で定義される  $\mathbb{C}^n$  の線形部分空間の列全体からなる空間である:

$$\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n) := \{V := (V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i \text{ for all } i = 1, 2, \dots, n\}$$

本稿を通して以下の記号を用いる.

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$$

**定義 2.1.** 関数  $h : [n] \rightarrow [n]$  がヘッセンバーク関数であるとは, 以下の2つの条件を満たすときにいう.

- (i)  $h(1) \leq h(2) \leq \dots \leq h(n)$
- (ii)  $h(j) \geq j$  for  $j = 1, 2, \dots, n$

ヘッセンバーク関数  $h$  は各値を並べたもの  $h = (h(1), h(2), \dots, h(n))$  で表す.

ヘッセンバーク関数  $h$  を視覚化するために,  $n \times n$  の箱の集まりを考え, そのうち各  $j$  列目に  $h(j)$  個の箱を上から塗ることにより,  $h$  を表す.

**例 2.2.**  $n = 5$  とする.  $h = (3, 3, 4, 5, 5)$  はヘッセンバーク関数であり, 以下の図が箱の集まりによる表示である.

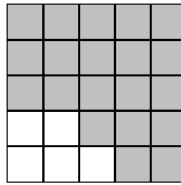


FIGURE 1. ヘッセンバーク関数  $h = (3, 3, 4, 5, 5)$  に対応する箱の集まり

**定義 2.3.** 線形写像  $X : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  とヘッセンバーク関数  $h : [n] \rightarrow [n]$  に対して,  $(A_{n-1}$  型) ヘッセンバーク多様体  $\text{Hess}(X, h)$  は以下で定義される旗多様体  $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$  の部分多様体である:

$$\text{Hess}(X, h) = \{V \in \mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)} \text{ for } i = 1, 2, \dots, n\}$$

$X$  が零写像または  $h = (n, n, \dots, n)$  のとき, ヘッセンバーク多様体  $\text{Hess}(X, h)$  は全体の旗多様体  $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$  に一致することが定義から分かる. また, 任意の可逆行列  $g \in GL(n, \mathbb{C})$  に対して,  $\text{Hess}(X, h) \cong \text{Hess}(gXg^{-1}, h); V_i \mapsto gV_i$  であるので,  $X$  をジョルダン標準形と仮定してもよい.

線形写像  $X$  の性質に応じ, 対応するヘッセンバーク多様体  $\text{Hess}(X, h)$  もそのように呼ぶ. 例えば,  $X$  が冪零 (i.e.  $\exists k, X^k = O$ ) のとき  $\text{Hess}(X, h)$  を冪零ヘッセンバーク多様体と呼ぶ.  $h = (1, 2, \dots, n)$  とする冪零ヘッセンバーク多様体はスプリングー多様体と呼ばれ, 対称群の幾何学的表現の実現として知られている ([22], [23]).

本稿では,  $X$  が正則な冪零写像  $N$  (冪零行列でジョルダンブロックがただ1つからなるもの) と正則な半単純写像  $S$  (対角化可能で相異なる固有値をもつもの) のとき

を考える<sup>1</sup>. つまり, ジョルダン標準形に直すと

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} c_1 & & & & \\ & c_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c_n \end{pmatrix}.$$

ただし,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  は相異なる. これらに付随するヘッセンバーグ多様体  $\text{Hess}(N, h)$  と  $\text{Hess}(S, h)$  をそれぞれ正則な冪零ヘッセンバーグ多様体および正則な半単純ヘッセンバーグ多様体と呼ぶ.

注意 2.4. 以下ではヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環<sup>2</sup>について考察していく.  $\text{Hess}(S, h)$  のコホモロジー環は  $S$  の固有値  $c_1, c_2, \dots, c_n$  に依存しないので,  $S$  の相異なる固有値の取り方は気にしなくてもよい.

### 2.1. 正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ .

$h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$  とする正則な冪零ヘッセンバーグ多様体  $\text{Hess}(N, h)$  はピーターソン多様体と呼ばれ, 旗多様体の量子コホモロジーと関連する ([13], [16]). 正則な冪零ヘッセンバーグ多様体はピーターソン多様体と旗多様体を離散的につなぐものと思える. まずは正則な冪零ヘッセンバーグ多様体  $\text{Hess}(N, h)$  の幾何学的性質について述べる:

定理 2.5 ([12], [13], [21], [25], [15]). 正則な冪零ヘッセンバーグ多様体  $\text{Hess}(N, h)$  に対し

- (1)  $\text{Hess}(N, h)$  は一般に特異点をもつ.
- (2)  $\text{Hess}(N, h)$  の複素次元は  $\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$  である.
- (3)  $\text{Hess}(N, h)$  は複素セル分割 (complex affine paving) をもつ. 特に,  $\text{Hess}(N, h)$  の奇数次コホモロジーは消えている.

注意 2.6. 定理 2.5 (2) における  $\text{Hess}(N, h)$  の複素次元  $\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$  は, ヘッセンバーグ関数  $h$  を箱の集まりと思えば, 対角線より真に左下に位置する箱の個数を表す. 例えば,  $h = (3, 3, 4, 5, 5)$  のとき,  $\text{Hess}(N, h)$  の複素次元は 5 である.

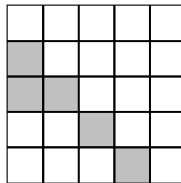


FIGURE 2.  $h = (3, 3, 4, 5, 5)$  とする  $\text{Hess}(N, h)$  の複素次元でカウントされる箱の集まり

<sup>1</sup> $X$  が正則であるとは  $X$  のジョルダン標準形において各ジョルダンブロック  $J_i$  に属する対角成分を  $c_i$  としたときに  $c_i$  たちが相異なるときを表す.

<sup>2</sup>本稿ではコホモロジーは実数係数の特異コホモロジーを表す.

次に,  $\text{Hess}(N, h)$  のコホモロジー環の明示的表示を述べる. 旗多様体  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  のコホモロジー環は

$$(2.1) \quad H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/(e_i \mid 1 \leq i \leq n)$$

で与えられることが知られている<sup>3</sup>. ここで,  $e_i$  は変数を  $x_1, \dots, x_n$  とする次数  $i$  の基本対称式を表す. (2.1) の対応は  $x_i$  を  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  上の  $i$  番目のトートロジカル直線束  $L_i$  の第一チャーン類  $c_1(L_i)$  に送る写像である.  $1 \leq j \leq i \leq n$  に対して, 多項式  $f_{i,j} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  を

$$(2.2) \quad f_{i,j} := \sum_{k=1}^j \left( \prod_{\ell=j+1}^i (x_k - x_\ell) \right) x_k$$

により定義する. ここで,  $i = j$  のとき  $\prod_{\ell=j+1}^i (x_k - x_\ell) = 1$  とする.

**定理 2.7** ([1]).  $\text{Hess}(N, h)$  を正則な冪零ヘッセンバーグ多様体とする. このとき, 包含写像  $\text{Hess}(N, h) \subset \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  が導く制限写像  $H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \rightarrow H^*(\text{Hess}(N, h))$  は全射であり, 次の環同型が成立:

$$(2.3) \quad H^*(\text{Hess}(N, h)) \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/(f_{h(1),1}, f_{h(2),2}, \dots, f_{h(n),n})$$

ここで,  $f_{h(j),j}$  は (2.2) で定義されたものであり, (2.3) における対応は  $x_i$  を制限写像  $H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \rightarrow H^*(\text{Hess}(N, h))$  による  $c_1(L_i)$  の像  $c_1(L_i)|_{\text{Hess}(N, h)}$  に送ることで得られる.

**注意 2.8.**  $h = (n, n, \dots, n)$  のとき, 対応するヘッセンバーグ多様体は旗多様体であった. このとき, (2.3) の右辺に現れるイデアル  $(f_{n,1}, f_{n,2}, \dots, f_{n,n})$  は基本対称式  $e_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) で生成される ([1, Remark 3.4] 参照).

特に, この表示 (2.3) から可換環論の一般論を用いることで次が得られる.

**系 2.9** ([1]). 正則な冪零ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環  $H^*(\text{Hess}(N, h))$  はポアンカレ双対代数である. すなわち,  $m := \dim_{\mathbb{C}} \text{Hess}(N, h)$  とすると, ペアリング

$$H^{2k}(\text{Hess}(N, h)) \times H^{2m-2k}(\text{Hess}(N, h)) \rightarrow H^{2m}(\text{Hess}(N, h)) \cong \mathbb{R}$$

は非退化である ( $0 \leq \forall k \leq m$ ). ここで, 最初の写像はカップ積をとる写像を表す.

## 2.2. 正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(S, h)$ .

正則な半単純ヘッセンバーグ多様体  $\text{Hess}(S, h)$  の幾何学的性質について次が成立.

**定理 2.10** ([8]). 正則な半単純ヘッセンバーグ多様体  $\text{Hess}(S, h)$  に対し

- (1)  $\text{Hess}(S, h)$  は非特異である.
- (2)  $\text{Hess}(S, h)$  の複素次元は  $\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$  である.
- (3)  $\text{Hess}(S, h)$  は複素セル分割 (complex affine paving) をもつ. 特に,  $\text{Hess}(S, h)$  の奇数次コホモロジーは消えている.
- (4) ヘッセンバーグ関数  $h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$  とする  $\text{Hess}(S, h)$  は,  $A_{n-1}$  型 Weyl cambers を扇とするトーリック多様体である.

<sup>3</sup>表示 (2.1) は整数係数でも成立 ([10, Section 10.2, Proposition 3] 参照).

注意 2.11. 定理 2.5 (2) と定理 2.10 (2) より, 任意のヘッセンバーグ関数  $h$  に対して,  $\text{Hess}(N, h)$  と  $\text{Hess}(S, h)$  の複素次元は同じである:

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hess}(N, h) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hess}(S, h)$$

一般のヘッセンバーグ関数  $h$  に対する  $\text{Hess}(S, h)$  のコホモロジー環の明示的表示を与える問題はまだ解決されていない. 正則な冪零ヘッセンバーグ多様体  $\text{Hess}(N, h)$  のときと違って, 包含写像  $\text{Hess}(S, h) \subset \mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)$  から導かれる制限写像  $H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)) \rightarrow H^*(\text{Hess}(S, h))$  は一般に全射ではないため,  $H^*(\text{Hess}(S, h))$  の  $\mathbb{R}$ -代数としての (“極小” な) 生成元を見つけなければならない. 最近の結果として, ヘッセンバーグ関数  $h$  が  $h = (h(1), n, \dots, n)$  という特別な場合について GKM グラフを用いてコホモロジー環  $H^*(\text{Hess}(S, h))$  の明示的な表示が得られた ([2]).

### 2.3. $\text{Hess}(N, h)$ と $\text{Hess}(S, h)$ の関係.

正則な冪零ヘッセンバーグ多様体  $\text{Hess}(N, h)$  と正則な半単純ヘッセンバーグ多様体  $\text{Hess}(S, h)$  の性質についてまとめる.

	$\text{Hess}(N, h)$	$\text{Hess}(S, h)$
$h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$	$Pet$	$X_{A_{n-1}}$
$h = (n, n, \dots, n)$	$\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)$	$\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)$
特異性	(一般に) 特異	非特異
複素次元	$\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$	$\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$
複素セル分割 (complex affine paving)	もつ	もつ
旗多様体のコホモロジー環からの制限写像	全射	(一般に) 全射でない
コホモロジー環	PDA	PDA

- $Pet$ : ピーターソン多様体
- $X_{A_{n-1}}$ :  $A_{n-1}$  型 Weyl chambers を扇とするトーリック多様体
- $\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)$ : 旗多様体
- PDA: ポアンカレ双対代数

$\text{Hess}(N, h)$  と  $\text{Hess}(S, h)$  のコホモロジー環の間には次の関係が成立.

定理 2.12 ([1]). 任意のヘッセンバーグ関数  $h$  に対して, 次の環同型が成立.

$$(2.4) \quad H^*(\text{Hess}(N, h)) \cong H^*(\text{Hess}(S, h))^{\mathfrak{S}_n}$$

ここで, コホモロジー環  $H^*(\text{Hess}(S, h))$  上の対称群  $\mathfrak{S}_n$  作用は [26] で構成されたもので, 右辺は  $H^*(\text{Hess}(S, h))$  の  $\mathfrak{S}_n$  不変部分環を表す.

注意 2.13.  $h = (n, n, \dots, n)$  とする  $\text{Hess}(S, h)$  は旗多様体  $\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)$  であり, このとき [26] で構成された  $H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n))$  上の  $\mathfrak{S}_n$  作用は自明である. 定理 2.12 における環同型 (2.4) は  $H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n))$  からの制限写像と可換図式をなすものである:

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)) & \cong & H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n))^{\mathfrak{S}_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(\text{Hess}(N, h)) & \xrightarrow{\cong} & H^*(\text{Hess}(S, h))^{\mathfrak{S}_n} \end{array}$$

注意 2.14. Tymoczko により [26] で構成されたコホモロジー環  $H^*(\text{Hess}(S, h))$  上の対称群  $\mathfrak{S}_n$  作用はグラフ理論における彩色対称関数と綺麗な対応がある ([20], [7], [11]). さらにこの対応を用いることで, グラフ理論における Stanley-Stembridge 予想が  $H^*(\text{Hess}(S, h))$  上の対称群  $\mathfrak{S}_n$  作用に関する主張に言い換えられる. 具体的に述べると,  $H^*(\text{Hess}(S, h))$  上の  $\mathfrak{S}_n$  表現がヤング部分群  $\mathfrak{S}_\lambda(n$  の分割  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  ) に対して  $\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda_m}$  で定義されるもの) の自明表現 1 から誘導される誘導表現  $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} 1$  たちの直和であることが言えれば, Stanley-Stembridge 予想が解決される.

#### 2.4. 一般の Lie 型のヘッセンバーグ多様体.

$G$  を階数  $n$  の  $\mathbb{C}$  上の半単純線形代数群とし, そのボレル部分群  $B$  を 1 つ固定し,  $B$  に含まれる極大トーラス  $T$  を 1 つとる. このとき, 以下が定まる:

- $W$ : Weyl 群
- $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ :  $T \subset B \subset G$  の Lie 環
- $\Phi$ : ルート全体の集合
- $\Phi^+$ : 正ルート全体の集合
- $\Delta$ : 単純ルート全体  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  の集合
- $\mathfrak{g}_\alpha$ : ルート  $\alpha$  に付随するルート空間

定義 2.15.  $H \subset \mathfrak{g}$  がヘッセンバーグ空間であるとは, ボレル部分代数  $\mathfrak{b}$  を含み,  $\mathfrak{b}$ -submodule であるときに言う.

2 つのルート  $\alpha, \beta \in \Phi$  に対して,  $\alpha \preceq \beta \iff \beta - \alpha \in \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$  により,  $\Phi$  上に半順序を定める.

定義 2.16.  $I \subset \Phi^+$  が下方イデアルであるとは, 以下の条件をみたすときにいう.

$$\alpha \in \Phi^+, \beta \in I, \alpha \preceq \beta \Rightarrow \alpha \in I$$

下方イデアル  $I \subset \Phi^+$  に対して, ヘッセンバーグ空間

$$H(I) = \mathfrak{b} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in I} \mathfrak{g}_{-\alpha} \right)$$

が定まり, この対応により下方イデアル全体の集合とヘッセンバーグ空間全体の集合は 1 対 1 に対応している.

例 2.17.  $A_4$  型において,  $I = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2\}$  は下方イデアルである. ボレル部分群  $B$  を  $G = SL_5(\mathbb{C})$  の中の上三角行列全体ととり, 極大トーラス  $T$  を  $G$  の中の対角行列全体としてとる.  $1 \leq i \leq 4$  に対して,  $\alpha_i: \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{C}; \text{diag}(t_1, \dots, t_5) \mapsto t_i - t_{i+1}$  と定めると, ヘッセンバーグ空間  $H(I) = \mathfrak{b} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in I} \mathfrak{g}_{-\alpha} \right)$  は以下のように表せる.

$$\left\{ \left( \begin{array}{ccccc} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array} \right) \in \mathfrak{sl}_5(\mathbb{C}) \right\}$$

ここで、 $*$  は任意の複素数で対角線にある  $*$  の和は 0 とする。この表示はちょうど例 2.2 の  $h = (3, 3, 4, 5, 5)$  の図に対応している。一般に、 $A$  型においてヘッセンバーク空間全体とヘッセンバーク関数全体が 1 対 1 に対応していることが分かる。

**定義 2.18.**  $X \in \mathfrak{g}$ , 下方イデアル  $I \subset \Phi^+$  に対し、ヘッセンバーク多様体  $\text{Hess}(X, I)$  は以下で定義される旗多様体  $G/B$  の部分多様体である。

$$\text{Hess}(X, I) = \{gB \in G/B \mid \text{Ad}(g^{-1})(X) \in H(I)\}$$

$X \in \mathfrak{g}$  が正則であるとは、随伴作用による  $X$  の  $G$ -軌道が最大次元をもつときに言う。  $X \in \mathfrak{g}$  が冪零であるとは、 $\text{ad}(X)$  が冪零であるときに言う。  $X \in \mathfrak{g}$  が半単純であるとは、 $\text{ad}(X)$  が対角化可能であるときに言う。以下では  $N \in \mathfrak{g}$  を正則な冪零元、 $S \in \mathfrak{g}$  を正則な半単純元とし、これらに対応するヘッセンバーク多様体  $\text{Hess}(N, I)$ ,  $\text{Hess}(S, I)$  をそれぞれ正則な冪零ヘッセンバーク多様体、正則な半単純ヘッセンバーク多様体という。

正則な半単純ヘッセンバーク多様体のコホモロジー環  $H^*(\text{Hess}(S, I))$  上の Weyl 群  $W$  の作用を [26] で構成された方法と同様に構成することができるため、定理 2.12 が一般の Lie 型でも成立するかという問題が考えられる。本研究では、超平面配置と関連付けることで以下の環同型が得られた (系 4.3)。

$$H^*(\text{Hess}(N, I)) \cong H^*(\text{Hess}(S, I))^W$$

### 3. 超平面配置

$V$  を  $\mathbb{R}$  上  $n$  次元ベクトル空間とする。  $V$  中の有限個の超平面からなる集合  $\mathcal{A}$  を  $V$  中の超平面配置という。  $R := \text{Sym}(V^*)$  を  $V$  の双対空間  $V^*$  の対称代数とする。  $V$  の元は  $V^*$  上の線形関数で、 $R$  上の導分に拡張する：

$$v(fg) = v(f)g + fv(g) \quad v \in V, f, g \in R$$

$R$  上の導分全体からなる  $R$  加群を

$$\text{Der}(R) := R \otimes V$$

で定義する。特に、 $x_1, \dots, x_n$  を  $V^*$  の基底とすると、 $\text{Der}(R) = \bigoplus_{i=1}^n R(\partial/\partial x_i)$  と表せる。

**定義 3.1.** 超平面配置  $\mathcal{A}$  に対して、 $\mathcal{A}$  の対数的導分の  $R$  加群  $D(\mathcal{A})$  を

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta \in \text{Der}(R) \mid \theta(\alpha_H) \in R\alpha_H, \forall H \in \mathcal{A}\}$$

で定義する。ここで、 $\alpha_H \in V^*$  は  $H \in \mathcal{A}$  を定める線形関数とする。

**例 3.2.**  $\mathbb{R}^n$  の超平面  $H_{i,j} (1 \leq i < j \leq n)$  を

$$H_{i,j} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i - x_j = 0\}$$

で定義し、超平面配置

$$\mathcal{A} := \{H_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

を考える。このとき、 $R = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  加群  $\text{Der}(R) := \bigoplus_{i=1}^n R(\partial/\partial x_i)$  の元

$$\theta_k := x_1^k \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^k \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + x_n^k \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (k \geq 0)$$

は  $D(\mathcal{A})$  の元である。

$\theta \in \text{Der}(R)$  が次数  $d$  の斉次元であるとは、 $\theta = \sum_{k=1}^{\ell} f_k \otimes v_k$  ( $f_k \in R, v_k \in V$ ) と書いたときに、零でないすべての  $f_k$  の次数が  $d$  であるときにいう。

**定義 3.3.** 超平面配置  $\mathcal{A}$  が自由でその指数が  $(d_1, \dots, d_n)$  であるとは、 $D(\mathcal{A})$  が自由  $R$  加群であり、 $\deg \theta_i = d_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) であるような斉次基底  $\theta_1, \dots, \theta_n$  をもつときにいう。

**定理 3.4** (Saito's criterion, [18] ([14] も参照)).  $\mathcal{A}$  を超平面配置とし、 $\theta_1, \dots, \theta_n \in D(\mathcal{A})$  を斉次元とする。このとき、次の 2 つは同値：

- (1)  $\theta_1, \dots, \theta_n$  が  $D(\mathcal{A})$  の  $R$  基底をなす。
- (2)  $\theta_1, \dots, \theta_n$  が  $R$  上一次独立で、 $\sum_{i=1}^n \deg(\theta_i) = |\mathcal{A}|$  である。

**例 3.5.** 例 3.2 において、定理 3.4 より  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$  は  $D(\mathcal{A})$  の  $R$  基底をなすので、 $\mathcal{A}$  は自由配置でその指数は  $(0, 1, \dots, n-1)$  である。今、 $Q := x_1^2 + \dots + x_n^2$  とおき、 $R = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  のイデアル  $\mathfrak{a}$  を

$$\mathfrak{a} := \{\theta(Q) \mid \theta \in D(\mathcal{A})\}$$

で定義する。 $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$  は  $D(\mathcal{A})$  の  $R$  基底をなすことから、イデアル  $\mathfrak{a}$  は冪和  $p_i := x_1^i + \dots + x_n^i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) で生成されることが分かる。よく知られているように、多項式環  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  において冪和  $p_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) で生成されるイデアルと基本対称式  $e_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) で生成されるイデアルは一致する ([10, Section 6.1, Exercise 1] 参照) ので、(2.1) より環同型

$$H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \cong R/\mathfrak{a}$$

を得る。この現象は次のように一般の Lie 型で成立することが知られている。

$T_{\mathbb{R}}$  を  $T$  中の極大コンパクトトーラスとし、 $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$  を  $T_{\mathbb{R}}$  の Lie 環とする。 $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$  中の超平面配置

$$\mathcal{A}_{\Phi^+} := \{\ker \alpha \mid \alpha \in \Phi^+\}$$

を Weyl 配置と呼ぶ。 $R := \text{Sym } \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$  とし、 $Q$  を  $W$ -不変な非退化な二次形式とする。

$$(3.1) \quad \mathfrak{a}(\Phi^+) := \{\theta(Q) \in R \mid \theta \in D(\mathcal{A}_{\Phi^+})\}$$

により  $R$  のイデアルを定義すると、次の環同型が成立。

$$H^*(G/B) \cong R/\mathfrak{a}(\Phi^+)$$

この結果をヘッセンバーク多様体に拡張したのが主結果である。そのために以下の超平面配置を考える。

**定義 3.6.**  $I \subset \Phi^+$  を下方イデアルとする。 $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$  中の超平面配置

$$\mathcal{A}_I := \{\ker \alpha \mid \alpha \in I\}$$

をイデアル配置と呼ぶ。 $(I = \Phi^+)$  のときは Weyl 配置である.)

正ルート  $\alpha \in \Phi^+$  を  $\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$  と単純ルートの一次結合で書いたとき、 $\alpha$  の高さ  $\text{ht}(\alpha)$  を  $\sum_{i=1}^n c_i$  で定義する。 $m := \max\{\text{ht}(\alpha) \mid \alpha \in I\}$  とする。 $i_j := |\{\alpha \in I \mid \text{ht}(\alpha) = j\}|$  とし、 $I$  の高さ分布を正整数の列  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  で定義する。 $I$  の高さ分布の双対配置  $DP(I)$  を

$$(3.2) \quad DP(I) := ((0)^{n-i_1}, (1)^{i_1-i_2}, \dots, (m-1)^{i_{m-1}-i_m}, (m)^{i_m})$$

で定義する。ここで、 $(a)^b$  は非負整数  $a$  がちょうど  $b$  回現れることを意味する。



定理 3.7 ([3]). イデアル配置  $\mathcal{A}_I$  は自由でその指数は  $I$  の高さ分布の双対配置  $DP(I)$  と一致する.

$R := \text{Sym } \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$  とし,  $Q$  を  $W$ -不変な非退化な二次形式とする.

$$(3.3) \quad \mathfrak{a}(I) := \{\theta(Q) \in R \mid \theta \in D(\mathcal{A}_I)\}$$

により  $R$  のイデアルを定義する.

#### 4. 主結果

ルート  $\alpha$  に対して,  $\alpha$  に付随する旗多様体  $G/B$  上の直線束の第一チャーン類を対応させることで, 環準同型写像

$$(4.1) \quad \varphi : R := \text{Sym } \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^* \rightarrow H^*(G/B)$$

を得る. Borel の結果により, この写像は全射で  $\text{Ker } \varphi = (R_+^W)$  である ([5]). ここで,  $(R_+^W)$  は定数項が 0 である  $W$ -不変な  $R$  の元で生成されるイデアルである. 一方, (3.1) で定義された Weyl 配置  $\mathcal{A}_{\Phi^+}$  から得られるイデアル  $\mathfrak{a}(\Phi^+)$  は  $(R_+^W)$  と一致することが知られている ([17] ([19], [24], [4, Theorem 3.9] も参照)).

今, この結果をヘッセンバーク多様体に拡張する. 正則な冪零ヘッセンバーク多様体  $\text{Hess}(N, I)$  から旗多様体  $G/B$  への包含写像が導く制限写像  $H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(N, I))$  と (4.1) との合成写像:

$$(4.2) \quad \varphi_I : R := \text{Sym } \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^* \rightarrow H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(N, I))$$

を考える.

定理 4.1 (Abe-H-Masuda-Murai-Sato [4]). (4.2) の写像  $\varphi_I$  は全射であり, その核は (3.3) で定義されたイデアル  $\mathfrak{a}(I)$  と一致する. 特に, 環同型

$$(4.3) \quad H^*(\text{Hess}(N, I)) \cong R/\mathfrak{a}(I)$$

を得る.

$A$  型のとき [26] で構成された正則な半単純ヘッセンバーク多様体  $\text{Hess}(S, h)$  のコホモロジー  $H^*(\text{Hess}(S, h))$  の上の対称群の作用の構成と同様にして, 一般の Lie 型でも  $H^*(\text{Hess}(S, I))$  の上にワイル群  $W$  の作用が構成できる.  $I = \Phi^+$  のとき,  $\text{Hess}(S, I)$  は全体の旗多様体  $G/B$  と一致し, そのときの  $H^*(G/B)$  上の  $W$  作用は自明である. 制限写像  $H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(S, I))$  は  $W$  同変であるので, 環準同型写像  $H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(S, I))^W$  を得る. この写像と (4.1) との合成写像:

$$(4.4) \quad \psi_I : R := \text{Sym } \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^* \rightarrow H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(S, I))^W$$

を考える.

定理 4.2 (Abe-H-Masuda-Murai-Sato [4]). (4.4) の写像  $\psi_I$  は全射であり, その核は (3.3) で定義されたイデアル  $\mathfrak{a}(I)$  と一致する. 特に, 環同型

$$(4.5) \quad H^*(\text{Hess}(S, I))^W \cong R/\mathfrak{a}(I)$$

を得る.

(4.3) と (4.5) より, 次の系を得る.

系 4.3 (Abe-H-Masuda-Murai-Sato [4]). 次の環同型が成立 :

$$H^*(\text{Hess}(N, I)) \cong H^*(\text{Hess}(S, I))^W$$

## 5. 応用

定理 4.1 における (4.3) の環同型写像

$$H^*(\text{Hess}(N, I)) \cong R/\mathfrak{a}(I)$$

を用いると, さらに以下の 3 つの系が得られる.

### 5.1. Dale Peterson の予言.

以下の系は Dale Peterson により予言されていたものであり ([6, Theorem 3]), 超平面配置と関連付けることで [4] で初めて証明が与えられた.

系 5.1 (Abe-H-Masuda-Murai-Sato [4]). 包含写像  $\text{Hess}(N, I) \subset G/B$  が導く制限写像  $H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(N, I))$  は全射であり,  $H^*(\text{Hess}(N, I))$  はポアンカレ双対代数である.

### 5.2. コホモロジー環 $H^*(\text{Hess}(N, I))$ の明示的表示.

イデアル配置  $\mathcal{A}_I$  の対数的導分の加群  $D(\mathcal{A}_I)$  の  $R$  上の基底を明示的に構成できれば, それらはイデアル  $\mathfrak{a}(I)$  の生成元を与えるため, 定理 4.1 の環同型写像 (4.3) より, コホモロジー環  $H^*(\text{Hess}(N, I))$  の明示的表示が得られる. 実際,  $A_{n-1}$  型において下方イデアル  $I \subset \Phi^+$  とヘッセンバーク関数  $h: [n] \rightarrow [n]$  の同一視のもと (例 2.17 参照), 以下のようにしてイデアル配置  $\mathcal{A}_h$  から  $H^*(\text{Hess}(N, h))$  の明示的表示 (2.3) が得られる.  $R = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  とする. 定義式 (2.2) を模倣して,  $1 \leq j \leq i \leq n$  に対して  $\theta_{i,j} \in \text{Der}(R) := \bigoplus_{k=1}^n R(\partial/\partial x_k)$  を

$$(5.1) \quad \theta_{i,j} := \sum_{k=1}^j \left( \prod_{\ell=j+1}^i (x_k - x_\ell) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

で定める. ただし,  $i = j$  のとき  $\prod_{\ell=j+1}^i (x_k - x_\ell) = 1$  とする. このとき,  $\theta_{h(j),j}$  ( $1 \leq j \leq n$ ) は  $D(\mathcal{A}_h)$  の元である.  $\theta_{h(1),1}, \theta_{h(2),2}, \dots, \theta_{h(n),n}$  が  $D(\mathcal{A}_h)$  の  $R$  加群としての基底をなすことが定理 3.4 より分かる. このことと,  $Q = x_1^2 + \dots + x_n^2$  に対し  $\theta_{i,j}(Q) = 2f_{i,j}$  であることから, 定理 4.1 より  $H^*(\text{Hess}(N, h))$  の明示的表示 (2.3) を得る. (5.1) の  $B_n, C_n, G_2$  型版が得られるため ([4, Section 10 参照]), 以下の系を得る.

系 5.2 (Abe-H-Masuda-Murai-Sato [4]).  $B_n, C_n, G_2$  型において, コホモロジー環  $H^*(\text{Hess}(N, I))$  の明示的表示が得られる.

### 5.3. Sommers-Tymoczko 予想.

下方イデアル  $I \subset \Phi^+$  に対して, 部分集合  $Y \subset I$  が **Weyl type** であるとは, 以下の条件を満たすときにいう.

$$\begin{aligned} \alpha, \beta \in Y, \alpha + \beta \in I &\Rightarrow \alpha + \beta \in Y \\ \gamma, \delta \in I \setminus Y, \gamma + \delta \in I &\Rightarrow \gamma + \delta \in I \setminus Y \end{aligned}$$

$W^I$  により,  $I$  の Weyl type の部分集合全体を表すことにする. 以下の系は Sommers と Tymoczko により予想されたもの ([21]) である.

系 5.3 (Abe-H-Masuda-Murai-Sato [4]). 下方イデアル  $I \subset \Phi^+$  に対して, 次の等式が成立.

$$(5.2) \quad \sum_{Y \in \mathcal{W}^I} q^{|Y|} = \prod_{i=1}^n (1 + q + \cdots + q^{d_i^I})$$

ここで,  $d_1^I, \dots, d_n^I$  は  $I$  の高さ分布の双対配置 (3.2) を表す.

系 5.3 の証明の概略として, (5.2) の左辺は  $\text{Hess}(N, I)$  のポアンカレ多項式と一致し, (5.2) の右辺は  $R/\mathfrak{a}(I)$  のヒルベルト級数と一致するので, 定理 4.1 より (5.2) が得られる.

(5.2) は以下のように超平面配置の言葉で記述できる. イデアル配置  $\mathcal{A}_I$  の chamber 全体を  $\mathcal{C}(\mathcal{A}_I)$  により表す. 各 chamber  $C \in \mathcal{C}(\mathcal{A}_I)$  に対して,  $f(C) := \{\alpha \in I \mid \alpha(x) < 0 \text{ for any } x \in C\}$  と定めると,  $f(C)$  は  $I$  の Weyl type の部分集合である. この対応により,  $\mathcal{C}(\mathcal{A}_I)$  と  $\mathcal{W}^I$  は 1 対 1 に対応する ([4, Proposition 6.4]). また,  $C_0$  を  $\mathcal{C}(\mathcal{A}_{\Phi^+})$  の fundamental Weyl chamber を含む  $\mathcal{C}(\mathcal{A}_I)$  の元とする.  $C \in \mathcal{C}(\mathcal{A}_I)$  に対して,  $d(C, C_0)$  を 2 つの chamber  $C$  と  $C_0$  を分ける  $\mathcal{A}_I$  の超平面の個数とする.  $d(C, C_0) = |f(C)|$  なので, (5.2) は以下の等式に書き換えられる.

$$\sum_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{A}_I)} q^{d(C, C_0)} = \prod_{i=1}^n (1 + q + \cdots + q^{d_i^I})$$

$I = \Phi^+$  のとき, この等式はよく知られた旗多様体  $G/B$  のポアンカレ多項式の 2 つの表示を表している.

#### REFERENCES

- [1] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi, and M. Masuda, The cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type  $A$ , *Int. Math. Res. Not. IMRN.*, DOI: <http://doi.org/10.1093/imrn/rnx275>.
- [2] H. Abe, T. Horiguchi, and M. Masuda, The cohomology rings of regular semisimple Hessenberg varieties for  $h = (h(1), n, \dots, n)$ , To appear in *J. Comb.*
- [3] T. Abe, M. Barakat, M. Cuntz, T. Hoge, and H. Terao, The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements, *J. European Math. Soc.* **18** (2016), 1339–1348.
- [4] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai, and T. Sato, Hessenberg varieties and hyperplane arrangements, arXiv:1611.00269.
- [5] A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, *Ann. of Math. (2)* **57** (1953), 115–207.
- [6] M. Brion and J. Carrell, The equivariant cohomology ring of regular varieties, *Michigan Math. J.* **52** (2004), no. 1, 189–203.
- [7] P. Brosnan and T. Chow, Unit interval orders and the dot action on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties, arXiv:1511.00773.
- [8] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, Hessenberg varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.* **332** (1992), 529–534.
- [9] F. De Mari and M. Shayman, Generalized Eulerian numbers and the topology of the Hessenberg variety of a matrix, *Acta Appl. Math.* **12** (1988), 213–235.
- [10] W. Fulton, *Young tableaux*, With applications to representation theory and geometry, London Mathematical Society Student Texts, 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [11] M. Guay-Paquet, A second proof of the ShareshianWachs conjecture, by way of a new Hopf algebra, arXiv:1601.05498.

- [12] E. Insko and A. Yong, Patch ideals and Peterson varieties, *Transform. Groups* **17** (2012), no. 4, 1011–1036.
- [13] B. Kostant, Flag Manifold Quantum Cohomology, the Toda Lattice, and the Representation with Highest Weight  $\rho$ , *Selecta Math. (N.S.)* **2** (1996), 43–91.
- [14] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [15] M. Precup, Affine pavings of Hessenberg varieties for semisimple groups, *Selecta Math. (N.S.)* **19** (2013), no. 4, 903–922.
- [16] K. Rietsch, Totally positive Toeplitz matrices and quantum cohomology of partial flag varieties, *J. Amer. Math. Soc.* **16**, 2003, 363–392.
- [17] K. Saito, On the uniformization of complements of discriminant loci, AMS Summer Institute, Williams college, 1975, *RIMS Kokyuroku* **287** (1977), 117–137.
- [18] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.IA Math.* **27** (1980), 265–291.
- [19] K. Saito, Uniformization of the orbifold of a finite reflection group, *Frobenius Manifolds*, **36** (2004), Aspects of Mathematics, 265–320.
- [20] J. Shareshian and M. L. Wachs, Chromatic quasisymmetric functions, *Adv. Math.* **295** (2016), 497–551.
- [21] E. Sommers and J. Tymoczko, Exponents of  $B$ -stable ideals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), 3493–3509.
- [22] T. A. Springer, Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups, *Invent. Math.* **36** (1976), 173–207.
- [23] T. A. Springer, A construction of representations of Weyl groups, *Invent. Math.* **44** (1978) 279–293.
- [24] H. Terao, Multiderivations of Coxeter arrangements, *Invent. Math.* **148** (2002), 659–674.
- [25] J. Tymoczko, Linear conditions imposed on flag varieties, *Amer. J. Math.* **128** (2006), 1587–1604.
- [26] J. Tymoczko, Permutation actions on equivariant cohomology of flag varieties, *Contemp. Math.* **460** (2008), 365–384.