

ワイル群のマイナスクル元からの挿入／削除の拡張

千葉大学・大学院理学研究院 萩原 学

Manabu Hagiwara

Department of Mathematics and Informatics

Chiba University

1 導入

本稿は表現論的組合せ論と符号理論を結ぶ新しい理論を数学的にまとめたものである。ここで、表現論的組合せ論の対象としてワイル群のマイナスクル元を、符号理論の対象として削除誤り訂正符号 [1] を想定している。符号理論は情報理論と数学の両分野に跨る理論である、どちらの分野からも研究を進めることができ、どちらの分野にも応用を持つことが知られている。数学的に符号理論を扱う場合、主にハミング距離から得られる距離空間で議論がなされてきた。本稿では別の距離、Levenshtein 距離から得られる距離空間に関する議論を進める。著者の知る限り、マイナスクル元を情報理論へ応用する理論は著者が初めて提案したものである。初出は [6] であり、挿入と呼ばれる操作と C 型のマイナスクル元との関係が指摘された¹。その後、[2] および [7] にて、 A 型のマイナスクル元から新たな挿入操作の発見に至った。

これらの文献 [2, 6, 7] は情報理論研究者向けに書かれた文書であり、符号理論の用語で記述されている。そこで、本稿はワイル群やマイナスクル元の視点から理論をまとめていく。ワイル群の基礎事項は [3] を、マイナスクル元については [5] を参照頂きたい。

¹後の議論で B 型と解釈する方が自然であることがわかった。本稿では B 型の視点で議論を進める。

2 挿入、削除、Levenshtein 距離、符号

まず準備として「挿入」「削除」そして「Levenshtein 距離」などの用語を定義していく。本稿ではベクトル（系列）の表記として、 (x_1, x_2, \dots, x_n) を $x_1x_2\dots x_n$ と記述する。

定義 2.1 (挿入). 集合 Σ 上のベクトル（系列） $z_1z_2\dots z_n (\in \Sigma^n, n \geq 0)$ に対し、勝手な $a \in \Sigma$ と勝手な $0 \leq i \leq n$ によって、 $z_1z_2\dots z_ia z_{i+1}\dots z_n (\in \Sigma^{n+1})$ を与える操作を挿入と呼ぶ。この操作を $\mathcal{I}i.a$ と書く。

注意 2.1. $\Sigma = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ のとき、 $x_1x_2\dots x_n \in \mathbb{R}^n$ に対して挿入で得られる系列全体は、重複を許せば以下で列挙できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{n,0}(x) &= x_1x_2\dots x_n0 \\ \mathcal{I}_{n-1,0}(x) &= x_1x_2\dots 0x_n \\ &\vdots \\ \mathcal{I}_{2,0}(x) &= x_1x_20\dots x_n \\ \mathcal{I}_{1,0}(x) &= x_10x_2\dots x_n \\ \mathcal{I}_{0,0}(x) &= 0x_1x_2\dots x_n \\ \mathcal{I}_{0,1}(x) &= 1x_1x_2\dots x_n \\ \mathcal{I}_{1,1}(x) &= x_11x_2\dots x_n \\ \mathcal{I}_{2,1}(x) &= x_1x_21\dots x_n \\ &\vdots \\ \mathcal{I}_{n-1,1}(x) &= x_1x_2\dots 1x_n \\ \mathcal{I}_{n,1}(x) &= x_1x_2\dots x_n1 \end{aligned}$$

上の考察は、次節で挿入をワイル群で記述するアイデアの核になっている。

定義 2.2 (削除). 集合 Σ 上の系列 $z_1z_2\dots z_n (\in \Sigma^n, n \geq 1)$ に対し、勝手な $1 \leq i \leq n$ によって、 $z_1z_2\dots z_{i-1}\hat{z}_iz_{i+1}\dots z_n (:= z_1z_2\dots z_{i-1}z_{i+1}\dots z_n) (\in \Sigma^{n-1})$ を与える操作を削除と呼ぶ。この操作を $\mathcal{D}i$ と書く。

定義 2.3 (Levenshtein 距離 d_L). 集合 $\Sigma^* := \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$ 上の関数 d_L を次で定める：

$$d_L(x, y) := \min\{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid y = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\dots\mathcal{E}_dx, \mathcal{E}_i \text{ は挿入もしくは削除}\}.$$

この関数 d_L は距離の公理を満たす。この距離を **Levenshtein** 距離と呼ぶ。

Levenshtein 距離は情報理論だけでなく、計算機科学や生命科学などにも用いられる概念である。編集距離とも呼ばれる。

定義 2.4 (挿入/削除球体 $B_t(x)$, 削除球面 $DS_t(x)$, 挿入球面 $IS_t(x)$). 非負整数 t と $x \in \Sigma^*$ に対し、

$$B_t(x) := \{y \in \Sigma^* \mid d_L(x, y) \leq t\}$$

と定め、中心 x 半径 t の挿入/削除球体と呼ぶ。そして

$$DS_t(x) := \{y \in \Sigma^* \mid \exists D_i, y = D_1 D_2 \dots D_t x\}$$

と定め、中心 x 半径 t の削除球面と呼ぶ。同様に

$$IS_t(x) := \{y \in \Sigma^* \mid \exists I_i, y = I_1 I_2 \dots I_t x\}$$

と定め、中心 x 半径 t の挿入球面と呼ぶ。

定義 2.5 (t 重挿入/削除符号). 集合 $C \subset \Sigma^*$ が t 重挿入/削除符号であるとは、次の条件を満たすことと定める。

条件：任意の異なる二元 $x, y \in C$ に対し $B_t(x) \cap B_t(y) = \emptyset$ が従う。

注意 2.2. n を正整数、 t を非負整数、 $C \subset \Sigma^n$ 、 $x, y \in C$ としたとき次の3つは同値である。

- $B_t(x) \cap B_t(y) = \emptyset$.
- $DS_t(x) \cap DS_t(y) = \emptyset$.
- $IS_t(x) \cap IS_t(y) = \emptyset$.

つまり、集合 C に属する系列の長さが一定ならば、「挿入/削除に対する符号」「挿入に対する符号」、そして「削除に対する符号」はいずれも等しい。

さて、1 重挿入/削除符号で最も著名なものが次の Levenshtein 符号である。

定義 2.6 (Levenshtein 符号). ここでは、 $\Sigma := \{0, 1\} \subset \mathbb{Z}$ とする。正整数 n と整数 a に対して集合 $L_{n,a}$ を以下で定める。

$$L_{n,a} := \{\mathbf{x} \in \Sigma^n \mid \rho(\mathbf{x}) \equiv a \pmod{n+1}\}$$

ただし、 $\rho(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$ を表す。この集合 $L_{n,a}$ を *Levenshtein* 符号と呼ぶ。

Levenshtein 符号には完全性と呼ばれる特筆すべき性質が知られている。

定義 2.7 (完全). 集合 $C \subset \Sigma^n$ が t 削除に対する完全符号であるとは、集合族 $\{DS_t(x) \mid x \in C\}$ が Σ^{n-t} の分割を与えること、と定める。

Theorem 2.1 ([4]). 任意の n, a に対し、 $L_{n,a}$ は 1 削除に対する完全符号。

Example 2.1. *Levenshtein* 符号の定義に従い計算すれば

$$L_{5,0} = \{00000, 10001, 01010, 11011, 11100, 00111\}$$

であることがわかる。そこで各元に対し、削除を施せば次の一覧を得る。

$$\begin{aligned} x : S_1(x) \\ 00000 : 0000 \\ 10001 : 0001, 1001, 1000 \\ 01010 : 1010, 0010, 0110, 0100, 0101 \\ 11011 : 1011, 1111, 1101 \\ 11100 : 1100, 1110 \\ 00111 : 0111, 0011 \end{aligned}$$

削除された結果に重複は無い。さらに、 $\{0, 1\}^4$ を網羅している。

注意 2.3. 削除と挿入は逆の操作と言える。そのため、削除で表される定義や言明は、挿入を以って表せることがある。

Lemma 2.1. 符号 $C \subset \Sigma^n$ が t 削除に対して完全である必要十分条件は、「任意の $y \in \Sigma^{n-t}$ に対し、 $x \in IS_t(y)$ を満たす $x \in C$ が一意に存在すること」である。

次節では、挿入と Levenshtein 符号などを B 型ワイル群を用いて表現する。

3 B型のワイル群、ミヌスル元と挿入

本稿では B 型のルート系 Φ を、次の集合 Π を単純ルート系としてもつルート系と定める。

$$\Pi := \{\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1, \epsilon_3 - \epsilon_2, \dots, \epsilon_n - \epsilon_{n-1}\}.$$

ただし、 $\{\epsilon_i\}_i$ はユークリッド空間 \mathbb{R}^n の標準基底を表す。以下、単純ルートを表す記法として、

$$\alpha_0 := \epsilon_1, \quad \alpha_i := \epsilon_{i+1} - \epsilon_i, \quad 1 \leq i < n$$

を用いる。

このとき、正ルート系 Φ^+ は

$$\Phi^+ = \{\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\epsilon_{i+1} \pm \epsilon_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$$

となる。

注意 3.1. この単純ルート系を *Dynkin* 図で表せば図 1 として描画できる。添え字のつけかたに注意頂きたい。

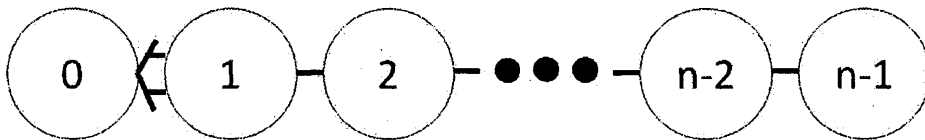


図 1: B 型 Dynkin 図形

3.1 ミヌスル元とビット列との対応

ワイル群とビット列（成分に 0, 1 しかもたないベクトル）の対応を与えよう。

定義 3.1 (ミヌスル元). ワイル群 W の元 w がミヌスルであるとは、あるウェイト $\lambda \in \Delta$ が存在し、 w の任意の最短表示 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l}$ に対して、

$$s_{i_j} \cdots s_{i_l} \lambda = s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_l} \lambda - \alpha_{i_j} \quad (1 \leq j \leq l) \quad (1)$$

が従うことと定める。ここで α_i は単純ルートであり、 s_i はルート α_i に関する鏡映である。 λ を明示したいときには w を λ -ミヌスル元と呼ぶ。

注意 3.2. 式 (1) は

$$s_{ij} \cdots s_{il} \lambda = \lambda - \sum_{j \leq h \leq l} \alpha_{i_h}$$

と表せる。

注意 3.3. ミナスクル元の定義において、条件「 w の任意の最短表示 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ に対して」を条件「 w のある最短表示 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ に対して」に置き換えても構わないことが [5] で示されている。特にこれら 2 条件は、同値である。

以下、本稿では A_n 型のワイル群を $W(A_n)$ で、 B_n 型のワイル群を $W(B_n)$ でそれぞれ表す。

そして、3 節では $\lambda := \frac{1}{2}(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ に固定して議論する。

注意 3.4. ワイル群 $W(B_n)$ による λ の軌道 $W(B_n) \cdot \lambda$ について、

$$W(B_n) \cdot \lambda = \left\{ \frac{1}{2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i = \pm 1, 1 \leq i \leq n \right\}$$

が従う。

特にその濃度は $\#(W(B_n) \cdot \lambda) = 2^n$ である。

この注意から $W(B_n) \cdot \lambda$ と $\{0, 1\}^n$ の間に一対一対応がある。具体的には以下の写像 $F : \{0, 1\}^n \rightarrow W(B_n) \cdot \lambda$ により対応がつく。

$$F(x) := \lambda - x \quad (x \in \{0, 1\}^n)$$

とくに逆写像は

$$F^{-1}(y) = \lambda - y \quad (y \in W(B_n) \cdot \lambda)$$

である。以降、集合 $\{0, 1\}^n$ と $W(B_n) \cdot \lambda$ の両方を \mathbb{R}^n の部分集合とみて、 F と F^{-1} を同一視する。

注意 3.5. λ の固定群 $W(B_n)_\lambda$ について、

$$W(B_n)_\lambda = W_I \simeq W(A_{n-1})$$

が従う。ここで $I := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$ であり、 W_I は I に関する鏡映が生成する (最大) 放物部分群を表す。

特にその濃度は $\#W(B_n)_\lambda = n!$ である。

注意 3.6. 上の二つの注意から軌道と剰余類 $W(B_n)/W(B_n)_\lambda$ のどちらの濃度も 2^n であるからそれらの一対一対応がある。

さらに、剰余類の最短コセット代表元全体を \mathbb{B}_n とかけば、 \mathbb{B}_n はワイル群 $W(B_n)$ に含まれる λ -マイナスクル元全体と一致する。

以上の議論のまとめ： λ -マイナスクル元の集合 \mathbb{B}_n と集合 $\{0, 1\}^n$ の間に一対一対応 f が構成できる。具体的には

$$f(w) := \lambda - w\lambda$$

とできる。逆写像は、ビット列 $x \in \{0, 1\}^n$ からコセット $\{\sigma \in W(B_n) \mid \sigma\lambda = \lambda - x\}$ の最短代表元への対応として与えられる。

3.2 最高ルートに対する鏡映と挿入

B_{n+1} 型の最高ルート $\bar{\alpha}$ に関する鏡映 $s_{\bar{\alpha}}$ はただ一つの最短表示を持つ。具体的には次である。

$$s_{\bar{\alpha}} = s_n s_{n-1} \dots s_2 s_1 s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_n.$$

この最短表示のサブワードとして、右から i 個 ($0 \leq i \leq 2n+1$) の単純鏡映の積を I_i で表そう。

Example 3.1. $n = 3$ とすれば、 I_0, I_1, \dots, I_7 は以下である。

$$I_0 = \text{id}$$

$$I_1 = s_3$$

$$I_2 = s_2 s_3$$

$$I_3 = s_1 s_2 s_3$$

$$I_4 = s_0 s_1 s_2 s_3$$

$$I_5 = s_1 s_0 s_1 s_2 s_3$$

$$I_6 = s_2 s_1 s_0 s_1 s_2 s_3$$

$$I_7 = s_3 s_2 s_1 s_0 s_1 s_2 s_3$$

ベクトル $x_1 x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}^n$ に対し、 $n+1$ 番目の成分として $1/2$ を付け加えて \mathbb{R}^{n+1} に埋め込み、その後に I_i を作用させる操作を \mathcal{I}_i と書くこと

にする。 \mathcal{I}_i の作用を考察すれば、以下で表せる。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_0(x) &= x_1 x_2 \dots x_n \frac{1}{2} \\
 \mathcal{I}_1(x) &= x_1 x_2 \dots \frac{1}{2} x_n \\
 &\vdots \\
 \mathcal{I}_{n-2}(x) &= x_1 x_2 \frac{1}{2} \dots x_n \\
 \mathcal{I}_{n-1}(x) &= x_1 \frac{1}{2} x_2 \dots x_n \\
 \mathcal{I}_n(x) &= \frac{1}{2} x_1 x_2 \dots x_n \\
 \mathcal{I}_{n+1}(x) &= \frac{-1}{2} x_1 x_2 \dots x_n \\
 \mathcal{I}_{n+2}(x) &= x_1 \frac{-1}{2} x_2 \dots x_n \\
 \mathcal{I}_{n+3}(x) &= x_1 x_2 \frac{-1}{2} \dots x_n \\
 &\vdots \\
 \mathcal{I}_{2n}(x) &= x_1 x_2 \dots \frac{-1}{2} x_n \\
 \mathcal{I}_{2n+1}(x) &= x_1 x_2 \dots x_n \frac{-1}{2}
 \end{aligned}$$

各成分 x_j が $1/2$ もしくは $-1/2$ であったとしよう。写像 F により「 $1/2$ と 0 」が「 $-1/2$ と 1 」がそれぞれ対応すること、 \mathcal{I}_i は (0 もしくは 1) の挿入と対応することを思い出そう。その状況では

$$F \circ \mathcal{I}_{i,b} = \mathcal{I}_{b+n-(-1)^{bi}}$$

が従う。

注意 3.7. 記号を乱用し、 $\mathcal{I}_j : \{1/2, -1/2\}^n \rightarrow \{1/2, -1/2\}^{n+1}$ を写像 $\mathcal{I}_j : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{B}_{n+1}$ とみなすことを許す。

3.3 ワイル群と Levenshtein 符号

ここまで、ビット列 $\{0, 1\}^n$ とミヌスкул元集合 \mathbb{B}_n (、実は $\{1/2, -1/2\}^n$ も) を、またビット列への挿入 $\mathcal{I}_{i,b}$ とミヌスкул元への操作 $\mathcal{I}_{b+n-(-1)^{bi}}$

をそれぞれ対応付けた。今度は Levenshtein 符号 $L_{n,a}$ に対応するミヌス
 クル元集合の部分集合 $\mathbb{B}_{n,a}$ を与える。具体的には次である。

$$\mathbb{B}_{n,a} := \{\sigma \in \mathbb{B}_n \mid l(\sigma) \equiv a \pmod{n+1}\}.$$

ただし $l(\sigma)$ は σ の最短表示の長さを表す。つまり主張は

Theorem 3.1.

$$f(\mathbb{B}_{n,a}) = L_{n,a}$$

である。この主張は、次から直ちに得られる。

Theorem 3.2. 任意のミヌスクル元 $\sigma \in \mathbb{B}_n$ に対して

$$l(\sigma) = \rho(f(\sigma))$$

が従う。

Proof.

$$\begin{aligned} \rho(f(\sigma)) &= \langle (1, 2, \dots, n), f(\sigma) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha^\vee, f(\sigma) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha^\vee, \lambda - \sigma\lambda \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha^\vee, \lambda - \left(\lambda - \sum_{1 \leq j \leq l(\sigma)} \alpha_{i_j} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha^\vee, \sum_{1 \leq j \leq l(\sigma)} \alpha_{i_j} \right\rangle \\ &= l(\sigma) \end{aligned}$$

ただし、 \langle, \rangle は \mathbb{R}^n の標準内積を、 α^\vee はルート α のコルートをそれぞれ表す。また、 σ の最短表示を $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{l(\sigma)}}$ と置いた。

最後の等号は、任意の単純ルート γ に対して $\langle \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha^\vee, \gamma \rangle = 1$ が従うことを用いた。 \square

以上より、Levenshtein 符号に対する挿入に関する言明が B 型のミヌス
 クル元でも表現できる状況になった。

Example 3.2. 挿入球を次の様に定義する。

非負整数 n, t と $w \in \mathbb{B}_n$ に対し、

$$IS_t(w) := \{\mathcal{I}_{i_1}\mathcal{I}_{i_2}\dots\mathcal{I}_{i_t}w \mid \mathcal{I}_{i_j} \text{は挿入}\}$$

Levenshtein 符号の完全性をワイル群の言葉で表せば次を得る。

Theorem 3.3. 任意の非負整数 n と任意の整数 a 、そして任意の $w \in \mathbb{B}_{n-1}$ に対し、ある $\sigma \in \mathbb{B}_{n,a}$ が一意に存在して

$$IS_1(w) \ni \sigma$$

を満たす。

4 A 型への拡張

ここまで B 型のワイル群、ミヌスル元が挿入や Levenshtein 符号と結びつくことを指摘してきた。今度は同様の結びつきを A 型で実現する。証明は省き、アイデア、言明、例を述べていく。

まず A_{n-1} 型のルート系を、単純ルート系 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$ をもつルート系と定義する。つまり、前節の記法等を流用する。次に、正整数 i, j ($i \leq j$) に対し、単純ルート系として $\{\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_j\}$ をもつルート系を $A_{i,j}$ 型と呼ぶことにする。

ワイル群 $W(A_{n-1})$ の最大放物部分群は $W(A_{2,n-1})$ 、 $W(A_{1,m-1}) \times W(A_{m+1,n-1})$ 、もしくは $W(A_{1,n-2})$ の 3 通りある。ただし、 $2 \leq m \leq n-2$ である。それぞれによるコセットの最小コセット代表元全体を $\mathbb{Y}_{n,1}$ 、 $\mathbb{Y}_{n,m}$ 、 $\mathbb{Y}_{n,n-1}$ と表すことにする。

どの $1 \leq m \leq n-1$ に対しても、 $\mathbb{Y}_{n,m}$ は $\lambda_m := \frac{1}{2}(\overbrace{-1, -1, \dots, -1}^m, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{n-m})$ に対する λ_m -ミヌスル元全体と一致する。また、軌道 $W(A_{n-1}) \cdot \lambda_m$ の F による像は、ハミング重み m の長さ n のビット列全体と一致する。つまり

$$F(W(A_{n-1}) \cdot \lambda_m) = \{x \in \{0, 1\}^m \mid \text{wt}(x) = m\}$$

ただし $\text{wt}(x)$ は x のハミング重み (x の非ゼロ成分の個数) を表す。

$W(A_{n+1})$ の最高ルートに対する鏡映を w_0 とする。 w_0 の最短表示は一意ではないが、一つ固定してそれを $s_{h_{2n+1}}s_{h_{2n}}\dots s_{h_2}s_{h_1}$ とする。そして $I_j \in W(A_{n+1})$ ($0 \leq j \leq 2n+1$) を以下で定める。

$$I_j := s_{h_j}s_{h_{j-1}}\dots s_2s_1$$

ここで \mathcal{I}_0 は単位元であることを明記しておく。

以上の準備の下、(A型の)挿入を定義する。

定義 4.1 (A型の挿入). $0 \leq j \leq 2n+1$ に対し、写像 $\mathcal{I}_j : \{-1/2, 1/2\}^n \rightarrow \{-1/2, 1/2\}^{n+2}$ を

$$s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l} \lambda_m \mapsto \mathcal{I}_j \left(\frac{-1}{2}, s_{i_1+1} s_{i_2+1} \cdots s_{i_l+1} \lambda_m, \frac{1}{2} \right)$$

で定める。ここで $\{-1/2, 1/2\}^n = W(A_{n-1}) \cdot \lambda_m = Y_{m,n} \cdot \lambda_m$ に注意。

この写像を ($\{-1/2, 1/2\}^n$ 上の) 挿入と呼ぶ。この挿入によって、 F を通じて $\{0, 1\}^n$ 上の挿入、 $Y_{m,n}$ 上の挿入と定める。

注意 4.1. A型の挿入は、ベクトルの長さを2増やすことを注意しておく。

4.1 ヤング図形・最短経路による理解

ここでは $W(A_{n+1})$ の最高ルートの鏡映 $s_{\bar{\alpha}}$ の最短表示として

$$s_{\bar{\alpha}} = s_{n+1} s_n \cdots s_2 s_1 s_2 \cdots s_n s_{n+1}$$

を選ぶことにする。このとき、挿入は次のどちらかの操作とみなせる。

- 与えられたビット列 y に対し、最初に 0 を適当な位置 i に挿入し $\mathcal{I}_{i,0}y$ を得る。続いて 1 を先頭に挿入し $\mathcal{I}_{0,1}\mathcal{I}_{i,0}y$ を得る。
- 与えられたビット列 y に対し、最初に 1 を適当な位置 i に挿入し $\mathcal{I}_{i,1}y$ を得る。続いて 0 を先頭に挿入し $\mathcal{I}_{0,0}\mathcal{I}_{i,1}y$ を得る。

この挿入は $\mathbb{Y}_{n,m}$ から $\mathbb{Y}_{n+2,m+1}$ の写像である。

注意 4.2. $\mathbb{Y}_{n,m}$ の元はハミング重み m の長さ n のビット列と同一視できるが、次の解釈により平面上の点 $(0, 0)$ から点 $(m, n-m)$ への格子上を通る最短経路と同一視できる。その解釈はビット列の各成分に対し、0 を Y 方向への移動、1 を X 方向への移動とみなし、ビット列の最初の成分から順に移動することである。

例えば、本稿最終ページの左上の最短経路は $\mathbb{Y}_{10,6}$ の成分であり、ビット列としては 1100011101 を表す。

では、挿入が定義できたところで、Levenshtein のアナロジーを導入したい。

定義 4.2 ($\mathbb{Y}_{n,m,a}$). 正整数 n, m ($m < n$) と整数 a に対し集合 $\mathbb{Y}_{n,m,a}$ を

$$\mathbb{Y}_{n,m,a} := \{\sigma \in W(A_{n-1}) \mid \sigma \in \mathbb{Y}_{n,m}, l(\sigma) \equiv a \pmod{n}\}$$

と定める。

注意 4.3. $\mathbb{Y}_{n,m,a}$ を最短経路とみなすとき、「その経路の左上にあるマス (ヤング図形とみなせる図形) の個数が $a \pmod{n}$ であるもの全体」と特徴づけられる。

挿入の逆操作を削除と呼べば、最短経路上での削除は次の様に表現できる。

- 最短経路の定めるヤング図形に一番左下のマス (角の一つが原点 $(0,0)$ であるマス) が含まれるなら、経路の最左の列を全て消去し、さらに任意に行を 1 つ消去し、全体を左下に詰める。
- 最短経路の定めるヤング図形に一番左下のマス (角の一つが原点 $(0,0)$ であるマス) が含まれなければ、経路の最下の行を全て消去し、さらに任意に列を 1 つ消去し、全体を左下に詰める。

本稿の主結果の一つが以下である。

Theorem 4.1. $\mathbb{Y}_{n,m,a}$ は 1 削除に対して完全。

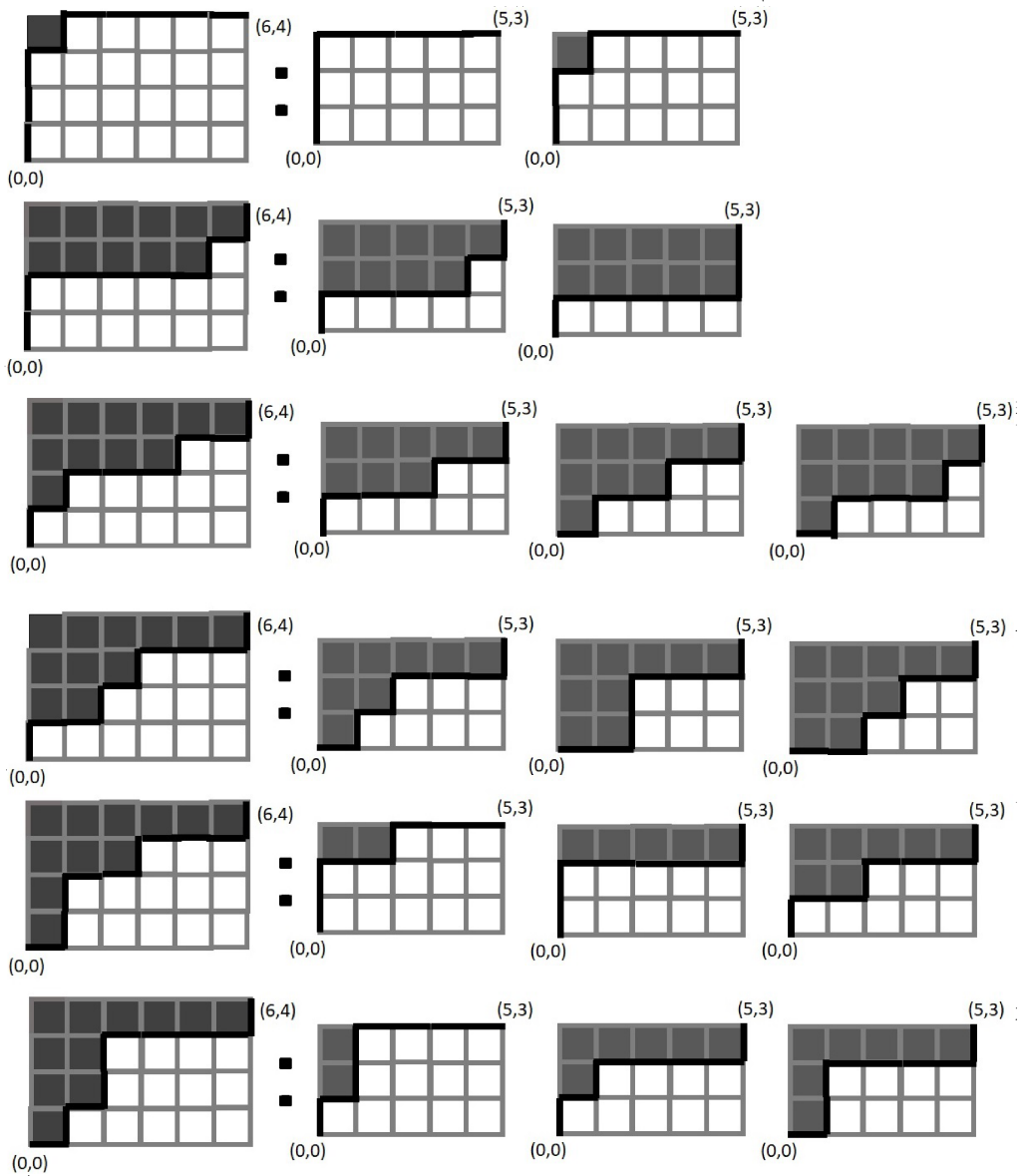
最後にこの定理の例を与える。例として $Y_{10,6,1}$ の各要素と、削除した結果を図示している。 $Y_{10,6,1}$ の要素は 20 ある。そして、削除結果は $\mathbb{Y}_{8,5}$ の要素 56 個を重複なく網羅している。

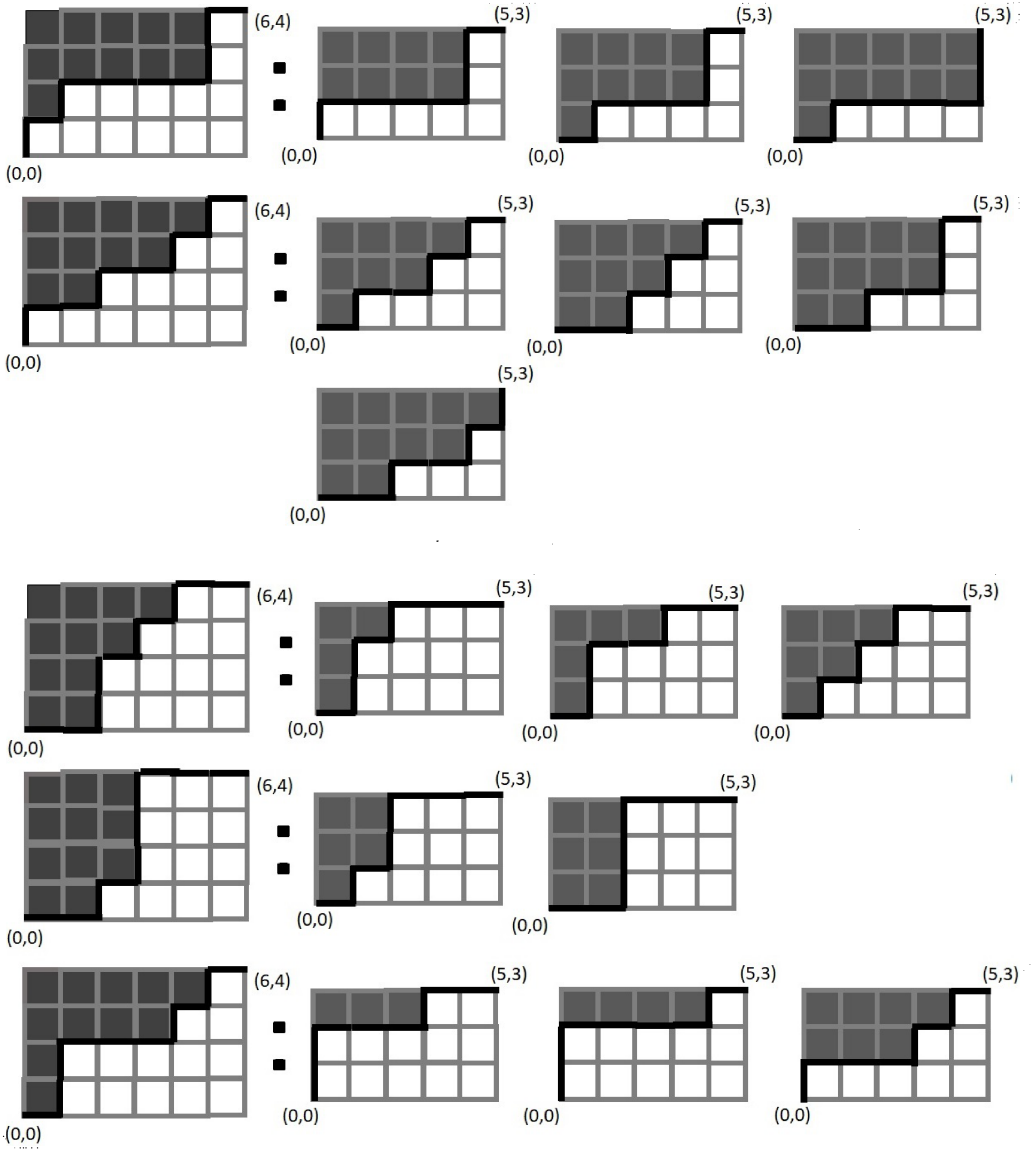
4.2 応用：バランス隣接削除

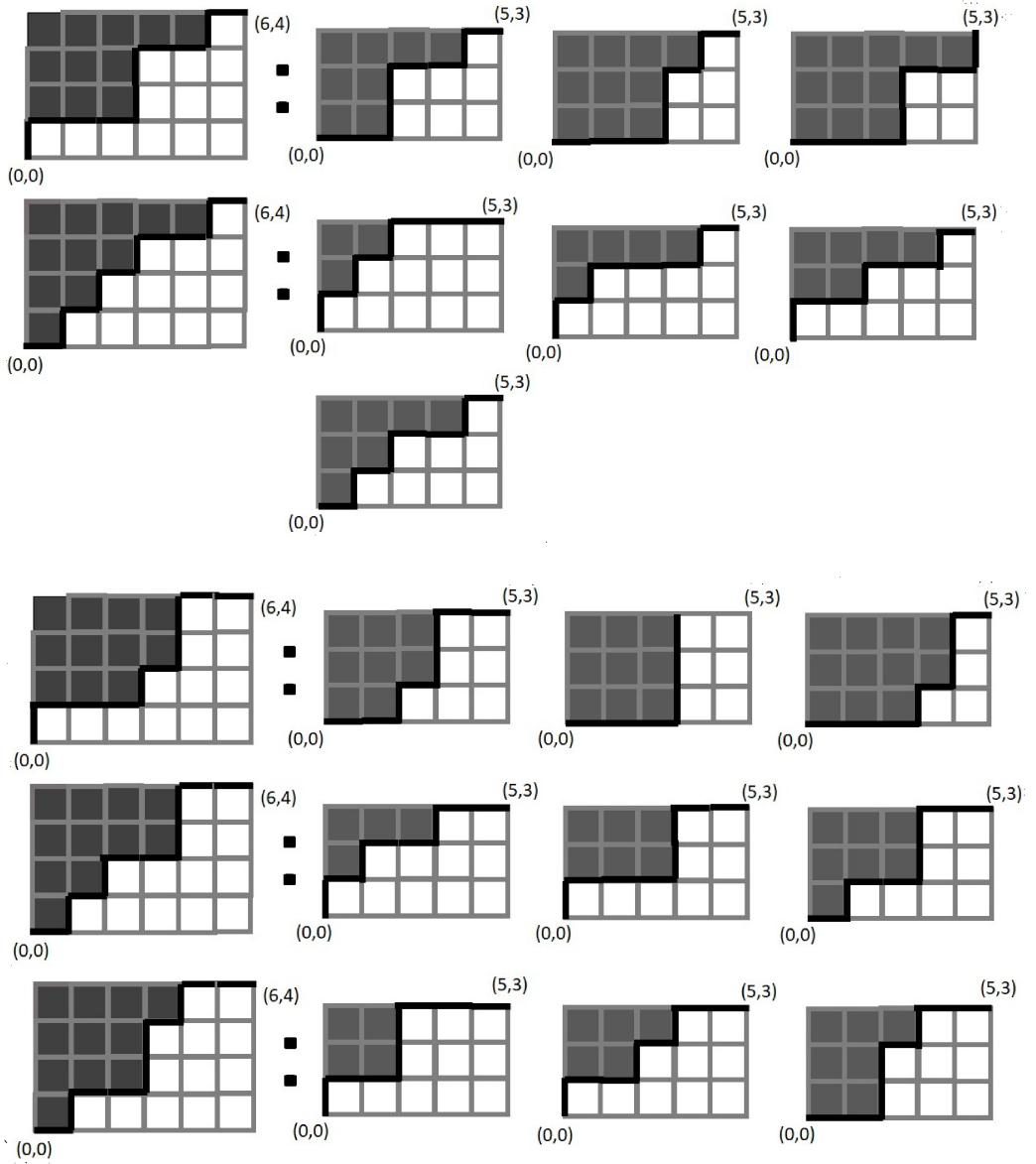
A 型の最高ルートに対する鏡映の最短表示を変えて挿入を定義し、さらに皮むき置換と呼ばれる置換を施すことで、バランス隣接挿入と対応できることが [2] にて指摘されている。

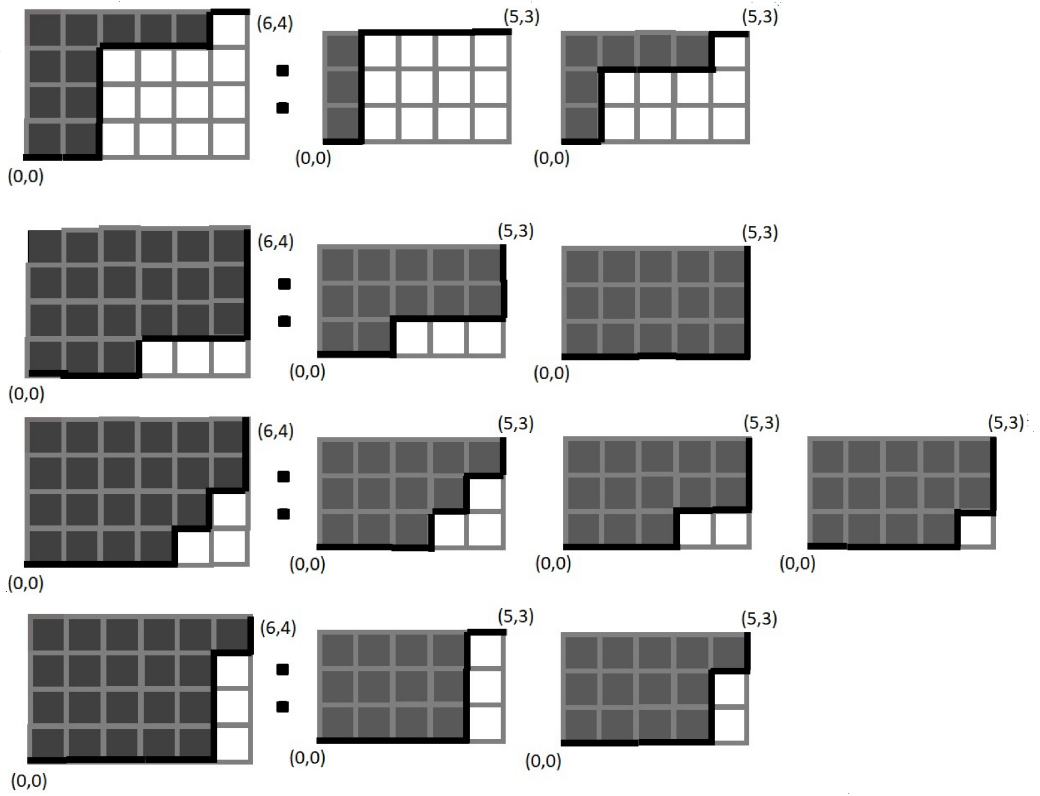
参考文献

- [1] 進化する符号理論. 日本評論社, 2016.









- [2] Manabu Hagiwara. Perfect codes for single balanced adjacent deletions. In *Information Theory (ISIT), 2017 IEEE International Symposium on*, pages 1938–1942. IEEE, 2017.
- [3] James E Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29. Cambridge university press, 1992.
- [4] VI Levenshtein. On perfect codes in deletion and insertion metric. *Discrete Mathematics and Applications*, 2(3):241–258, 1992.
- [5] John R Stembridge. Minuscule elements of weyl groups. *Journal of Algebra*, 235(2):722–743, 2001.
- [6] 萩原学. C型ルート系に付随する挿入削除誤り訂正符号. In *SITA2016 予稿集*, pages 445–450. IEICE, 2016.
- [7] 萩原学. バランス隣接挿入／削除誤りの性質. In *SITA2017 予稿集*, pages 7–12. IEICE, 2017.